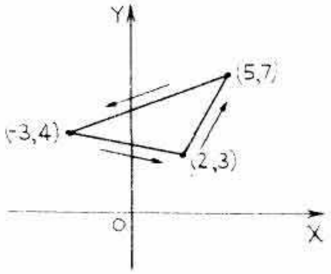
AREA DE UN POLIGONO DE VERTICES CONOCIDOS.

17. Hallar el área A del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (2, 3), (5, 7), (—3, 4).



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[2\cdot 7 + 5\cdot 4 + (-3)(3) - 2\cdot 4 - (-3)(7) - 5\cdot 3]$$

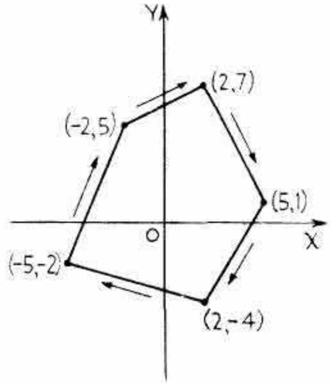
$= \tfrac{1}{2}(14 + 20 - 9 - 8 + 21 - 15) = 11{,}5$ unidades de superficie.

18. Hallar el área A del pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas (—5, —2), (—2, 5), (2, 7), (5, 1), (2, —4).

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \\ 2 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[(-5)(5) + (-2)(7) + 2\cdot 1 + 5(-4) + 2(-2) - (-5)(-4) - 2\cdot 1 - 5\cdot 7 - 2\cdot 5 - (-2)(-2)]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-132) = -66.$$



Solución: 66 unidades de superficie. Si se toman los vértices recorriendo el polígono en el sentido contrario al de las agujas del reloj, el área se considera positiva, y en caso contrario negativa.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representar los puntos de coordenadas: (2, 3), (4, 0), (—3, 1), ($\sqrt{2}$, —1), (—2, 0), (—2, $\sqrt{3}$), (0, 1), (—2, $\sqrt{8}$), ($\sqrt{7}$, 0), (0, 0), (4,5, —2), ($\sqrt{10}$, — $\sqrt{2}$), (0, $\sqrt{3}$), (2,3, —6).

2. Representar los triángulos de vértices: *a*) (0, 0), (—1, 5), (4, 2);
b) ($\sqrt{2}$, 0), (4, 5), (—3, 2);
c) (2 + $\sqrt{2}$, —3), ($\sqrt{3}$, 3), (—2, 1 + $\sqrt{8}$).

3. Representar los polígonos de vértices: *a*) (—3, 2), (1, 5), (5, 3), (1, —2);
b) (—5, 0), (—3, —4), (3, —3), (7, 2), (1, 6).

4. Hallar la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:
a) (4, 1), (3, —2); *c*) (0, 3), (—4, 1); *e*) (2, —6), (2, —2);
b) (—7, 4), (1, —11); *d*) (—1, —5), (2, —3); *f*) (—3, 1), (3, —1).
Sol. *a*) $\sqrt{10}$, *b*) 17, *c*) $2\sqrt{5}$, *d*) $\sqrt{13}$, *e*) 4, *f*) $2\sqrt{10}$.

5. Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:
a) (—2, 5), (4, 3), (7, —2); *c*) (2, —5), (—3, 4), (0, —3);
b) (0, 4), (—4, 1), (3, —3); *d*) (—1, —2), (4, 2), (—3, 5).
Sol. *a*) 23,56, *b*) 20,67, *c*) 20,74, *d*) 21,30.

6. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles:
a) (2, —2), (—3, —1), (1, 6); *c*) (2, 4), (5, 1), (6, 5);
b) (—2, 2), (6, 6), (2, —2); *d*) (6, 7), (—8, —1), (—2, —7).

7. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos. Hallar sus áreas.

a) (0, 9), (—4, —1), (3, 2); *c*) (3, —2), (—2, 3), (0, 4);
b) (10, 5), (3, 2), (6, —5); *d*) (—2, 8), (—6, 1), (0, 4).
Sol. Areas: *a*) 29, *b*) 29, *c*) 7,5, *d*) 15 unidades de superficie.

8. Demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo:

a) (—1, —2), (0, 1), (—3, 2), (—4, —1); *b*) (—1, —5), (2, 1), (1, 5), (—2, —1); *c*) (2, 4), (6, 2), (8, 6), (4, 8).

9. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos:

a) (3, 3), (6, 2), (8, —2); *b*) (4, 3), (2, 7), (—3, —8); *c*) (2, 3), (4, —1), (5, 2).
Sol. *a*) (3, —2), *b*) (—5, 1), *c*) (3, 1).

10. Demostrar, mediante la fórmula de la distancia, que los puntos siguientes son colineales:

a) (0, 4), (3, —2), (—2, 8); *c*) (1, 2), (—3, 10), (4, —4);
b) (—2, 3), (—6, 1), (—10, —1); *d*) (1, 3), (—2, —3), (3, 7).

11. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices. Supóngase que las coordenadas de los vértices son (0, 0), (0, b), (a, b) y (a, 0).

12. Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (—3, 6).
Sol. (3, —2), (3, 14).

13. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \dfrac{P_1P}{PP_2}$.

a) $P_1(4, -3)$, $P_2(1, 4)$, $r = \dfrac{2}{1}$. *d*) $P_1(0, 3)$, $P_2(7, 4)$, $r = -\dfrac{2}{7}$.

b) $P_1(5, 3)$, $P_2(-3, -3)$, $r = \dfrac{1}{3}$. *e*) $P_1(-5, 2)$, $P_2(1, 4)$, $r = -\dfrac{5}{3}$.

c) $P_1(-2, 3)$, $P_2(3, -2)$, $r = \dfrac{2}{5}$. *f*) $P_1(2, -5)$, $P_2(6, 3)$, $r = \dfrac{3}{4}$.

Sol. *a*) $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$, *c*) $\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$, *d*) $\left(-\dfrac{14}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$, *e*) (10, 7), *f*) $\left(\dfrac{26}{7}, -\dfrac{11}{7}\right)$.

14. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son:

a) (5, 7), (1, —3), (—5, 1); *c*) (3, 6), (—5, 2), (7, —6); *e*) (—3, 1), (2, 4), (6, —2).
b) (2, —1), (6, 7), (—4, —3); *d*) (7, 4), (3, —6), (—5, 2);

Sol. *a*) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$, *c*) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, *d*) $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, *e*) $\left(\dfrac{5}{3}, 1\right)$.

15 Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = 3/7$, hallar las coordenadas de P_2.
Sol. (16, —12).

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (—2, 1), (5, 2) y (2, —3).
Sol. (1, 6), (9, —2), (—5, —4).

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son (3, 2), (—1, —2) y (5, —4).
Sol. (—3, 4), (9, 0), (1, —8).