Tarea núm. 11

(para el 18 mayo, 2017)

Nota: En cada inciso hay que hacer un dibujo claro, ilustrando *todos* los elementos que aparecen en el problema, verificando que tu solución tiene sentido en el dibujo.

1. En cada caso encuentra los dos ángulos que se forman entre las dos rectas dadas y las ecuaciones de las dos rectas bisectrices de estos ángulos.

   (a) $y = x$, $y = 2x$. (b) $y = x + 1$, $y = 2x + 3$ (c) $x = 2$, $x + y = 1$. (d) Las rectas tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$ en sus puntos de intersección con la recta $4x + 3y + 2 = 0$.

2. Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 se intersectan en un punto $P = (2, -1)$. Trazamos por P las dos bisectrices de los ángulos formados por ℓ_1, ℓ_2. La pendiente de unas de estas bisectrices es $1/3$. Encuentra las ecuaciones de las dos bisectrices.

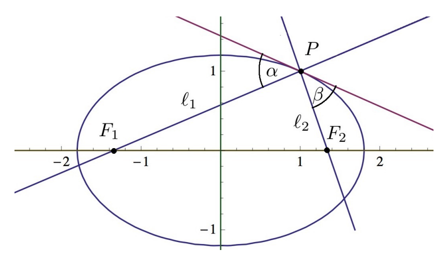
3. Encuentra la excentricidad, vértices, semi-ejes y ecuación de la elipse que pasa por $(0, 0)$ y con focos en $(2, 5), (4, 5)$. Dibuja la elipse.

4. Consideramos la elipse $4x^2 + 9y^2 = 13$.
   a) Encuentra los focos, vértices, semi-ejes y excentricidad de esta elipse. Dibuja la elipse.
   b) Encuentra una ecuación para la recta tangente a la elipse en el punto $P = (1, 1)$.
   Respuesta: $4x + 9y = 13$.

   Sugerencia: Escribe una ecuación para la recta tangente, usando su pendiente (desconocida) m. (*Respuesta*: $y = m(x - 1) + 1$.) Sus puntos de intersección con la elipse son las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas. Eliminando la variable y, obtienes una ecuación cuadrática para la x. Esta ecuación debe tener una sola solución, $x = 1$ (¿porqué?). Es posible en este punto imponer la condición $\Delta = 0$ sobre la discriminante, y esto da una ecuación para m, pero es complicada. Más fácil es hacer primero un combio de variable, $t = x - 1$. La ecuación cúadratica que se obtiene para t es fácil de resolver. Una solución es $t_1 = 0$, y la otra solución t_2 es una expresión en términos de m. Al imponer $t_2 = 0$ se obtiene una ecuación para m.

   c) Encuentra una ecuación para la recta tangente a la elipse en un punto $P = (x_0, y_0)$ de la elipse.
   Respuesta: $4x_0x + 9y_0y = 13$.

   d) Sean ℓ_1, ℓ_2 las rectas que pasan por $P = (1, 1)$ y los focos de la elipse. Encuentra los ángulos entre la recta tangente en P y las rectas ℓ_1, ℓ_2 (los ángulos α, β en el dibujo).



   e) (Opcional) Demuestra que si repetimos la construcción del inciso anterior para cualquier punto P de cualquier elipse, entonces $\alpha = \beta$. Esta es la propiedad óptica de la elipse: todos los rayos de luz que salen de F_1, al reflejarse por la elipse pasan por F_2.