Tarea núm. 9

(para el 30 marzo, 2017)

Consideremos una circunferencia C en el plano, con radio 1 y centro en el origen.

1. Encuentra una ecuación para C.
2. Encuentra una ecuación para la recta tangente a C en el punto $(3/5, 4/5)$.

   Respuesta. $3x + 4y = 5$.
3. Encuentra una ecuación para la recta tangente a C en el punto $P = (a, b)$.

   Respuesta. $ax + by = 1$.
4. Una recta ℓ intersecta a C en $(0, 1)$ y al eje de x en el punto $(t, 0)$. Encuentra las coordenadas (x, y) del otro punto de intersección de ℓ con C en términos de t.

   Respuesta: $x = 2t/(t^2 + 1)$, $y = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$.
5. Una *terna pitagórica* son 3 números naturales (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$. Por ejemplo $(3, 4, 5)$ es una terna pitagórica. Dada una terna pitagórica, es fácil producir otras, multiplicando a a, b, c for un factor comun. Por ejemplo, $(6, 8, 10)$ y $(9, 12, 15)$ son ternas pitagóricas. La terna es *primitiva* si a, b, c no tienen factor comun. Por ejemplo, la terna $(3, 4, 5)$ es primitiva. ¿Puedes encontrar otras ternas pitagóricas primitivas, más que $3, 4, 5$?

   Sugerencia: intenta con $a = 5$.
6. Ahora vamos a ver como podemos encontrar a *todas* las ternas pitagóricas (primitivas o no) con geometría analítica.
   a) Demuestra que si una terna (a, b, c) es pitagórica entonces el punto $P = (a/c, b/c)$ es un punto de C con coordeanas racionales.

   b) ¿Cuál es el punto de C que corresponde a las terna pitagórica $(3, 4, 5)$?
7. Ahora usamos el problema 4 para encontrar a *todas las ternas pitagóricas*. Suponemos que t es un número racional, o sea una fracción, $t = p/q$, donde p, q son dos enteros, $q \neq 0$. Usa el problema 4 para encontrar el punto de intersección de la recta que pasa por $(t, 0), (0, 1)$ con C en términos de p, q. Encuentra la terna pitagórica correspondiente en términos de p, q.

   Respuesta: $a = 2pq, b = p^2 - q^2, c = p^2 + q^2$.
8. ¿Las fórmulas del inciso anterior dan a todas las ternas pitagóricas? ¿Porqué?

   Sugerencia. Demuestra que si $P = (x, y)$ es un punto de C, y $(t, 0)$ es la intersección de la recta que pasa por $(0, 1)$ y P con el eje de x, entonces $t = x/(1 - y)$.
9. ¿Cuántas ternas pitagórica primitivas distintas existen con $0 < a \leq b \leq c < 50$? Haz una lista de todas.

   Sugerencia. Como $c = p^2 + q^2 < 50$, tomas $0 < q < p \leq 6$. Luego para que la terna sea primitiva, hay que tomar pares p, q sin factores comunes y de distinta paridad (uno par, el otro impar).