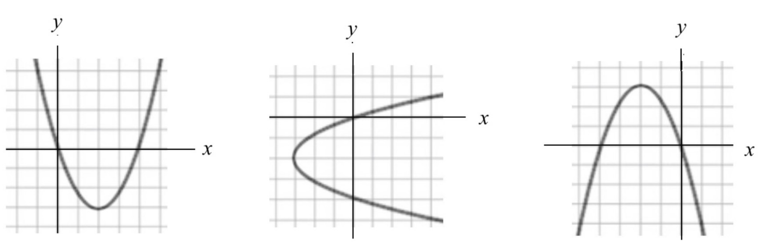
Guia para el examen final

1. Encuentra una ecuación para:
   a) La recta horizontal que pasa por $(-1, 3)$.
   b) La recta vertical que pasa por $(-1, 3)$.
   c) La recta que pasa por $(2, 0)$ y $(0, 3)$
   d) La recta que pasa por $(a, 0)$ y $(0, b)$ (a, b no son ambos 0)
   e) La recta que pasa por $(-1, 0)$ y paralela a $3x - 4y - 11 = 0$.
   f) La recta que pasa por el origen y perpendicular a $x + 5y - 6 = 0$.
   g) La recta con pendiente -1 que corta al eje y en $(0, 4)$.
   h) La recta con pendiente m que corta al eje y en $(0, b)$.
   i) Las rectas con pendiente -1 a distancia 1 del origen.
   j) La recta que pasa por los dos puntos de intersección de los círculos de radio 3 centrados en $(1, 1)$ y $(2, 3)$.
   k) El círculo con centro en $(1, 3)$ y que pasa por $(2, 0)$.
   l) El círculo que pasa por los tres puntos: $(5, 3), (6, 2)$ y $(3, -1)$.
   m) El círculo con diámetro el segmento con extremos $(4, 5), (-1, 3)$.
   n) El círculo que pasa por $(2, 1)$, $(3, 5)$ con centro sobre la recta $x + y = 0$.
   ñ) El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2, 1)$, $(3, 5)$ es 5. ¿Qué tipo de curva es?
   o) el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a $(4, 5), (-1, 3)$ es $3 : 4$. ¿Qué tipo de curva es?
   p) las parábolas mostrada en el dibujo (los cuadritos son de 1 por 1).



A B C

2. Encuentra
   a) La distancia entre las rectas $x + 2y = 3$ y $x + 2y = 4$.
   b) El vértice de la parábola $y^2 + 4y + 8x + 28 = 0$.
   c) Las asíntotas y focos de la hipérbola $y^2 - 2x^2 = 7$.

d) El radio de la circunferencia que pasa por $(3,0)$, $(1,2)$, $(-1,3)$.

e) La distancia entre los focos de una elipse cuyos ejes menor y mayor miden 3 y 4 respectivamente.

f) El área del triángulo con vértices $(3,1)$, $(-1,5)$, $(-2,-4)$.

g) El punto de intersección de las medianas del triángulo con vértices $(3,1)$, $(-1,5)$, $(-2,-4)$.

h) El 2ndo punto de intersección entre el círculo $x^2+y^2=1$ y la recta que pasa por $(0,1)$ y $(t,0)$.

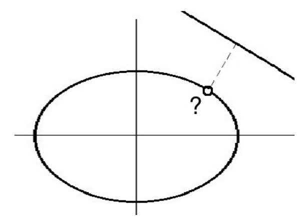
i) El centro del círculo inscrito dentro del triángulo con vértices $(1,3)$, $(-1,1)$ $(4,-2)$.

j) Una ecuación cuadrática para la elipse que tiene sus focos en $(-1,1)$, $(1,1)$ y que pasa por $(0,2)$.

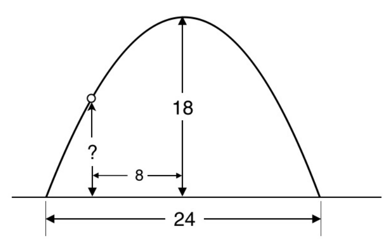
k) Los valores de c para los cuales la recta $x+2y=c$ intersecta la circunferencia $x^2+y^2=1$ en (i) 1 punto (ii) 2 puntos (iii) ningun punto.

l) la excentricidad de la elipse $3x^2+4y^2=48$.

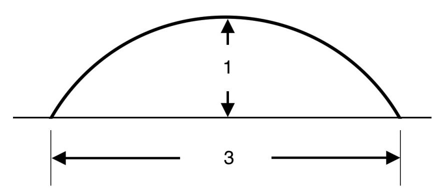
m) El punto más cercano de la elipse $x^2+2y^2=1$ a la recta $x+2y=10$.



n) La altura de un punto sobre un arco parabólico de 18 metros de altura y 24 metros de base, situado a 8 metros del centro del arco.

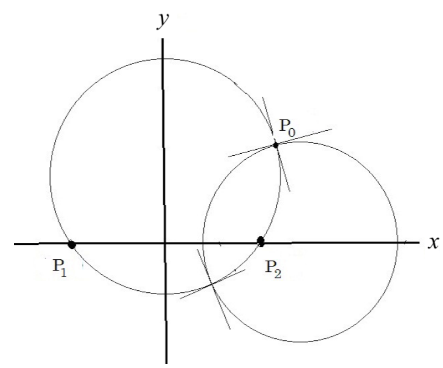


ñ) El radio del círculo necesario para formar un arco circular de 3m de ancho y 2m de altura.



3. Grafica la hipérbola $9x^2-16y^2=144$. Identifica en tu dibujo (poniendo sus coordenadas) los vértices y los focos. Grafica las asíntotas y escribe sus ecuaciones.

4. Dibuja en el plano con coordenadas b, c el lugar geométrico de los puntos (b, c) tal que la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene (i) 1 solución (ii) 2 soluciones (iii) ninguna solución.
5. Sean a, b, c tres constantes con $a \neq 0$. Encuentra el vértice, foco y directriz de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en términos de a, b, c.
6. Dos parábolas tienen su foco en el origin y sus vértices en $(1, 0)$ y $(-2, 0)$.
   a) Encuentra las ecuaciones de las parábolas y dibújalas.
   b) Encuentra sus puntos de intersección.
   c) Encuentra las pendientes de sus tangentes en cada uno de los puntos de intersección.
7. Una escalera de 3m está recargada sobre una pared (que podemos pensar como el eje y). Llama A al extremo superior (que siempre está sobre el eje y) y B al inferior (que siempre está sobre el eje x, en su lado positivo). Un punto P sobre la escalera a 1m de A traza una curva al tiempo que la escalera se desliza, siempre tocando los ejes. Escribe la ecuación que satisface esta curva. ¿Qué curva es?
8. (Opcional) Sean $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ y $P_0 = (a, b)$, con $b \neq 0$.
   a) Encuentra el centro, el radio y la ecuación del círculo que pasa por P_0, P_1, P_2.
   b) Encuentra el lugar geometrico de los puntos P en el plano tal que su razon de distancias a P_1 y P_2 sea lo mismo que para P_0. Es decir, $dist(P, P_1)/dist(P, P_2) = dist(P_0, P_1)/dist(P_0, P_2)$. Demuestra que este lugar geométrico es una circunferencia que pasa por P_0 y encuentra su centro, radio y ecuación.
   c) Demuestra que para cada uno de los dos puntos de intersección de las dos circunferencias de los dos incisos anteriores, las tangentes a las circunferencias son perpendiculares.



Nota: este ejercicio da un ejemplo de "círculos de Apolonio". Ver más sobre este bonito tema en `https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_circles`
(desafortunadamente la versión en español de este artículo no es sobre el mismo tema).