EXAMEN FINAL

TERCER CURSO DEL BACHILLERATO EN EL CIMAT

26 DE NOVIEMBRE DE 2013

Indicaciones. Algunas preguntas son de la forma "*¿Te acuerdas de, … ?*" No hay que demostrar nada. Solo queremos ver si *nos sabemos* (*¿Kimosabee?*) lo que creemos que es esencial. Si no recuerdan algo, no hay que preocuparse. Solo hay que seguir adelante. Obviamente no se necesita calculadora y no se vale sacar una en el examen.

1. Dibuja un triángulo rectángulo. Marca los vértices A, B y C, suponiendo que C sea el vértice del ángulo recto. Denota las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C por las letras a, b y c, respectivamente. Denota también los ángulos interiores a los vértices A y B con las letras griegas α y β. Para tu triángulo dibujado, responde a las siguientes preguntas:

(i) ¿Qué dice el teorema de Pitágoras?

(ii) ¿Cómo calculas $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$?

(iii) ¿Cuánto suman (medidos en radianes) los ángulos α y β?

(iv) ¿Observaste alguna relación interesante entre los senos y cosenos de los ángulos α y β?

(v) Calcula $\tan\alpha$ y $\tan\beta$

(vi) Suponiendo que la hipotenusa mide $c = 1$, ¿cuánto miden los lados a y b en términos del ángulo α, y cuánto miden en términos del ángulo β?

(vii) Cuando $c = 1$ y los lados a y b se expresan en términos del ángulo α, ¿cómo queda el teorema de Pitágoras?

2. Dibujar un círculo y suponer que su radio mide 1.

(i) Dibujar un arco central de ángulo α medido en radianes y describir qué es lo que *realmente* mide α unidades.

(ii) Ubicar sobre el círculo unitario el punto del plano cartesiano que tiene coordenadas $(\cos\alpha\,, \operatorname{sen}\alpha)$. Decir entonces cuánto valen seno y coseno de los arcos sobre el círculo unitario que miden, respectivamente, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ y 2π radianes.

(iii) Bosquejar la gráfica de la función $\alpha \mapsto \operatorname{sen}\alpha$, en el intervalo $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$.

(iv) Bosquejar la gráfica de la función $\alpha \mapsto \cos\alpha$, en el intervalo $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$.

3. A partir de un triángulo equilátero, produce dos triángulos rectángulos al trazar la altura desde cualquiera de sus lados al vértice opuesto (haz un dibujo).

(i) ¿Cuánto miden en radianes cada uno de los ángulos interiores de uno de los triángulos rectángulos obtenidos?

(ii) Calcula el seno, el coseno y la tangente de cada uno de los ángulos agudos en dicho triángulo.

Dibuja ahora un triángulo rectángulo que sea isósceles,

(iii) ¿Cuánto miden en radianes cada uno de los ángulos agudos interiores?

(iv) Calcula el seno, el coseno y la tangente de uno de esos ángulos.

4. Dibuja un triángulo arbitrario. Marca los vértices A, B y C y denota las longitudes de los lados opuestos a dichos vértices por las letras a, b y c, respectivamente. Denota los ángulos interiores a los vértices A, B y C con las letras griegas α, β y γ, respectivamente. Para tu triángulo dibujado, responde a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuánto suman los ángulos α, β y γ (medidos en radianes)?

(ii) ¿Recuerdas qué relaciones deben observarse entre las sumas de cualesquiera dos lados con respecto el otro? Si las recuerdas, escríbelas todas. (No hay que demostrar nada).

(iii) ¿Recuerdas qué dice la *Ley de los senos*?

(iv) ¿Recuerdas qué dice la *Ley de los cosenos*?

5. Demuestra (¡ahora sí!) la fórmula de Henón para calcular el área de un triángulo arbitrario como el que dibujaste en el problema **4**, pero hazlo usando las siguientes pistas y dando respuestas a cada una de ellas:

(i) La fórmula está dada, hasta una constante multiplicativa, por una raiz cuadrada.

(ii) La fórmula debe dar los resultados triviales esperados cuando se emplean triángulos completamente '*apachurrados*'.

(iii) La fórmula debe tener simetría con respecto a las longitudes de los lados.

(iv) La fórmula debe dar un resultado fácil y conocido para un triángulo fácil y conocido, pero no '*apachurrado*'.

6. Considerar una circunferencia de radio R. Considerar en dicho círculo un ángulo central α y la cuerda que éste define (hacer un dibujo). Nos dicen que esa cuerda es también uno de los lados de un triángulo cuyo vértice faltante está sobre la circunferencia (incluir en el dibujo). Hay un teorema que dice que el ángulo β, interior a dicho triángulo, en ese otro vértice que está sobre la circunferencia, puede calcularse fácilmente en términos de α.

(i) ¿Qué tienen que ver α y β? (¡Ojo! ¡No se pide demostrar nada!).

(ii) ¿Recuerdas alguna propiedad interesante del ángulo interior formado en ese otro vértice sobre la circunferencia? (¡No hay que demostrar nada!).

(iii) Al mover el vértice sobre la circunferencia, hay un lugar en el que uno de los lados del triángulo coincide con el diámetro (hacer un dibujo nuevo). Calcular el seno del ángulo en términos de la longitud de la cuerda del arco central y del diámetro.

7.(i) Escribe los resultados que se obtienen de las *fórmulas de adición* para $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$ y $\cos(\alpha \pm \beta)$.

7.(ii) Calcula $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \pm \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y expresa el resultado final en términos de las variables $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = \alpha - \beta$.

7.(iii) Calcula $\cos(\alpha+\beta) \pm \cos(\alpha-\beta)$ y expresa el resultado final en términos de las variables $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = \alpha - \beta$.

8. Empleando lo que creas conveniente, determinaa $\cos(15^\circ)$ y $\operatorname{sen}(15^\circ)$.

9. Si $\operatorname{sen}\alpha = -3/15$, ¿en qué cuadrante termina α y cuáles son los posibles valores para $\cos\alpha$?

10. Demostrar que $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$.