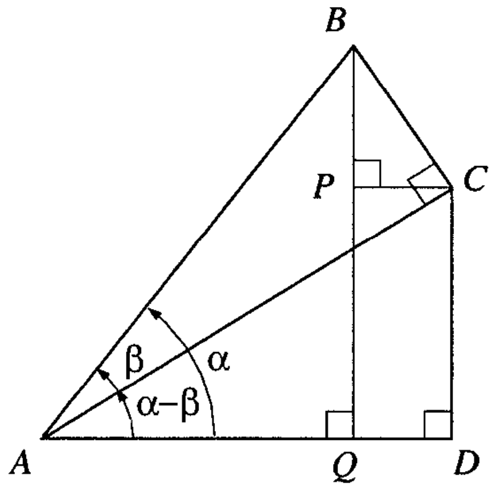
Tarea 6 para el tercer curso del bachillerato en el CIMAT
Fecha de entrega: **miércoles** 9 de octubre de 2013

1. Usar la figura que se muestra para deducir las fórmulas,

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta\,,$$

suponiendo que α, β y $\alpha-\beta$ son ángulos agudos.



2. Si $\alpha = \beta = \pi/6$, determinar $\operatorname{sen}(\pi/3)$ y $\cos(\pi/3)$ usando las fórmulas de adición para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.

3. Si $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$ y $\operatorname{sen}\beta = 5/13$, ¿qué valores se obtienen para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$?

4. Demostrar que, $\operatorname{sen}(75°) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, y que $\cos(75°) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Encontrar expresiones similares para $\operatorname{sen}(15°)$ y $\cos(15°)$. Explicar las coincidencias.

5. Demostrar que,

$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\,, \qquad \text{y} \qquad \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\,.$$

6. Sin calculadora, determinar el valor de $\operatorname{sen}(12°)\cos(18°) + \cos(12°)\operatorname{sen}(18°)$, y el valor de $\cos(12°)\cos(18°) - \operatorname{sen}(12°)\operatorname{sen}(18°)$. Usando los resultados obtenidos, despejar a $\operatorname{sen}(12°)$ y $\cos(12°)$ en términos de $\operatorname{sen}(18°)$ y $\cos(18°)$.

7. Usando las fórmulas de adición para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$, despejar a $\operatorname{sen}\alpha$ y a $\cos\alpha$, en términos de $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$. Usando el resultado, dar otra demostración de las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha'-\beta')$ y $\cos(\alpha'-\beta')$.

8. Sin calculadora, determinar el valor de $\operatorname{sen}(113^\circ)\cos(307^\circ)+\cos(113^\circ)\operatorname{sen}(307^\circ)$ y explicar el por qué del resultado.

9. Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos2\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos2\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha$$
$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\tan\alpha\tan\beta$$
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

10. La rueda trasera de una bici tiene un radio igual a dos unidades, y la bici se mueve a lo largo de una carretera recta. La rueda trasera tiene adems una mancha fresca de pintura azul y cada vez que esa mancha toca el suelo, se queda pintada una marca azul.

(1) ¿Qué tan alejadas entre sí están las marcas azules en el suelo?

(2) ¿Qué ángulo giró la rueda alrededor de su eje desde que dej la primera marca azul en el suelo hasta la siguiente?

(3) Supponer que, sobre el suelo, cada seis unidades, hay una marca roja. Suponer que la primera marca azul que deja la bici coincide con la primera marca roja. ¿Coincidirán otra vez una de las marcas azules con alguna de las marcas rojas? ¿Por qué?

(4) Suponer nuevamente que la primera marca azul que deja la bici coincide con la primera marca roja. A partir de ese punto, la bici completa 50 vueltas de su rueda trasera. ¿Entre qué y qué marcas rojas ha quedado la marca azul número 50?

11. Considerar un reloj de manecillas. ¿Qué ángulo forman las manecillas cuando son las H horas ($0 \leq H < 12$) con M minutos ($0 \leq M < 59$)? ¿Cuántas veces se encontrarán las manecillas formando un ´ngulo recto entre ellas? ¿Puede determinarse en qué horas y minutos ocurren los ángulos rectos?