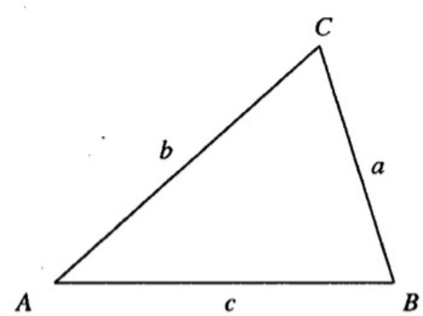
PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

(Traducido del libro de Israel M. Gelfand & Mark Saul, "Trigonometry")

Cap. 3: relaciones en un triángulo

Notas:
*1. Los ejercicios marcados con * están resueltos en el libro.*
2. Los problemas se resuelven sin calculadora, a menos que se indica explicitamente lo contrario.

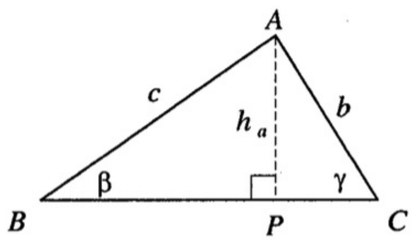
3.1.



La tabla abajo da algunos conjuntos de datos de un triángulo. Por ejemplo, "ABa" significa que están dados dos ángulos (A y B) y el lado opuesto a uno de ellos (el lado a). Algunos de los casos en la tabla son de hecho duplicados de otros. "Restricciones"se refiere a que los datos deben ser restringidos de algun modo para poder determinar un triángulo. Por ejemplo, en "AbC", es claro que se debe restringir a los ángulos A y C por la desigualdad $A + C < 180^0$.

	Datos	¿Determina un triángulo?	¿Restricciones?
1	ABa		
2	ABb		
3	ABc		
4	AbC		
5	ABC		
6	Abc		
7	Bbc		
8	Cbc		

3.2.



Dibujando diagramas que muestran las alturas h_b y h_c (similares al diagrama arriba mostrando h_a), demuestra las siguientes formulas:

$$h_b = c \sin \alpha = a \operatorname{sen} \gamma,$$
$$h_c = b \sin \alpha = a \operatorname{sen} \beta.$$

3.3. En el triángulo del problema anterior, $\alpha = 70^0$ y $b = 12$. Encuentra h_c.

3.4. Verfica que las expresiones

$$h_a = c \sin \beta = b \operatorname{sen} \gamma,$$
$$h_b = c \sin \alpha = a \operatorname{sen} \gamma,$$
$$h_c = b \sin \alpha = a \operatorname{sen} \beta.$$

(válidas para cualquier triángulo) en caso de un triángulo rectángulo.

3.5. En el $\triangle PQR$, $p = 10$, $q = 12$ y $\angle PRQ = 30^0$. Encuentra su área.

3.6. Verifica que con la regla "el seno de un ángulo obtuso es igual al seno de su complemento" ($\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^0 - \alpha)$), las 3 expresiones del problema anterior para h_a, h_b, h_c siguen siendo válidas para un triángulo obtuso.

3.7. Verifica que sustituciones cíclicas en

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

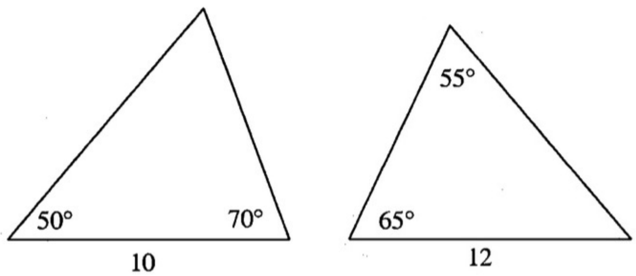
produce la Ley de Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Nota: susticución cíclica significa $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$, $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$.

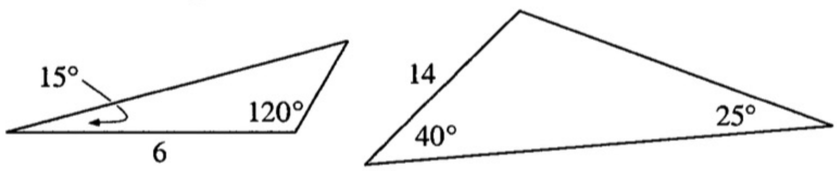
3.8. Verifica la Ley de senos para un triángulo 30-60-90.

3.9. Usa la Ley de Senos en los triángulo abajo para determinar las longitudes de los lados faltantes (usa una calculadora).

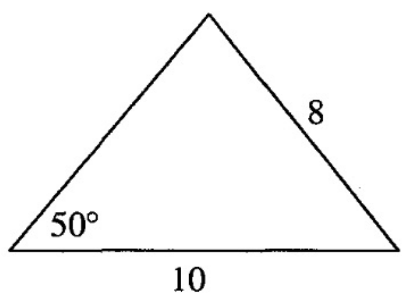


3.10. Demuestra que con la regla "el seno de un ángulo obtuso es igual al seno de su complemento" ($\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^0 - \alpha)$), la Ley de Senos es válida para un triángulo obtuso.

3.11. Usa la Ley de Senos en los triángulo abajo para determinar las longitudes de los lados faltantes (usa una calculadora).



3.12. Usa la Ley de Senos para encontrar los ángulos del triángulo siguiente:



3.13. Recuerda que LLA no garantiza congruencia. Es decir, si en dos triángulos coinciden dos de sus lados y un ángulo que no está entre los dos lados, los triángulos no necesariamente son congruentes. Ahora mira el problema anterior. ¿La información dada determina el triángulo? ¿Cuántas posibilidades hay para las medidas de los ángulos del triángulo?

3.14. Demuestra: si el $\triangle ABC$ está inscrito en un círculo de radio R, entonces

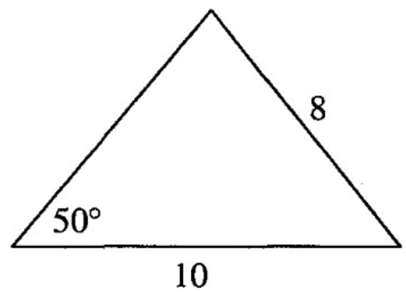
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R.$$

3.15. Encuentra el circumradio de un triángulo en donde un ángulo de 30^0 se encuentra en frente de un lado de 10 unidades. Nota que esta información no determina el triángulo.

3.16. Encuentra el cirumradio de un triangulo 30-60-90 con hipotenusa que mide 8 unidades. ¿Necesitas la Ley de Senos para responder esta pregunta?

3.17. Encuentra el área de un triángulo en donde 2 de sus lados miden 8 y 11 unidades, y el ángulo entre ellos es de 40^0.

3.18. Encuentra el área de los siguientes triángulos:



¿Puedes usar la fórmula $S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta$? ¿Es necesario usar esta fórmula?

3.19. El área de $\triangle ABC$ es 40, $AB = 6$ y $\angle A = 40^0$. Encuentra AC.

3.20. En el $\triangle PQR$, los lados $PQ = 5, PR = 6$ y el área es 9. Encuentra la medido del ángulo P (en grados).

Nota: Hay dos respuestas posibles. ¿Puedes encontrarlas ambas?

3.21. Dos de los lados de un triángulo son a y b. ¿Cuál es el máximo área que el triángulo puede tener? ¿Que forma tiene el triángulo con el máximo área.

Respuesta: el máximo área es $ab/2$, alcanzado cuando el ángulo entre los dos lados es 90^0.

Reto: Hay otro triángulo rectángulo con lados a, b. Encuentra este triángulo y su área.

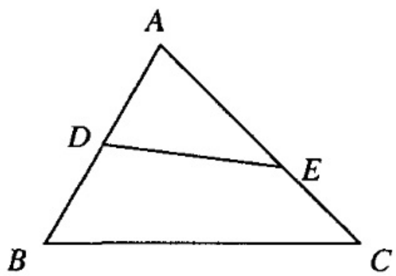
3.22. La longitud de unos de los lados de un triángulo isosceles es x. Expresa en términos de x el máximo área que el triángulo puede tener.

3.23. Demuestra que área de un paralelogramo es $ab \sin C$, donde a, b son las medidas de dos lados adyacentes y C es uno de los ángulos. ¿Importa qué ángulo escogimos para C?

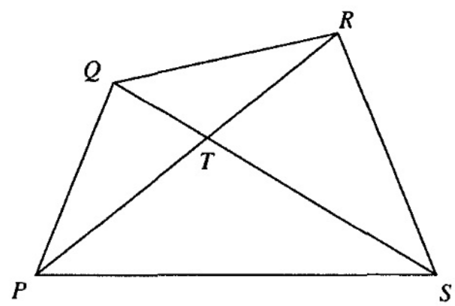
3.24. Empezamos con cualquier cuadrilátero cuyos diagonales se encuentran dentro de la figura. Demuestra que el área del cuadrilatero es la mitad del producto (multiplicación) de los diagonales por el seno del ángulo formado entre los diagonales. ¿Debemos tomar el ángulo agudo formado por los diagonales o el obtuso?

3.25. Demuestra que podemos usar la misma fórmula del problema anterior para obtener el área de un cuadrilátero cuyos diagonales (al extenderlos) se intersectan fuera de la figura.

3.26. En la figura abajo, $AD = 4, AE = 6$, $AB = 8$, $AC = 10$. Encunetra la razon de los áreas del $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$.



3.27. * En el cuadrilátero $PQRS$, los diagonales PR y QS se intersectan en el punto T. La suma de los áreas de $\triangle PQT$ y $\triangle RST$ es igual a la suma de los áreas de $\triangle PST$ y $\triangle QRT$. Demuestra que T es el punto medio de (por lo menos) uno de los diagonales del cuadrilátero.



3.28. En un cuadrilátero $ABCD$, los diagonales AC y BD se intersectan en P. Demuestra que

$$|APB| \cdot |CPD| = |BCD| \cdot DPA$$

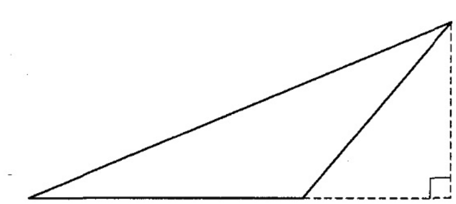
(la notación $|APB|$ significa el área del $\triangle APB$). ¿La fórmula sigue siendo cierta si los diagonales se intersectan fuera del cuadrilátero?

3.29. Demuestra que en un triángulo agudo ABC, $c = a \cos B + b \cos A$.

Sugerencia: dibuja la altitud h_c. ¿Como debemos cambiar esta fórumula si el ángulo A o B es obtuso?

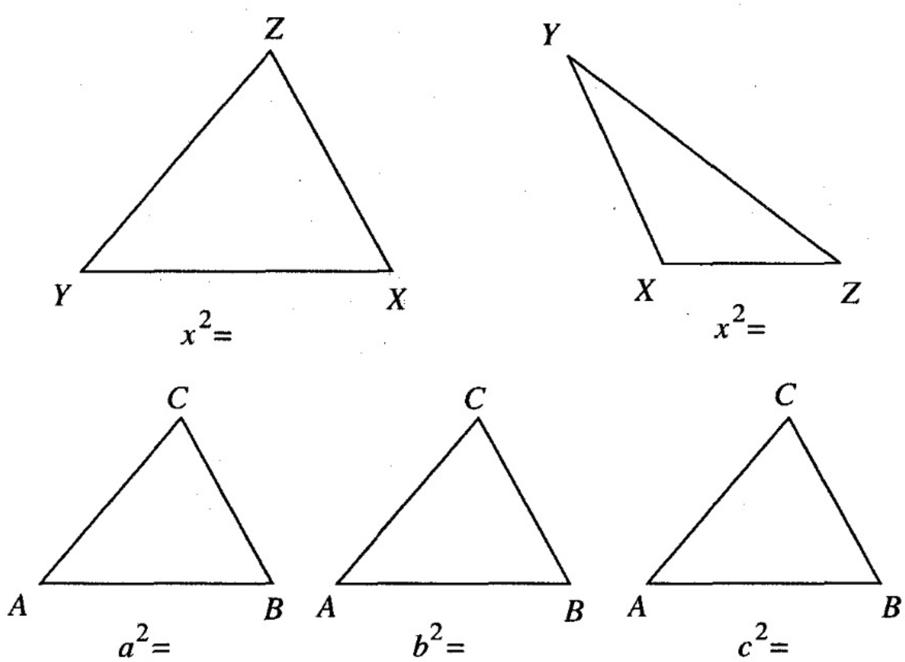
3.30. Demuestra que si b es el lado opuesto a un ángulo obtuso de un triángulo, entonces $b^2 = a^1 + c^2 + 2ac \cos B'$, donde B' es la medida del sumplemento del ángulo obtuso B.

Sugerencia: usa el diagrama abajo.



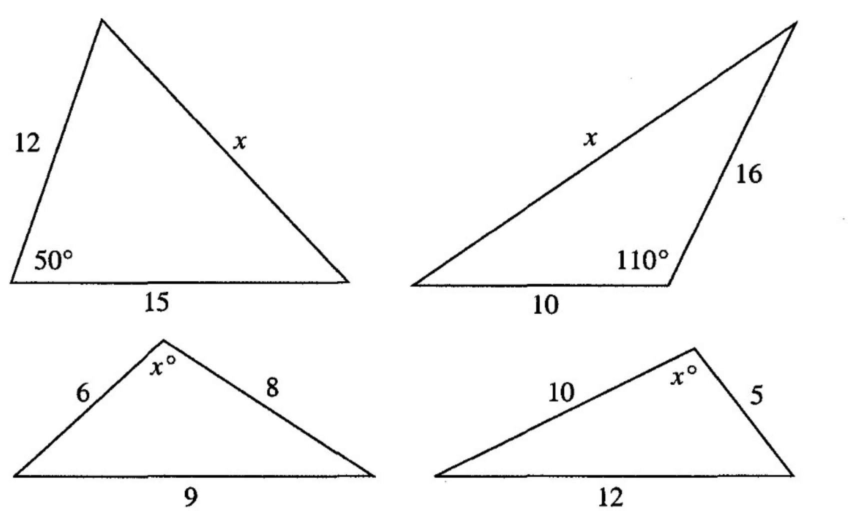
3.31. Verifica que la Ley de Cosenos, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ es correcta si B es un ángulo agudo, recto o obtuso.

3.32. En cada uno de los triángulo abajo, usa la Ley de Cosenos para expresar el cuadrado del lado indicado en términos de los otros lados y el ángulo entre ellos.



3.33. Sabemos que un triángulo está determinado por LAL (la longitud de dos lados el ángulo entre ellos). Explica cómo la Ley de Coseno nos permite calcular los otros 3 elementos del triángulo (un lado y dos ángulo) dado por LAL,

3.34. Encuentra cada lado marcado por x en los siguientes dibujos:



3.35. En $\triangle ABC$, $AB = 10, AC = 7$ y $BC = 6$. Encuentra los ángulos del triángulo.

3.36. Pedro está intentando resolver el siguiente problema:

> Un paralelogramo tiene lados que miden 3 y 12. Encuentra la suma de los cuadrados de los diagonales.

Pero Pedro nisiquiera sabe como dibujar el diagrama. Sabe que lados opuestos en un paralelogramo miden los mismo, así que sabe donde poner los números 3 y 12. Pero no sabe qué tipo de paralelogramo debe dibujar. Entonces dibujo un rectángulo (lo cual supo que es una especie de paralelogramo). Luego dibujo un paralelogramo con un ángulo de 30^0, y otro de 60^0. Pero no supo cuál debería usar en el problema.

¿Puedes ayudar a Pedro?

3.37. Muestra que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los diagonales.

3.38. En el $\triangle ABC$, AM es la mediana a la arista BC. Demuestra que $4(AM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AC)^2 - (BC)^2$.

Sugerencia: el diagrama para este problema es "la mitad"del diagrama del problema anterior.

3.39. Demuestra que la suma de los cuadrados de los tres medianos de un triángulo es 3/4 de la suma de los cuadrados de sus lados.

3.40. Los diagonales del cuadrilátero $ABCD$ intersectan dentro de la figura. Demuestra que la suma de los cuadrados de los lados del cuadrilátero es igual a la suma de los cuadrados del los diagonales, más 4 veces la longitud de la línea que conecta los puntos medios de los diagonales (nota que esto es una generalización del problema 3.36).

3.41. En $\triangle ABC$, el $\angle C = 60^0$, $a = 1$ y $b = 4$. Encuentra c.

3.42. En $\triangle ABC$, el $\angle C = 60^0$. Demuestra que $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. ¿Cuál es el resultado correspondiente si $\angle C = 120^0$?

3.43. Tres jinetes empiezan en un punto X y viajan a lo largo de 3 caminos distintos, formando ángulo de 120^0 en X. El primer jinete viaja a 60 kmh (=kilómetros por hora), el segundo 40 kmh y el tercero a 20 kmh. ¿A qué distancia se encuentran uno del otro después de 1 hora? ¿Después de 2 horas?