Notas de la clase de 20 abril, 2016

- **Como resolver una ecuación diferencial y usar los resultados para hacer una animacion.** Resolvemos la ecuación diferencial que modela un resorte (la ley de Hook, problema 2c de tarea 10):

$$m\ddot{x} = -kx,$$

con $k, m > 0$, para una función $x(t)$ que satiface $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ (las condiciones iniciales).

Primero, cambiamos variables: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, así que la ecuación $m\ddot{x} = -kx$ es equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(k/m)x_1 \end{bmatrix},$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_0, x_2(0) = v_0$ (dos ecuaciones de primer orden en lugar de una ecuación de 2ndo orden). Aquí está el código

```
clear;clf
m=1;k=2;                        % mass and spring constante
x0=1;v0=0;                      % initial conditions
F=@(t,x) [x(2); -(k/m)*x(1)]    % Newton's equation for the spring
duration=10;                    % duration of the animation
fps=25;                         % frames per second
nframes=duration*fps;           % total number of frames
range=2;                        % plotting range

sol=ode45(F,[0 duration],[x0 v0]);
t=linspace(0,duration,nframes);
x=deval(sol,t,1);

p=plot([0 0],[0 0],'MarkerSize',30,'Marker','.','LineWidth',2);  % initial frame
axis([-range range -range range]);axis square;
for i=1:nframes
  p.XData = [0 x(i)];
  drawnow;
  pause(1/fps)
end
```

- **Agregando fricción.** La ecuación differencial cambia a

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x},$$

donde $f > 0$ es la *coeficiente de fricción*. Así que lo único que cambiamos en el código anterior es en lugar de la 4ta línea ponemos la siguientes 2 líneas:

```
f=0.5;                                 % friction coefficient
F=@(t,x) [x(2); -(k/m)*x(1)-f*x(2)]    % Newton's equation for the spring with friction
```

- **Resorte en el plano.** Las ecuaciones diferenciales son

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx, \\ m\ddot{y} = -ky, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0, x(0) = \dot{x}_0, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Nota como agregamos en el código una curva que traza la trayectoria de la masa en el plano. Las trayectorias son elipses, centradas en el origen $(0, 0)$.

```
clear;clf
x0=1;dx0=0;y0=1;dy0=-2;
k=10;m=2;
F=@(t,x) [x(2);-(k/m)*x(1);x(4);-(k/m)*x(3)] % Hook's law in 2D

duration=5;fps=25;
nframes=duration*fps;
range=2;

sol=ode45(F,[0 duration], [x0 dx0 y0 dy0]);
t = linspace(0,duration,fps*duration);
x = deval(sol,t,1);
y = deval(sol,t,3);

p=plot(0,0,'MarkerSize',30,'Marker','.','LineWidth',2);
axis([-range range -range range]);
axis square;
trace = animatedline('Color','r');  % trace the particle trajectory

for i=1:length(t)
  p.XData = [0 x(i)];
  p.YData = [0 y(i)];
  addpoints(trace,x(i),y(i)); % update trajectory
  drawnow;
  pause(1/fps)
end
```

- **Un planeta alrededor del sol** (Kepler). Las ecuaciones de movimineto son

$$\ddot{\mathbf{r}} = -C\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{donde } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

y donde $C > 0$ es una constante determinada por la masa del cuerpo atractor ($C \approx 13.3 \cdot 10^{19}\ m^3/s^2$ para el sol). Así que lo único que cambiamos en el código anterior es la definicion de la F:

```
C=1;
F=@(t,x) [x(2);-C*x(1)/(x(1)^2+x(3)^2)^(3/2);x(4);-C*x(3)/(x(1)^2+x(3)^2)^(3/2)]
```

- **El péndulo.** La ecuación para un péndulo de longitud ℓ es

$$\ddot{\alpha} = -(g/\ell)\sin\alpha,$$

donde $g \approx 9.81$ y α es el ángulo que forma el péndulo con la dirección vertical.

```
clear; clf;
g=9.81;l=1;a0=pi/2;da0=0;
F=@(t,a) [a(2);-(g/l)*sin(a(1))];
duration=5;fps=25;nframes=duration*fps;
range=2;

sol=ode45(F,[0 duration],[a0 da0]);
t = linspace(0,duration,nframes);
a=deval(sol,t,1);
x=l*sin(a); y=-l*cos(a);

p=plot(0,0,'MarkerSize',30,'Marker','.','LineWidth',2);
axis([-range range -range range]); axis square;

for i=1:length(a)-1
    p.XData=[0,x(i)];
    p.YData=[0,y(i)];
    drawnow;
    pause(1/fps);
end
```

- **La velocidad de escape de la superficie de la tierra** (problema 4 de la tarea 1). Es difícil determinar directamente esta velocidad con la computadora. Muestro aquí como llegar a la fórmula de la velocidad de escape usando la Ley de Conservación de Energia para las soluciones de la ecuación de Newton (también doy justificación matemática de esta ley). Esto se encuentra también en muchos textos de física y en el artículo de Wikpedia.

  Empezamos con la ecuación de Newton para la distancia $y(t)$ al centro de la tierra de un objeto lanzado vérticalmente de sde la superficie de la tierra:
$$\ddot{y} = -C/y^2.$$
  Haciendo el cambio de variable $y = h + R$, donde h es la altura arriba de la superficie de la tierra y R es el radio de la tierra, obtenemos la ecuación
$$\ddot{h} = -C/(R + h)^2.$$
  Para $h = 0$ (en la superficie de la tierra), $\ddot{h} = -g \approx -9.81$, así que $C = gR^2$ y obtenemos la ecuación
$$\ddot{h} = -g/(1 + h/R)^2. \qquad (*)$$
  (la que apareció en problema 4 de la tarea 10).

  Ahora consideramos cualquier solución $h(t)$ de esta ecuación (no vamos a escribir una fórmula explicita para $h(t)$, pero de todos modos la podemos "considerar") y definimos, en cada momento t, las siguientes 3 cantitades:
$$T = \frac{1}{2}\dot{h}(t)^2, \qquad V = -gR/(1 + h(t)/R), \qquad E = T + V$$
  (la energia cinética, la potencial y la total). Nota que V fue escogida para que satifaga $-V'(h) = F$, donde $F = -g/(1 + h/R)^2$ es el lado derecho la ecuacion $(*)$.

  Teorema (la Ley de Conservación de Energía). *Si $h(t)$ satiface la ecuacion $(*)$, entonces la E no depende de t.*

  Demostración. Usamos la regla de la cadena para demostrar que $dE/dt = 0$:
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial h}\dot{h} + \frac{\partial E}{\partial \dot{h}}\ddot{h} = \frac{dV}{dh}\dot{h} + \dot{h}\ddot{h} = \dot{h}(-F + \ddot{h}) = 0.$$

donde en la última igualdad usamos el hecho que $h(t)$ satiface $(*)$, i.e. $h'' = F$. $\square$

Nota. Esta demostración funciona para toda ecuacion tipo $\ddot{y} = F$, donde F depende solamente de la y, así que se puede encontrar una $V(y)$ tal que $F = -V'(y)$ y l demostración de arriba funciona. Si un sistema tiene fricción, entonces F depende tambien de $\dot{y}$, y entonces no podemos definir la V. Otra complicación es cuando la F depende de t. En estos casos no tenemos de la Ley de Conservación de Energía.

Ahora, un objeto logra escapar si $h \to \infty$ (h tiende al infinito) cuando $t \to \infty$. Como $T \geq 0$, $V \leq 0$ y $V \to 0$ cuando $h \to \infty$, tenemos que la condición para escapar es $E \geq 0$. Ahora calculamos E al momento de lanzarse, con $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = v_0$,

$$E = T + V = \frac{1}{2}(\dot{h}(0))^2 - gR/(1 + h(0)/R) = \frac{1}{2}(v_0)^2 - gR.$$

Así que $E \geq 0$ es equivalente a $(v_0)^2 \geq 2gR$, o en otras palabras, la condición de escape es

$$v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6.8 \cdot 10^6} \approx 11.2 \cdot 10^3 \ m/s.$$

Esto es, más de 11 km/s, bastante rápido... Para comparación, la velocidad inicial típica de una bala, disparada por un rifle, es menos de 0.5 km/s (llega hasta 1.7 km/s para unos cañones).

- **Referencia.** Un texto muy bueno para cualquier tema de física son los famosos Feynman Lectures on Physics.