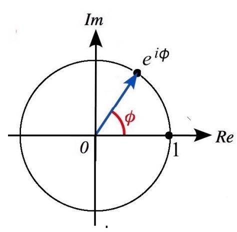
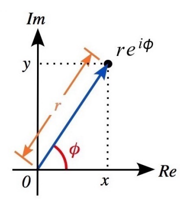
Notas de la clase de 25 mayo, 2016

- **Números complejos.** Un número complejo es una expresión $z = x + iy$, donde x, y son números reales, llamados la parte *real* e *imaginaria* de z; $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Los números reales son son los complejos con $y = 0$, los imaginarios con $x = 0$ (como i). El número complejo $x + iy$ lo representamos por un punto en el plano con coordenadas (x, y). Así que $1 + i \leftrightarrow (1, 1)$, $i \leftrightarrow (0, 1)$, $-4 \leftrightarrow (-4, 0)$, etc. Según la *fórmula de Euler*, $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, representado por un punto del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, que se obtiene al girar una "manecilla" por un ángulo ϕ, empezando en $(1, 0)$ (se gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj si $\phi > 0$, con las manecillas si $\phi < 0$.) Así que $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, etc. Un número complejo general se puede expresar en "forma polar", $x + iy = re^{i\phi}$, donde $r \geq 0$, $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ (ϕ siempre en radianes!). Por ejemplo, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.





La suma de números complejos se define de manera obvia, y la multiplicación con la única regla adicional: $i^2 = -1$. Por ejemplo, $(1+2i)+(-3+5i) = -2+7i$, $(3-2i)^2 = 9-12i+(2i)^2 = 5-12i$. Es más fácil multiplicar número complejos en forma polar: $\left(r_1e^{i\phi_1}\right)\left(r_2e^{i\phi_2}\right) = r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$. Por ejemplo: $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{i10\pi/4} = 2^5e^{i(2+1/2)\pi} = 2^5e^{i2\pi}e^{i\pi/2} = 32e^{i\pi/2} = 32i$.

Espirales. Tomamos un número complejo $z = re^{i\phi}$ y obervamos sus potencias,

$$z^0 = 1,\ z = re^{i\phi},\ z^2 = r^2e^{i2\phi}, \ldots, z^n = r^ne^{in\phi}.$$

Se forma, para ϕ pequeño, una especie de espiral. Si ϕ es muy pequeña ($\phi \to 0$) y tomamos muchos puntos ($n \to \infty$) se forma una curva suave llamada una *espiral logaritmica* (ver el artículo de Wikipedia). Para algunos z con ϕ grande se forma un patron muy interesante. Por ejemplo, $z = .99e^{i\pi(\sqrt{5}-1)}$. Aquí está el código que usamos en la clase para explorar las espirales.

```
clc;clear all;close all;
r=.99; ang=pi*(sqrt(5)-1);
z=*exp(1i*ang);
Z=z.^(0:100);

% ajustar la ventanilla de plot (opcional)
figure('units','normalized','position',[.5 .3 .5 .7]);

hold on
plot(Z,'o')
plot(Z)

plot([-1.2 1.2], [0 0],[0 0], [-1.2 1.2]) % ejes de coordenadas y
plot(exp(1i.*(0:.1:2.1*pi)))              % el circulo unitario como referencia
axis equal;
```

- **El conjunto de Mandelbrot.** Para cada número complejo c consideramos la suceción de puntos, $z_0 = 0, z_1 = c, z_2 = (z_1)^2 + c, z_3 = (z_2)^2 + c, \ldots$ etc. (nota: en la clase hemos usado w en lugar de $c\ldots$). Para unos c, la suceción de las z's "se escapa al inifnito"(por ejemplo para $c = 1$) y para otros se mantiene acotada (como para $c = 0$ ó $c = i$). El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de los números complejos c para los cuales la sucesión $z_0 = 0, z_1 = c, z_2 = (z_1)^2, \ldots$ se mantiene acotada. En el código, escogemos un rango (cuadrado) en el plano de las c's, y calculamos para cada punto c en este rango el "tiempo"que le toma a la sucesión de las z's para "escapar"; digamos, el primer n tal que $|z_n| > 10$ (se puede cambiar esto otro criterio, como $|z_n| > 2$). Esta información se guarda en la matriz T. Luego, si la sucecíon de los z's se queda dentro de $|z| < 10$ durante los primeros digamos 50 términos, suponemos que el c está en el conjunto de Mandelbrot y el valor correspondiente de la T queda 0. Después, usamos la información de la T para colorear una imagen (se puede cambiar tambien el esquema de coloración). Se genera una imagen muy complicada e bella.

```
clc;clear;close all;
res=1000;
x=linspace(-2,1,res);
y=linspace(-1.5,1.5,res);
[X, Y]=meshgrid(x,y);
C=X+1i*Y;
Z=0*C;
T=0*C;
for n=1:50
    Z(~T)=Z(~T).^2+C(~T); % update only the values of Z  for which T is still 0.
    T(abs(Z)>10 & ~T)=n;  % update only the values of T for which Z has escaped.
end

figure('units','normalized','position',[.3 .2 .7 .9]);% ajustar la ventanilla de plot (opcional)
imagesc(T);
axis('square','equal','off');
```

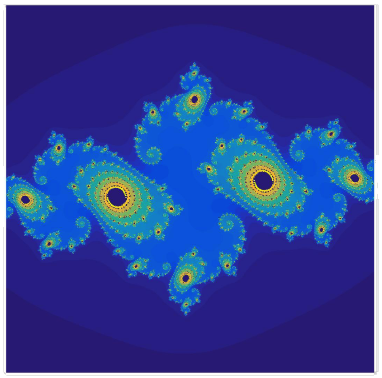
Tarea núm. 15

1. Escriba una función `mb_zoom(x,y,L,res)` que genera una "vista"del conjunto de Mandelbrot, en un cuadrado centrado en `[x,y]`, de lado `L` y con resolución `res`. Usa esta función para explorar distintas regiones del conjunto de Mandelbrot.

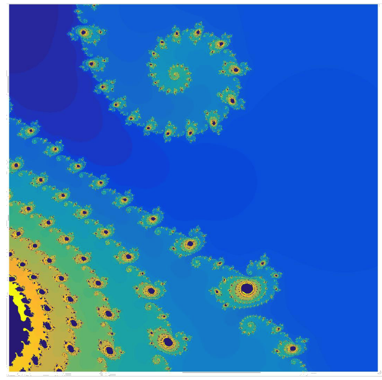
2. Para cada par de números complejos c, z_0, consideramos la suceción de números complejos

$$z_0,\ z_1 = (z_0)^2 + c,\ z_2 = (z_1)^2 + c,\ z_3 = (z_2)^2 + c, \ldots$$

   El *conjunto de Julia* asociado con c es el conjunto de los z_0 tal que la sucesión "no se escapa"(digamos $|z_n| < 10$). Escirba una función `julia(c,x,y,L)` que genera una "vista" del conjunto de Julia asociado con c, en un cuadrado centrado en `[x,y]`, de lado `L` y con resolución `res`. Aquí están por ejemplo dos imagenes generadas con $c = -0.75 + 0.11i$,



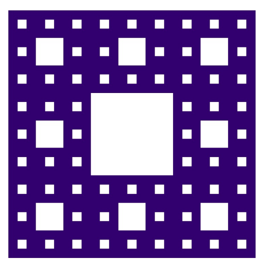
`julia(-0.75+0.11*1i,0,0,2.5,1000)`



`julia(-0.75+0.11*1i,-1,0,.2,1000)`

Sugerencia: el programa que usé para generar estos imagenes es muy similar al programa que genera el conjunto de Mandelbrot. Pero aquí la matriz Z no empieza con puros 0's sino se genera con `meshgrid`. Cada entrada de la matriz T registra la iteración n para la cual la entrada correspondiente de la matriz Z ha salido del rango $|z| < 10$ (o se queda 0 si la entrada de la Z no ha salido de $|z| < 10$). En el articulo de Wikipedia de Julia Set hay otros valores interesantes de c.

3. La *Alfombra de Sierpinski* es un fractal que se construye así: se empieza con un cuadrado A_0. Se divide en 9 cuadrados (como el tablero de gato) y se le quita en cuadrado del centro. Lo que queda es la alfombra A_1, hecha de 8 cuadrados. A cada uno de los 8 cuadrados de A_1 se vuelve hacer los mismo: se divide en 9 cuadritos, y se le quita el cuadrado del centro. Lo que queda es A_2. Si iteramos este proceso n veces obtenemos la n-esima alfombra A_n. Si lo repitimos infinidad de veces se obtiene la Alfombra de Sierpinski A. Aquí está una imagen de A_3



Escribir una funcion `alfombra(n,m)` que produce una imagen de A_n, cuyo lado mide 3^m pixeles.

Sugerencia. Tu función debe producir una matriz A de 0's y 1's, de tamaño $3^m \times 3^m$. Luego, para convertir esta matriz en imagen puedes usar el comando `imshow(A)`. En esta imagen 0 se repesenta por un pixel negro, 1 por blanco.