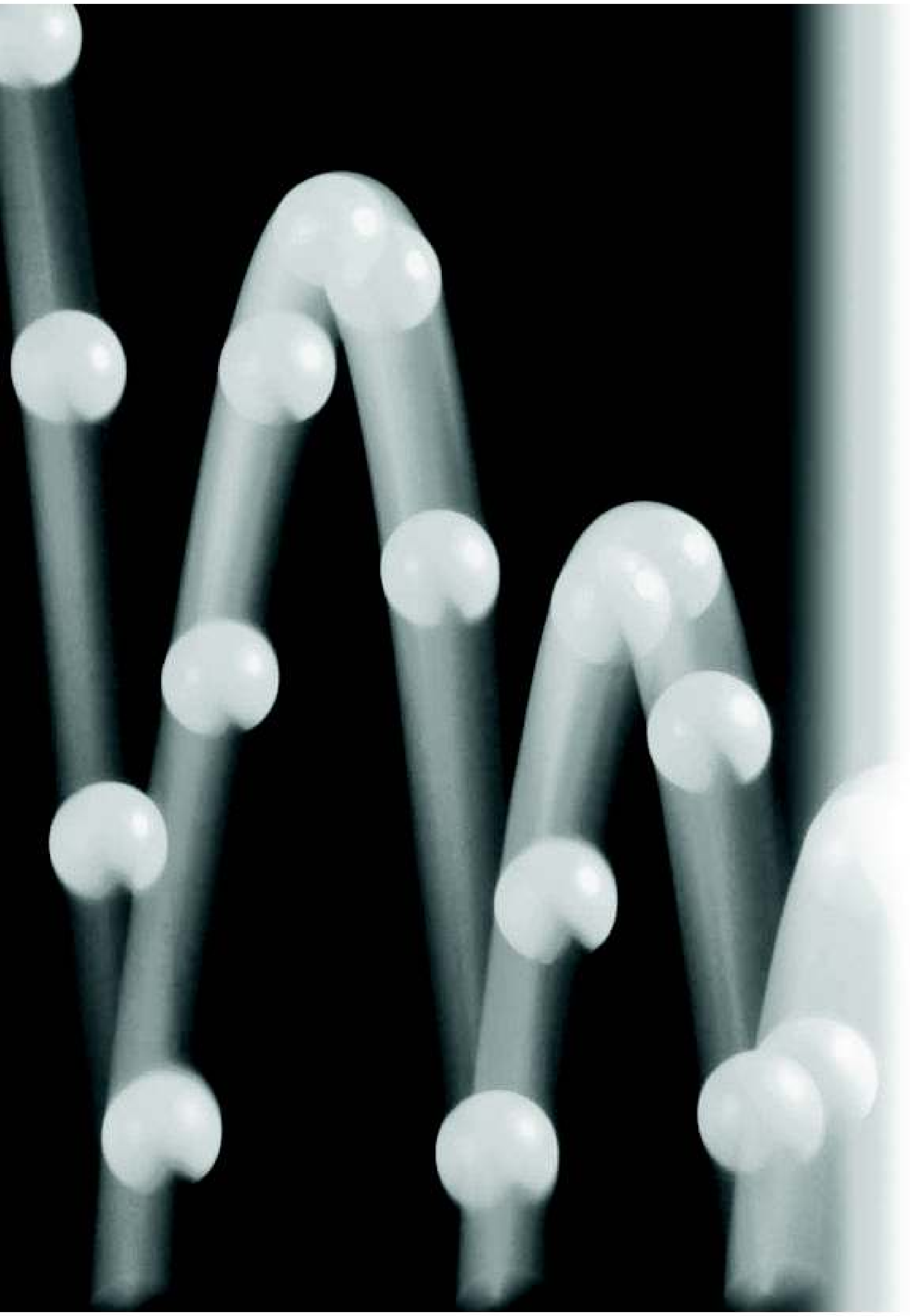
Sucesiones, series y el teorema del binomio

11



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo analizaremos las sucesiones y series. Una sucesión es una lista de números en un orden específico y una serie es la suma de los números de una sucesión. En este libro analizaremos dos tipos de sucesiones y series: aritméticas y geométricas. Las sucesiones y las series se pueden utilizar para resolver muchos problemas de la vida real, como veremos en este capítulo.

También utilizaremos el símbolo de la suma, Σ, que con frecuencia se utiliza en estadística y otros cursos de matemáticas. Asimismo, en la sección 11.4 presentaremos el teorema del binomio para desarrollar una expresión de la forma $(a + b)^n$.

SI UNA PELOTA REBOTA 4 pies cuando se deja caer desde una altura de 6 pies, ha rebotado $66\frac{2}{3}\%$ de su altura original. En teoría, cada rebote tendrá otro rebote y la pelota nunca dejaría de rebotar. ¿Será posible calcular la distancia total de una pelota que nunca para de rebotar? En el ejercicio 705 de la página 722, calculará la distancia total de una pelota que rebota.

11.1 Sucesiones y series

1 Determinar los términos de una sucesión.
2 Escribir una serie.
3 Determinar sumas parciales.
4 Usar la notación de suma, Σ.

1 Determinar los términos de una sucesión

Muchas veces vemos patrones en los números. Por ejemplo, suponga que le ofrecen un trabajo con un salario inicial de $30,000. Le dan dos opciones para su aumento salarial anual. Una opción es un aumento de $2000 cada año. Con esta opción recibiría el salario que se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	
Salario	$30,000	$32,000	$34,000	$36,000	...

Cada año, el salario es $2000 mayor que el año anterior. Los tres puntos a la derecha de la lista de números indican que la lista continúa de la misma manera.

La segunda opción es un aumento del 5% cada año. El salario que recibiría con esta opción se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	
Salario	$30,000	$31,500	$33,075	$34,728.75	...

Con esta opción, el salario en cualquier año a partir del año 2 es 5% mayor que el salario del año anterior.

Las dos listas de números que ilustran los salarios son ejemplos de sucesiones. Una **sucesión** (o **progresión**) de números es una lista de números con un orden específico. Considere la lista de números dados a continuación, que es una sucesión.

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

El primer término es 5. Indicamos esto escribiendo $a_1 = 5$. Como el segundo término es 10, $a_2 = 10$, y así sucesivamente. Los tres puntos, indican que la sucesión continúa de manera indefinida y es una **sucesión infinita**.

Sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.

Considere la sucesión 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{Dominio} & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Rango} & \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & \ldots, & 5n, & \ldots\} \end{array}$$

Observe que los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, ... se determinan multiplicando cada número natural por 5. Para cualquier número natural n, el término correspondiente de la sucesión es $5 \cdot n$ o $5n$. El **término general de una sucesión**, a_n, que define la sucesión, es $a_n = 5n$.

$$a_n = f(n) = 5n$$

Para determinar el término decimosegundo de la sucesión, sustituimos 12 en vez de n en el término general de la sucesión, $a_{12} = 5 \cdot 12 = 60$. Así, el decimosegundo término de la sucesión es 60, Observe que los términos de la sucesión son los valores de la función, o los números en el rango de la función. Al escribir la sucesión, no utilizamos las llaves de conjunto. La forma general de una sucesión es

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Para la sucesión infinita 2, 4, 8, 16, 32, . . . , 2^n, . . . podemos escribir

$$a_n = f(n) = 2^n$$

Observe que cuando $n = 1, a_1 = 2^1 = 2$; cuando $n = 2, a_2 = 2^2 = 4$; cuando $n = 3, a_3 = 2^3 = 8$; cuando $n = 4, a_4 = 2^4 = 16$; y así, sucesivamente. ¿Cuál es el séptimo término de esta sucesión? La respuesta es $a_7 = 2^7 = 128$.

Una sucesión también puede ser **finita**.

Sucesión finita

Una **sucesión finita** es una función cuyo demonio incluye solamente los primeros n números naturales.

Una sucesión finita tiene sólo un número finito de términos.

Ejemplos de sucesiones finitas

5, 10, 15, 20	dominio es {1, 2, 3, 4}
2, 4, 8, 16, 32	dominio es {1, 2, 3, 4, 5}

EJEMPLO 1 Escriba la sucesión finita definida por $a_n = 2n + 3$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= 2n + 3 \\ a_1 &= 2(1) + 3 = 5 \\ a_2 &= 2(2) + 3 = 7 \\ a_3 &= 2(3) + 3 = 9 \\ a_4 &= 2(4) + 3 = 11 \end{aligned}$$

Así, la sucesión es 5, 7, 9, 11.

Ahora resuelva el ejercicio 17

Como cada término de la sucesión del ejemplo 1 es mayor que el término anterior, la sucesión es una **sucesión creciente**.

EJEMPLO 2 Dado $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$,

a) determine el primer término de la sucesión.
b) determine el tercer término de la sucesión.
c) determine el quinto término de la sucesión.
d) determine el décimo término de la sucesión.

Solución

a) Cuando $n = 1$, $a_1 = \dfrac{2(1) + 3}{1^2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

b) Cuando $n = 3$, $a_3 = \dfrac{2(3) + 3}{3^2} = \dfrac{9}{9} = 1$.

c) Cuando $n = 5$, $a_5 = \dfrac{2(5) + 3}{5^2} = \dfrac{13}{25} = 0.52$.

d) Cuando $n = 10$, $a_{10} = \dfrac{2(10) + 3}{10^2} = \dfrac{23}{100} = 0.23$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

Observe en el ejemplo 2 que, como no hay restricción alguna sobre n, a_n es el término general de una sucesión infinita.

En el ejemplo 2, los primeros cuatro términos de la sucesión son 5, $\dfrac{7}{4} = 1.75$, 1, $\dfrac{11}{16} = 0.6875$. Ya que cada término de la sucesión generada por $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$ es menor que el término que le precede, la sucesión es una **sucesión decreciente**.

EJEMPLO 3 ▸ Determine los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-1)^n(n)$.

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n(n) \\ a_1 &= (-1)^1(1) = -1 \\ a_2 &= (-1)^2(2) = 2 \\ a_3 &= (-1)^3(3) = -3 \\ a_4 &= (-1)^4(4) = 4 \end{aligned}$$

Si escribimos la sucesión, obtenemos $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n(n)$. Observe que cada término alterna el signo. Ésta es una **sucesión alternante**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

2 Escribir una serie

Una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita, según se base en una sucesión finita o infinita.

Ejemplos

Sucesión finita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

Serie finita

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$$

Serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots$$

EJEMPLO 4 ▸ Escriba los primeros ocho términos de la sucesión; después escriba la serie que representan la suma de esa sucesión si

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b)** $a_n = (-2)^n$

Solución

a) Comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ son

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

o bien

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

La serie que representa la suma de la sucesión es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

b) De nuevo comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-2)^n$ son

$$(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7, (-2)^8$$

o

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$$

La serie que representan la suma de esta sucesión es

$$-2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64 + (-128) + 256 = 170$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

3 Determinar sumas parciales

Para una sucesión infinita con términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, una **suma parcial** es la suma de un número finito de términos consecutivos de la sucesión, comenzando con el primer término.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 && \text{Primera suma parcial.} \\ s_2 &= a_1 + a_2 && \text{Segunda suma parcial.} \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && \text{Tercera suma parcial.} \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n && n\text{-ésima suma parcial.} \end{aligned}$$

La suma de todos los términos de la sucesión infinita se denomina **serie infinita**, y está dada por

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

EJEMPLO 5 ▸ Dada una sucesión infinita definida por $a_n = \dfrac{3 + n^2}{n}$, determine las sumas parciales que se indican.

a) s_1 y **b)** s_4

Solución

a) $s_1 = a_1 = \dfrac{3 + 1^2}{1} = \dfrac{3 + 1}{1} = 4$

b)
$$\begin{aligned} s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \frac{3 + 1^2}{1} + \frac{3 + 2^2}{2} + \frac{3 + 3^2}{3} + \frac{3 + 4^2}{4} \\ &= 4 + \frac{7}{2} + \frac{12}{3} + \frac{19}{4} \\ &= \frac{48}{12} + \frac{42}{12} + \frac{48}{12} + \frac{57}{12} \\ &= \frac{195}{12} \quad \text{o} \quad 16\frac{1}{4} \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

4 Usar la notación de suma, Σ

Cuando se conoce el término general de una sucesión, puede usarse la letra griega **sigma**, Σ, para escribir una serie. La suma de los primeros n términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es a_n se representa por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i se denomina **índice de la suma** o simplemente **índice**, n es el **límite superior de la suma**, y 1 es el **límite inferior de la suma**. En este ejemplo, usamos i para el índice; sin embargo, puede usarse cualquier letra para el índice.

Considere la sucesión $7, 9, 11, 13, \ldots, 2n + 5, \ldots$. La suma de los primeros cinco términos puede representarse por medio de la **notación de suma o notación sigma**, también conocida como notación de sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$$

Esta notación se lee “la suma desde i igual a 1 hasta 5 de $2i + 5$”.

Para evaluar la serie representada por $\sum_{i=1}^{5}(2i+5)$, primero sustituimos 1 en vez de i de $2i+5$ y listamos el valor que se obtuvo. Luego sustituimos 2 por i en $2i+5$ y listamos el valor. Seguimos este procedimiento para los valores de 1 a 5. Después sumamos estos valores para obtener el valor de la serie.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}(2i+5) &= (2\cdot 1+5)+(2\cdot 2+5)+(2\cdot 3+5)+(2\cdot 4+5)+(2\cdot 5+5)\\ &= 7+9+11+13+15\\ &= 55\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 ▸ Desarrolle la serie $\sum_{i=1}^{6}(i^2+1)$ y evalúe la serie.

Solución

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(i^2+1) &= (1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)\\ &= 2+5+10+17+26+37\\ &= 97\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 7 ▸ Considere el término general de una sucesión $a_n = 2n^2 - 9$. Represente la tercera suma parcial, s_3, en notación sigma.

Solución La tercera suma parcial será la suma de los primeros tres términos, $a_1 + a_2 + a_3$. Podemos representar la tercera suma parcial como $\sum_{i=1}^{3}(2i^2-9)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 8 ▸ Para el siguiente conjunto de valores $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, y $x_5 = 7$, ¿se cumple que $\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2$?

Solución

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 &= (x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2+(x_5)^2\\ &= 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2\\ &= 9+16+25+36+49 = 135\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2 &= (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2\\ &= (3+4+5+6+7)^2 = (25)^2 = 625\end{aligned}$$

Como $135 \neq 625$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

Cuando un símbolo de suma se escribe sin límites superior e inferior, esto significa que debemos sumar todos los datos.

EJEMPLO 9 Una fórmula utilizada para determinar la media aritmética, $\bar{x}$ (se lee x barra) de un conjunto de datos es $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, donde n es el número de datos.

Las calificaciones de los exámenes de Joan Sally son 70, 95, 83, 74 y 92. Determine la media aritmética de sus calificaciones.

Solución

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70 + 95 + 83 + 74 + 92}{5} = \frac{414}{5} = 82.8$$

Ahora resuelva el ejercicio 79

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión?
2. ¿Qué es una sucesión infinita?
3. ¿Qué es una sucesión finita?
4. ¿Qué es una sucesión creciente?
5. ¿Qué es una sucesión decreciente?
6. ¿Qué es una sucesión alternante?
7. ¿Qué es una serie?
8. ¿Cuál es la n-ésima suma parcial de una serie?
9. Escriba con palabras lo que significa: $\sum_{i=1}^{5} (i + 4)$.
10. Considere la suma $\sum_{k=1}^{5} (k + 3)$.
    a) ¿Cómo se denomina al 1?
    b) ¿Cómo se denomina al 5?
    c) ¿Cómo se denomina a la k?
11. Sea $a_n = 2n - 1$. ¿Es una sucesión creciente o decreciente? Explique.
12. Sea $a_n = -3n + 7$. ¿Es una sucesión creciente o decreciente? Explique.
13. Sea $a_n = 1 + (-2)^n$. ¿Es una sucesión alternante? Explique.
14. Sea $a_n = (-1)^{2n}$. ¿Es una sucesión alternante? Explique.

Práctica de habilidades

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término n-ésimo se muestra.

15. $a_n = 6n$
16. $a_n = -5n$
17. $a_n = 4n - 1$
18. $a_n = 2n + 5$
19. $a_n = \dfrac{7}{n}$
20. $a_n = \dfrac{8}{n^2}$
21. $a_n = \dfrac{n + 2}{n + 1}$
22. $a_n = \dfrac{n - 5}{n + 6}$
23. $a_n = (-1)^n$
24. $a_n = (-1)^{2n}$
25. $a_n = (-2)^{n+1}$
26. $a_n = 3^{n-1}$

Determine el término indicado de la sucesión, cuyo término n-ésimo se muestra.

27. $a_n = 2n + 7$, décimo segundo término.
28. $a_n = 3n + 2$, sexto término.
29. $a_n = \dfrac{n}{4} + 8$, décimo sexto término.
30. $a_n = \dfrac{n}{2} - 13$, décimo cuarto término.
31. $a_n = (-1)^n$, octavo término.
32. $a_n = (-2)^n$, cuarto término.
33. $a_n = n(n + 2)$, noveno término.
34. $a_n = (n - 1)(n + 4)$, quinto término.
35. $a_n = \dfrac{n^2}{2n + 7}$, noveno término.
36. $a_n = \dfrac{n(n + 6)}{n^2}$, décimo término.

Para cada sucesión, determine la primera y la tercera sumas parciales, s_1 y s_3.

37. $a_n = 3n - 1$
38. $a_n = 2n + 3$
39. $a_n = 2^n + 1$
40. $a_n = 3^n - 8$
41. $a_n = \dfrac{n - 1}{n + 2}$
42. $a_n = \dfrac{n}{n + 3}$
43. $a_n = (-1)^n$
44. $a_n = (-3)^n$
45. $a_n = \dfrac{n^2}{2}$
46. $a_n = \dfrac{n^2}{n + 4}$

Escriba los siguientes tres términos de cada sucesión.

47. $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

48. $10, 15, 20, 25, 30, \ldots$

49. $7, 9, 11, 13, 15, \ldots$

50. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

51. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

52. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

53. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

54. $-10, -20, -30, -40, \ldots$

55. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

56. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$

57. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

58. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \ldots$

59. $37, 32, 27, 22, \ldots$

60. $7, -1, -9, -17, \ldots$

Desarrolle cada serie y luego evalúela.

61. $\sum_{i=1}^{5} (3i - 1)$

62. $\sum_{i=1}^{4} (4i + 5)$

63. $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$

64. $\sum_{i=1}^{5} (2i^2 - 7)$

65. $\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2}{2}$

66. $\sum_{i=1}^{3} \frac{i^2}{5}$

67. $\sum_{i=4}^{9} \frac{i^2 + i}{i + 1}$

68. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i^3}{i + 1}$

Para el término general dado, a_n, escriba una expresión, con Σ, para representar la suma parcial que se indica.

69. $a_n = n + 8$, quinta suma parcial.

70. $a_n = n^2 + 3$, cuarta suma parcial.

71. $a_n = \frac{n^2}{4}$, tercera suma parcial.

72. $a_n = \frac{n^2 + 13}{n + 9}$, tercera suma parcial.

Para el conjunto de valores $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = -1$ y $x_5 = 4$, determine cada una de las sumas siguientes.

73. $\sum_{i=1}^{5} x_i$

74. $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 5)$

75. $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$

76. $\sum_{i=1}^{5} 2x_i$

77. $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2$

78. $\sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 3)$

Determine la media aritmética, $\bar{x}$, de los conjuntos de datos siguientes.

79. 15, 20, 25, 30, 35

80. 16, 22, 96, 18, 28

81. 72, 83, 4, 60, 18, 20

82. 5, 13, 9, 12, 23, 36, 70

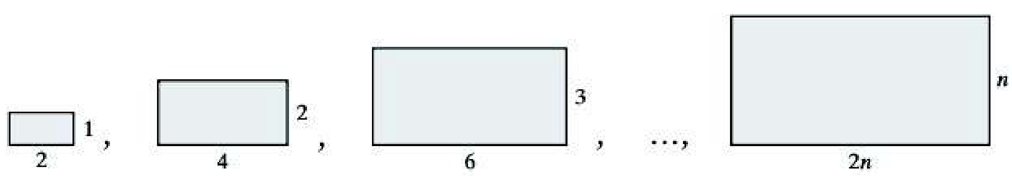
Resolución de problemas

En los ejercicios 83 y 84, considere los rectángulos siguientes. Para el rectángulo n-ésimo, la longitud es 2n y el ancho es n.

83. Perímetro

a) Determine los perímetros para los primeros cuatro rectángulos y luego liste los perímetros en una sucesión.

b) Determine el término general para el perímetro del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice p_n para el perímetro.



84. Área

a) Determine las áreas de los cuatro rectángulos, y luego liste las áreas en una sucesión.

b) Determine el término general para el área del n-ésimo rectángulo de la sucesión. Utilice a_n para el área.

85. Idee su propia sucesión que sea creciente, y liste los primeros cinco términos.

86. Idee su propia sucesión que sea decreciente, y liste los primeros cinco términos.

87. Idee su propia sucesión que sea alternante, y liste los primeros cinco términos.

88. Escriba

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como una suma de términos y

b) $\sum_{j=1}^{n} x_j$ como una suma de términos.

c) Para un conjunto dado de valores de x, desde x_1 hasta x_n, ¿se cumplirá $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$? Explique.

89. Despeje Σx de $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$.

90. Despeje n de $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$.

91. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} 4x_i = 4\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustre su respuesta con un ejemplo.

92. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{3} = \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustre su respuesta con un ejemplo.

93. Sean $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 2$ y $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 6$. Determine lo siguiente. Observe que $\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3$, $\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3$ y $\Sigma xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

a) Σx,
b) Σy,
c) $\Sigma x \cdot \Sigma y$,
d) Σxy,
e) ¿Es $\Sigma x \cdot \Sigma y = \Sigma xy$?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.6] **94.** Resuelva $\left|\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{5}\right| = \left|\dfrac{1}{2}x - 1\right|$.

[5.6] **95.** Factorice $8y^3 - 64x^6$.

[7.6] **96.** Resuelva $\sqrt{x + 5} - 1 = \sqrt{x - 2}$.

[8.3] **97.** Despeje r de $V = \pi r^2 h$.

11.2 Sucesiones y series aritméticas

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética.

2 Determinar el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

3 Determinar la n-ésima suma parcial de una serie aritmética.

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética

En la sección anterior empezamos nuestro análisis suponiendo que obtenía un trabajo con un salario inicial de \$30,000. Una opción para el aumento de salario era un aumento de \$2000 anuales. Esto tendría como resultado la sucesión

$$\$30{,}000, \$32{,}000, \$34{,}000, \$36{,}000, \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión aritmética.

Sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término, después del primero, difiere del término que le precede en una cantidad constante.

La cantidad constante en que difiere cada par de términos sucesivos se denomina **diferencia común**, d. La diferencia común puede determinarse restando cualquier término del término que le sigue directamente.

Sucesión aritmética	Diferencia común
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$	$d = 3 - 1 = 2$
$5, 1, -3, -7, -11, -15, \ldots$	$d = 1 - 5 = -4$
$\dfrac{7}{2}, \dfrac{2}{2}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{8}{2}, -\dfrac{13}{2}, -\dfrac{18}{2}, \ldots$	$d = \dfrac{2}{2} - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{5}{2}$

Observe que la diferencia común puede ser un número positivo o un número negativo. Si la sucesión es creciente, entonces d es un número positivo. Si la sucesión es decreciente, entonces d es un número negativo.

EJEMPLO 1 Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con

a) el primer término 6 y diferencia común 4.
b) el primer término 3 y diferencia común -2.
c) el primer término 1 y diferencia común $\dfrac{1}{3}$.

Solución

a) Comience con 6 y siga sumando 4. La sucesión es 6, 10, 14, 18, 22.
b) $3, 1, -1, -3, -5$
c) $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, 2, \dfrac{7}{3}$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Determinar el n-ésimo término de una sucesión aritmética

En general, una sucesión aritmética con el primer término a_1 y diferencia común d tiene los términos siguientes:

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Si continuamos este proceso, podemos ver que el n-ésimo término, a_n, se puede determinar mediante la fórmula siguiente:

n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2

a) Escriba una expresión para el término general (o n-ésimo), a_n, de una sucesión aritmética cuyo primer término es -3 y cuya diferencia común es 2.

b) Determine el décimo segundo término de la sucesión.

Solución

a) El n-ésimo término de la sucesión es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Sustituyendo $a_1 = -3$ y $d = 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= -3 + (n - 1)2 \\ &= -3 + 2(n - 1) \\ &= -3 + 2n - 2 \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Así, $a_n = 2n - 5$.

b) $a_n = 2n - 5$

$a_{12} = 2(12) - 5 = 24 - 5 = 19$

El décimo segundo término de la sucesión es 19.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 3 Determine el número de términos en la sucesión aritmética 5, 9, 13, 17, . . . , 41.

Solución El primer término, a_1, es 5; el n-ésimo término es 41, y la diferencia común, d, es 4. Al sustituir los valores apropiados en la fórmula para el término n-ésimo, y despejando a n, tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 41 &= 5 + (n - 1)4 \\ 41 &= 5 + 4n - 4 \\ 41 &= 4n + 1 \\ 40 &= 4n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

La sucesión tiene 10 términos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

3 Determinar la n-ésima suma parcial de una serie aritmética

Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. Una serie aritmética finita puede escribirse como

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Si consideramos el último término como a_n, el penúltimo término será $a_n - d$, el antepenúltimo término será $a_n - 2d$, y así sucesivamente.

Una fórmula para la n-ésima suma parcial, s_n, se puede obtener sumando s_n a sí mismo, pero siguiendo el orden inverso.

$$\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\ s_n &=& a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\ \hline 2s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

Como el lado derecho de la ecuación contiene n términos iguales a $(a_1 + a_n)$, podemos escribir

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

Ahora dividimos ambos lados de la ecuación entre 2, para obtener la fórmula siguiente.

n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLO 4 Determine la suma de los primeros 25 números naturales.

Solución La sucesión aritmética es 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 25. El primer término, a_1, es 1; el último término, a_n, es 25. Hay 25 términos; así, $n = 25$. Mediante la fórmula para la n-ésima suma parcial, tenemos

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{25(1 + 25)}{2} = \frac{25(26)}{2} = 25(13) = 325$$

La suma de los primeros 25 números naturales es 325, Así, $s_{25} = 325$.

Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 5 El primer término de una sucesión aritmética es 4 y el último término es 31, y si además, $s_n = 175$, determine el número de términos en la sucesión y la diferencia común.

Solución Sustituimos los valores apropiados, $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $s_n = 175$, en la fórmula para la n-ésima suma parcial y despejamos n.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ 175 &= \frac{n(4 + 31)}{2} \\ 175 &= \frac{35n}{2} \\ 350 &= 35n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

Existen 10 términos en la sucesión. Podemos determinar ahora la diferencia común mediante la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 31 &= 4 + (10 - 1)d \\ 31 &= 4 + 9d \\ 27 &= 9d \\ 3 &= d \end{aligned}$$

La diferencia común es 3, la sucesión es 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.

Ahora resuelva el ejercicio 31

Los ejemplos 6 y 7 ilustran algunas aplicaciones de las sucesiones y series aritméticas.

EJEMPLO 6 ▶ **Salario** Mary Tufts recibe un salario inicial de \$35,000 y se le promete un aumento de \$1200 después de cada uno de los 8 años siguientes. Determine su salario durante su octavo año de trabajo.

Solución Entienda el problema Su salario después de los primeros años sería

\$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600, ...

Ya que se suma una cantidad constante cada año, ésta es una sucesión aritmética. El término general de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Traduzca En este ejemplo, $a_1 = 35{,}000$ y $d = 1200$. Así, para $n = 8$, el salario de Mary sería

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} a_8 &= 35{,}000 + (8 - 1)1200 \\ &= 35{,}000 + 7(1200) \\ &= 35{,}000 + 8400 \\ &= 43{,}400 \end{aligned}$$

Responda Durante su octavo año de trabajo, el salario de Mary sería de \$43,400. Si enumeramos todos los salarios para el periodo de 8 años, éstos serían \$35,000, \$36,200, \$37,400, \$38,600, \$39,800, \$41,000, \$42,200, \$43,400

▶ Ahora resuelva el ejercicio 83

EJEMPLO 7 ▶ **Péndulo** Cada oscilación de un péndulo (de derecha a izquierda o de izquierda a derecha) es 3 pulgadas menor que la anterior. La primera oscilación es de 8 pies.

a) Determine la longitud de la décimo segunda oscilación.

b) Determine la distancia total recorrida por el péndulo durante las primeras 12 oscilaciones.

Solución **a)** Entienda el problema Como cada oscilación decrece en una cantidad constante, este problema puede representarse como una serie aritmética. Como la primera oscilación está dada en pies y la disminución de las oscilaciones está dada en pulgadas, cambiaremos 3 pulgadas a 0.25 pies ($3 \div 12 = 0.25$). La décimo segunda oscilación puede considerarse como a_{12}. La diferencia, d, es negativa, ya que la distancia es decreciente con cada oscilación.

Traduzca

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{12} &= 8 + (12 - 1)(-0.25) \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= 8 + 11(-0.25) \\ &= 8 - 2.75 \\ &= 5.25 \text{ pies} \end{aligned}$$

Responda La décimo segunda oscilación es de 5.25 pies.

b) Entienda el problema y traduzca La distancia total recorrida durante las primeras 12 oscilaciones puede determinarse mediante la fórmula para la n-ésima suma parcial. La primera oscilación, a_1, es de 8 pies y la décimo segunda, a_{12}, es de 5.25 pies.

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2}$$

Realice los cálculos $= \frac{12(8 + 5.25)}{2} = \frac{12(13.25)}{2} = 6(13.25) = 79.5$ pies.

Responda El péndulo recorre 79.5 pies durante sus primeras 12 oscilaciones.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión aritmética?
2. ¿Qué es una serie aritmética?
3. ¿Cómo llamamos a la diferencia constante entre dos términos sucesivos en una sucesión aritmética?
4. ¿Cómo puede determinarse la diferencia común en una sucesión aritmética?
5. Si una sucesión aritmética es creciente, ¿el valor de d es un número positivo o un número negativo?
6. Si una sucesión aritmética es decreciente, ¿el valor de d es un número positivo o un número negativo?
7. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números negativos? Explique.
8. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números impares? Explique.
9. ¿Una sucesión aritmética, puede constar sólo de números pares? Explique.
10. ¿Una sucesión alternante, puede ser una sucesión aritmética? Explique.

Práctica de habilidades

Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y diferencia común dados. Escriba la expresión para el término general, o n-ésimo, a_n, de la sucesión aritmética.

11. $a_1 = 4, d = 3$
12. $a_1 = -11, d = 4$
13. $a_1 = 7, d = -2$
14. $a_1 = 3, d = -5$
15. $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}$
16. $a_1 = -\frac{5}{3}, d = -\frac{1}{3}$
17. $a_1 = 100, d = -5$
18. $a_1 = \frac{7}{4}, d = -\frac{3}{4}$

Determine la cantidad indicada de la sucesión aritmética.

19. $a_1 = 5, d = 3$; determine a_4
20. $a_1 = 10, d = -3$; determine a_5
21. $a_1 = -9, d = 4$; determine a_{10}
22. $a_1 = -1, d = -2$; determine a_{12}
23. $a_1 = -8, d = \frac{5}{3}$; determine a_{13}
24. $a_1 = 5, a_8 = -21$; determine d
25. $a_1 = 11, a_9 = 27$; determine d
26. $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{19}{2}$; determine d
27. $a_1 = 4, a_n = 28, d = 3$; determine n
28. $a_1 = -9, a_n = -27, d = -3$; determine n
29. $a_1 = 82, a_n = 42, d = -8$; determine n
30. $a_1 = -\frac{4}{3}, a_n = -\frac{14}{3}, d = -\frac{2}{3}$; determine n

Determine la suma, s_n, y la diferencia común, d, de cada sucesión.

31. $a_1 = 1, a_{10} = 19, n = 10$
32. $a_1 = -8, a_7 = 10, n = 7$
33. $a_1 = \frac{3}{5}, a_8 = 2, n = 8$
34. $a_1 = 12, a_8 = -23, n = 8$
35. $a_1 = -5, a_6 = 13.5, n = 6$
36. $a_1 = \frac{7}{5}, a_5 = \frac{23}{5}, n = 5$
37. $a_1 = 7, a_{11} = 67, n = 11$
38. $a_1 = 14.25, a_{31} = 18.75, n = 31$

Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión; luego determine a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = 4, d = 3$
40. $a_1 = 11, d = -6$
41. $a_1 = -6, d = 2$
42. $a_1 = -7, d = -4$
43. $a_1 = -8, d = -5$
44. $a_1 = -15, d = 4$
45. $a_1 = \frac{7}{2}, d = \frac{5}{2}$
46. $a_1 = \frac{9}{5}, d = \frac{3}{5}$
47. $a_1 = 100, d = -7$
48. $a_1 = 35, d = 6$

Determine el número de términos en cada sucesión y determine s_n.

49. $1, 4, 7, 10, \ldots, 43$

50. $-10, -8, -6, -4, \ldots, 40$

51. $-9, -5, -1, 3, \ldots, 31$

52. $6, 13, 20, 27, \ldots, 62$

53. $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{17}{2}$

54. $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{6}, -\frac{11}{6}, \ldots, -\frac{21}{6}$

55. $7, 10, 13, 16, \ldots, 91$

56. $-11, -15, -19, \ldots, -51$

Resolución de problemas

57. Determine la suma de los primeros 50 números naturales.

58. Determine la suma de los primeros 50 números naturales pares.

59. Determine la suma de los primeros 50 números naturales impares.

60. Determine la suma de los primeros 40 múltiplos positivos de 5.

61. Determine la suma de los primeros 30 múltiplos positivos de 3.

62. Determine la suma de los números entre 50 y 150, inclusive.

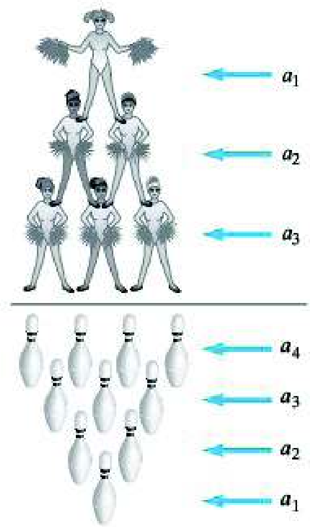
63. Determine cuántos números entre 7 y 1610 son divisibles entre 6.

64. Determine cuántos números entre 14 y 1470 son divisibles entre 8.

Las pirámides aparecen en todos lados; en eventos deportivos, las porristas pueden formar una pirámide en la que las personas de arriba se paran sobre los hombros de las personas de abajo. La ilustración de la derecha muestra una pirámide con 1 porrista en la parte superior, 2 en la fila de en medio y 3 porristas en la fila de abajo. Observe que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. También note que $d = 1$, $n = 3$ y $s_3 = 6$.

En una pista de boliche, los bolos forman una pirámide. La primera fila tiene 1 bolo, la segunda fila tiene 2 bolos, la tercera fila tiene 3 bolos y la cuarta tiene 4. Así, $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 4$ y $s_4 = 10$.

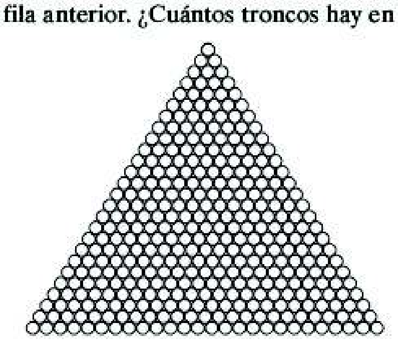
Utilice la idea de una pirámide para resolver los ejercicios 65 a 70.



65. Auditorio Un auditorio tiene 20 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene dos asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la fila décimo segunda? ¿Cuántos asientos hay en las primeras 12 filas?

66. Auditorio Un auditorio tiene 22 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene cuatro asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la novena fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras nueve filas?

67. Troncos Wolfang Schmidt apila troncos de modo que hay 26 troncos en la parte inferior, y cada fila tiene un tronco menos que la fila anterior. ¿Cuántos troncos hay en la pila?



68. Troncos Suponga que Wolfgang, en el ejercicio 67, deja de apilar troncos después de terminar con la fila que tiene 8 troncos. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

69. Copas apiladas En su 50 aniversario de bodas, el señor y la señora Carlson están a punto de verter champaña en la copa superior, como se muestra en la foto. La fila superior tiene 1 copa, la segunda fila tiene 3 copas, la tercera fila tiene 5 copas, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 copas más que la fila superior anterior. Esta pirámide tiene 14 filas.

a) ¿Cuántas copas hay en la décimo cuarta fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántas copas hay en total?

70. Dulces en una pila Unos dulces que están envueltos de forma individual, se apilan en filas de modo que la fila superior tiene un dulce, la segunda fila tiene 3 dulces, la tercera fila tiene 5 dulces, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 dulces más que la fila arriba de ella. En total hay siete filas de dulces.
a) ¿Cuántos dulces hay en la séptima fila (la fila inferior)?
b) ¿Cuántos dulces hay en total?

71. Suma de números Karl Friedrich Gauss (1777−1855), un famoso matemático, cuando era niño determinó mentalmente y de forma rápida la suma de los primeros 100 números naturales $(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$. Explique cómo podría haberlo hecho y determine de esa forma la suma de los primeros 100 números naturales como cree que lo pudo haber hecho Gauss. (*Sugerencia:* $1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101$, etcétera).

72. Suma de números Utilice el mismo proceso del ejercicio 71 para determinar la suma de los números del 101 al 150.

73. Suma de números Determine una fórmula para la suma de los primeros n números impares consecutivos iniciando con 1.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

74. Suma de números pares Determine una fórmula para la suma de los primeros n números pares consecutivos iniciando con 2.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$$

75. Balanceándose en una liana Una larga liana se ata a la rama de un árbol. Sally Wyn se columpia en la liana y cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda) es $\frac{1}{2}$ pie menor que la oscilación anterior. Si su primera oscilación es de 22 pies, determine

a) la longitud de la séptima oscilación.
b) la distancia recorrida durante las siete oscilaciones.

76. Péndulo Cada oscilación de un péndulo es 2 pulgadas más corta que la oscilación que le precede (izquierda a derecha o de derecha a izquierda). La primera oscilación es de 6 pies. Determine
a) la longitud de la octava oscilación y
b) la distancia total recorrida por el péndulo durante las ocho oscilaciones.

77. Rebote de una pelota Frank Holyton deja caer una pelota desde una ventana que está en un segundo piso. Cada vez que la pelota rebota, la altura que alcanza es 6 pulgadas menor que la del rebote anterior. Si el primer rebote alcanza una altura de 6 pies, determine la altura que alcanza la pelota en el décimo primer rebote.

78. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de la mesa y rebota a una altura de 3 pies. Si cada rebote sucesivo es 3 pulgadas menor que el rebote que le precede, determine la altura que alcanza la pelota en el décimo rebote.

79. Paquetes El lunes 17 de marzo, Brian Nguyen inició un nuevo trabajo en una compañía de paquetería. Ese día, él fue capaz de preparar 105 paquetes para envío. Su jefe espera que con la experiencia que vaya obteniendo Brian sea más productivo. Cada día de la primera semana, se espera que Brian prepare 10 paquetes más que el total del día anterior.
a) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian el 22 de marzo?
b) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian en sus primeros seis días de trabajo?

80. Salario Marion Nickelson gana un salario anual de $37,500 en la compañía en que trabaja. Su jefe le ha prometido un aumento de $1500 a su salario en cada año, durante los siguientes 10 años.
a) ¿Dentro de 10 años, cuál será el salario de Marion?
b) ¿Cuánto ganará en total durante esos 11 años?

81. Dinero Si Craig Campanella ahorra $1 el día 1, $2 el día 2, $3 el día 3, y así sucesivamente, en total, ¿cuánto habrá ahorrado al final de 1 año (365 días)?

82. Dinero Si Dan Currier ahorra 50 centavos el día 1, $1.00 el día 2, $1.50 el día 3, y así sucesivamente, ¿cuánto habrá ahorrado al final de 1 año (365 días)?

83. Dinero Carrie Dereshi, recientemente jubilada, se entrevistó con su asesor financiero. Acordó recibir $42,000 el primer año, y debido a la inflación, cada año recibiría $400 más de lo que recibiera el año anterior.
a) ¿Cuál fue el ingreso que recibió en su décimo año de retiro?
b) ¿Cuánto dinero recibirá en total durante los primeros 10 años de retiro?

84. Salario A Susan Forman se le da un salario inicial de $23,000 y le dicen que recibirá un aumento de $1000 al final de cada año.
a) Determine el salario de ella durante el año 12.
b) En total, ¿cuánto recibirá durante sus primeros 12 años?

85. Ángulos La suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono, son 180°, 360°, 540° y 720°, respectivamente. Utilice este patrón para determinar una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

86. Otra fórmula que puede usarse para determinar la n-ésima suma parcial de una serie aritmética es

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

Deduzca esta fórmula, usando las dos fórmulas que se presentaron en esta sección.

Actividad en grupo

En cálculo un tema muy importante es el de límites. Considere $a_n = \frac{1}{n}$. *Los primeros cinco términos de esta sucesión son* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. *Como el valor de* $\frac{1}{n}$ *se acerca cada vez más a 0 conforme n se hace cada vez más grande, decimos que el límite de* $\frac{1}{n}$ *cuando n tiende a infinito es 0. Escribimos esto como* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *o* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Observe que* $\frac{1}{n}$ *nunca es igual a 0, pero su valor se aproxima a 0 cuando n se hace cada vez más grande.*

a) *Miembro 1 del grupo: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 87 y 88.* **b)** *Miembro 2: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 89 y 90.*

c) *Miembro 3: Determine* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 91 y 92.* **d)** *Intercambien sus trabajos y verifiquen las respuestas de los demás.*

87. $a_n = \frac{1}{n-2}$ **88.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **89.** $a_n = \frac{1}{n^2+2}$

90. $a_n = \frac{2n+1}{n}$ **91.** $a_n = \frac{4n-3}{3n+1}$ **92.** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **93.** Despeje r de $A = P + Prt$.

[4.1] **94.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$y = 2x + 1$$
$$3x - 2y = 1$$

[5.4] **95.** Factorice $12n^2 - 6n - 30n + 15$.

[10.1] **96.** Grafique $(x + 4)^2 + y^2 = 25$.

11.3 Sucesiones y series geométricas

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica.
2 Determinar el n-ésimo término de una sucesión geométrica.
3 Determinar la n-ésima suma parcial de una serie geométrica.
4 Identificar series geométricas infinitas.
5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita.
6 Estudiar aplicaciones de series geométricas.

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica

En la sección 11.1 supusimos que obtenía un trabajo con un salario inicial de \$30,000. También mencionamos que una opción de aumento salarial era 5% de aumento cada año. Esto daría como resultado la sucesión siguiente.

$$\$30{,}000,\quad \$31{,}500,\quad \$33{,}075,\quad \$34{,}728.75, \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión geométrica.

Sucesión geométrica

Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión donde cada término después del primero es el mismo múltiplo del término que le precede.

El múltiplo común es la **razón común**.

La razón común, r, de cualquier sucesión geométrica puede determinarse dividiendo cualquier término, excepto el primero, entre el término que le precede. En la sucesión geométrica anterior, la razón común es $\frac{31{,}500}{30{,}000} = 1.05$ (o 105%).

Considere la sucesión geométrica

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$

La razón común es 3, ya que $3 \div 1 = 3$ (o $9 \div 3 = 3$, y así sucesivamente).

Sucesión geométrica	Razón común
$4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 4(2^{n-1}), \ldots$	2
$3, 12, 48, 192, 768, \ldots, 3(4^{n-1}), \ldots$	4
$7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \ldots, 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$	$\frac{1}{2}$
$5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$	$-\frac{1}{3}$

EJEMPLO 1 Determine los primeros cinco términos de la sucesión geométrica si $a_1 = 6$ y $r = \frac{1}{2}$.

Solución $a_1 = 6,\ a_2 = 6\cdot\frac{1}{2} = 3,\ a_3 = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4},\ a_5 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Así, los primeros cinco términos de la sucesión geométrica son

$$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$$

Ahora resuelva el ejercicio 15

2 Determinar el *n*-ésimo término de una sucesión geométrica

En general, una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común r tiene los términos siguientes:

$a_1,$	$a_1r,$	$a_1r^2,$	$a_1r^3,$	$a_1r^4, \ldots,$	$a_1r^{n-1}, \ldots$
↑	↑	↑	↑	↑	↑
Primer término, a_1	Segundo término, a_2	Tercer término, a_3	Cuarto término, a_4	Quinto término, a_5	n-ésimo término, a_n

Así, podemos ver que el n-ésimo término de una sucesión geométrica está dado por la fórmula siguiente.

n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

EJEMPLO 2

a) Escriba una expresión para el término general (o n-ésimo), a_n de la sucesión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = -2$.
b) Determine el décimo segundo término de esta sucesión.

Solución

a) El término n-ésimo de la sucesión es $a_n = a_1r^{n-1}$. Al sustituir $a_1 = 3$ y $r = -2$, obtenemos

$$a_n = a_1r^{n-1} = 3(-2)^{n-1}$$

Así, $a_n = 3(-2)^{n-1}$.

b)
$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$
$$a_{12} = 3(-2)^{12-1} = 3(-2)^{11} = 3(-2048) = -6144$$

El décimo segundo término de la sucesión es -6144. Los primeros doce términos de la sucesión son $3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, -1536, 3072, -6144$.

Ahora resuelva el ejercicio 35

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajará con exponentes y utilizará las reglas de los exponentes. Las reglas de los exponentes se analizaron en la sección 1.5 y nuevamente en el capítulo 6. Si no las recuerda, ahora es un buen momento para revisar la sección 1.5.

EJEMPLO 3 Determine r y a_1 para la sucesión geométrica con $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

Solución La sucesión puede representarse con espacios en blanco para los términos faltantes.

$$\underline{\quad}, \underset{\substack{\uparrow\\ a_2}}{12}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underset{\substack{\uparrow\\ a_5}}{324}$$

Si suponemos que a_2 es el primer término de la sucesión con la misma razón común, obtenemos

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Primer}\\ \text{término}}}{12}, \_\_, \_\_, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cuarto}\\ \text{término}}}{324}$$

Ahora utilizamos la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica para determinar r. Sea el primer término, a_1, 12 y el número de términos n, 4.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1r^{n-1} \\ 324 &= 12r^{4-1} \\ 324 &= 12r^3 \\ \frac{324}{12} &= r^3 \\ 27 &= r^3 \\ 3 &= r \end{aligned}$$

Así, la razón común es 3.

El primer término de la sucesión original es $12 \div 3$, es decir, 4. Así, $a_1 = 4$. El primer término también podría determinarse utilizando la fórmula con $a_n = 324$, $r = 3$ y $n = 5$. Ahora, determine a_1 mediante la fórmula.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 83

3 Determinar la *n*-ésima suma parcial de una serie geométrica

Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica se puede expresar como

$$s_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \qquad (ec. 1)$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por r, obtenemos

$$rs_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n \qquad (ec. 2)$$

Ahora restamos los lados correspondientes de la (ec. 2) de la (ec. 1). Los términos en color rojo se anulan, dejando

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1r^n$$

Ahora, despejamos s_n.

$$\begin{aligned} s_n(1-r) &= a_1(1-r^n) && \text{Factorizar.} \\ s_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} && \text{Dividir ambos lados entre } 1-r. \end{aligned}$$

Así, tenemos la fórmula siguiente para la n-ésima suma parcial de una serie geométrica.

n-ésima suma parcial de una serie geométrica

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

EJEMPLO 4 ▸ Determine la séptima suma parcial de una serie geométrica cuyo primer término es 16 y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

Solución Al sustituir los valores apropiados para a, r y r, tenemos:

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$s_7 = \frac{16\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16\left(1+\frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16\left(\frac{129}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{129}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{43}{4}$$

Así, $s_7 = \frac{43}{4}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 5 Dados $s_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$, determine n.

Solución

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \quad \text{Sustituir los valores para } s_n, a_1 \text{ y } r.$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{-1}$$

$$-93 = 3(1 - 2^n) \quad \text{Ambos lados se multiplicaron por } -1.$$

$$-31 = 1 - 2^n \quad \text{Ambos lados se dividieron entre 3.}$$

$$-32 = -2^n \quad \text{Se restó 1 de ambos lados.}$$

$$32 = 2^n \quad \text{Ambos lados se dividieron entre } -1.$$

$$2^5 = 2^n \quad \text{Escribir 32 como } 2^5.$$

Por lo tanto, $n = 5$.

Ahora resuelva el ejercicio 65

Al trabajar con una serie geométrica, r puede ser un número positivo como vimos en el ejemplo 5, o un número negativo como vimos en el ejemplo 4.

4 Identificar series geométricas infinitas

Todas las sucesiones geométricas que hemos analizado hasta ahora han sido finitas, pues tenían un último término. La siguiente sucesión es un ejemplo de una sucesión geométrica infinita.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

Observe que los tres puntos suspensivos al final de la sucesión indican que ésta continúa de manera indefinida de la misma forma. La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita forma una **serie geométrica infinita**. Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

es una serie geométrica infinita. Calculemos algunas sumas parciales.

Suma parcial	Serie	Suma
Segunda	$1 + \frac{1}{2}$	1.5
Tercera	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	1.75
Cuarta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	1.875
Quinta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	1.9375
Sexta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	1.96875

Para cada suma parcial sucesiva, la cantidad que se le añade es menor que la de la suma parcial que le precede. Además, la suma parece acercarse cada vez más a 2. En el ejemplo 6, mostraremos que la suma de esta serie geométrica infinita en realidad es 2.

5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita

Consideremos la fórmula para la suma de los primeros n términos de una serie geométrica:

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

¿Qué ocurre con r^n, si $|r| < 1$ y n cada vez que se hace más grande? Supongamos que $r = \frac{1}{2}$; entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.000001$$

Podemos ver que cuando $|r| < 1$ el valor de r^n se acerca mucho a 0 cuando n es cada vez más grande. Así, al considerar la suma de una serie geométrica infinita, que denotamos como s_∞, la expresión r^n tiende a 0 cuando $|r| < 1$. Por lo tanto, si reemplazamos r^n con 0 en la fórmula $s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ obtenemos la fórmula siguiente.

Suma de una serie geométrica infinita

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{donde} \quad |r| < 1$$

EJEMPLO 6 Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Solución $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Observe que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Así, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots = 2$.

Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 7 Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} + \cdots$$

Solución Los términos de la sucesión correspondiente son $3, -\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, -\frac{24}{125}, \ldots$ Observe que $a_1 = 3$. Para determinar la razón común, r, podemos dividir el segundo término, $-\frac{6}{5}$, entre el primer término, 3.

$$r = -\frac{6}{5} \div 3 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}.$$

Como $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$,

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{3}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{7}{5}} = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 8 ▸ Escriba 0.343434... como una razón de dos enteros.

Solución Podemos escribir este decimal como

$$0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \cdots + (0.34)(0.01)^{n-1} + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica infinita, con $r = 0.01$. Puesto que $|r| < 1$,

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.34}{1-0.01} = \frac{0.34}{0.99} = \frac{34}{99}$$

Si divide 34 entre 99 en una calculadora, verá el valor 0.34343434.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 81

¿Cuál es la suma de una serie geométrica cuando $|r| > 1$? Considere la sucesión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

La suma de sus términos es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$$

¿Cuál es la suma de esta serie? Conforme n crece, la suma se hace cada vez más grande. Por lo tanto, decimos que la suma "no existe". Para $|r| > 1$, la suma de una serie geométrica no existe.

6 Estudiar aplicaciones de series geométricas

Ahora veamos algunas aplicaciones de sucesiones y series geométricas.

EJEMPLO 9 ▸ **Cuenta de ahorros** Jean Simmons invierte, en una cuenta de ahorros, \$1000 al 5% de interés compuesto cada año. Determine la cantidad en su cuenta y el monto de interés generado al final de 10 años.

Solución **Entienda el problema** Suponga que P representa el capital invertido. Al inicio del segundo año, el monto crece a $P + 0.05P$ o $1.05P$. Este monto será el capital invertido durante el segundo año. Al inicio del tercer año, el capital del segundo año crecerá 5% a $(1.05P)(1.05)$ o $(1.05)^2P$. El monto en la cuenta de Jean al inicio de los años sucesivos es

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
P	$1.05P$	$(1.05)^2P$	$(1.05)^3P$

y así sucesivamente. Ésta es una serie geométrica con $r = 1.05$. El monto en su cuenta al final de 10 años, será la misma cantidad en su cuenta al inicio del año 11. Por lo tanto, utilizamos la fórmula,

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad \text{con} \quad r = 1.05 \quad \text{y} \quad n = 11$$

Traduzca Tenemos una sucesión geométrica con $a_1 = 1000$, $r = 1.05$ y $n = 11$. Al sustituir estos valores en la fórmula, obtenemos lo siguiente

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1000(1.05)^{11-1} \\ &= 1000(1.05)^{10} \\ &\approx 1000(1.62889) \\ &\approx 1628.89 \end{aligned}$$

Responda Al cabo de 10 años, el monto en la cuenta es alrededor de \$1628.89. El monto del interés es \$1628.89 − \$1000 = \$628.89.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 10 ▸ **Dinero** Suponga que alguien le ofrece $1000 diarios por cada día de un mes de 30 días. O podría elegir un centavo el día 1, 2 centavos el día 2, 4 centavos el día 3, 8 centavos el día 4, y así sucesivamente. El monto continuaría duplicándose cada día durante 30 días.

a) Sin hacer cálculos, tome una decisión de cuál de las dos ofertas le proporcionaría el mayor ingreso total en los 30 días.

b) Calcule el monto total que recibiría si prefiriera $1000 diarios durante 30 días.

c) Calcule el monto que recibiría el día 30, si eligiera 1 centavo el día 1 y la cantidad se duplicara cada día durante 30 días.

d) Calcule el monto total que recibiría si eligiera 1 centavo el día 1 y se duplica la cantidad cada día durante 30 días.

Solución

a) Cada quien tendrá su propia respuesta para la parte **a)**.

b) Si recibiera $1000 diarios durante 30 días, recibiría 30($1000) = $30,000.

c) Entienda el problema Como la cantidad se duplica cada día, esto representa una serie geométrica con $r = 2$. La tabla siguiente muestra la cantidad que recibiría en cada uno de los primeros 7 días. También muestra las cantidades escritas con base 2, la razón común.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad (centavos	1	2	4	8	16	32	64
Cantidad (centavos)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Observe que para cualquier día dado, el exponente en el 2 es 1 menos que el número del día. Por ejemplo, el día 7, la cantidad es 2^6. En general, la cantidad en el día n es 2^{n-1}.

Traduzca Para determinar la cantidad que se recibe el día 30, evaluamos $a_n = a_1r^{n-1}$ para $n = 30$.

$$a_n = a_1r^{n-1}$$
$$a_{30} = 1(2)^{30-1}$$

Realice los cálculos

$$a_{30} = 1(2)^{29}$$
$$= 1(536{,}870{,}912)$$
$$= 536{,}870{,}912$$

Responda El día 30, la cantidad que recibiría es 536,870,912 centavos o $5,368,709.12.

d) Entienda el problema y traduzca Para determinar el monto total recibido durante los 30 días, determinaremos la trigésima suma parcial.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$s_{30} = \frac{1(1 - 2^{30})}{1 - 2}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{1(1 - 1{,}073{,}741{,}824)}{-1}$$
$$= 1{,}073{,}741{,}823$$

Responda Por lo tanto, durante los 30 días el monto total que recibiría por este método sería 1,073,741,823 centavos o $10,737,418.23. El monto recibido por este método sobrepasa por mucho los $30,000 que recibiría si eligiera $1000 diarios durante 30 días.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 87

EJEMPLO 11 ▶ **Péndulo** En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), cierto péndulo recorre el 90% de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Por ejemplo, si la oscilación a la derecha fue de 10 pies, la oscilación de regreso hacia la izquierda es de $0.9 \times 10 = 9$ pies (vea la **figura 11.1**). Si la primera oscilación es de 10 pies, determine la distancia total recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

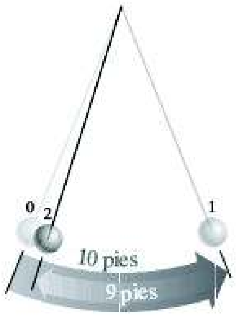


FIGURA 11.1

Solución **Entienda el problema** Este problema se puede considerar como una serie geométrica infinita, con $a_1 = 10$ y $r = 0.9$. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$ para determinar la distancia total recorrida por el péndulo.

Traduzca y realice los cálculos

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - 0.9} = \frac{10}{0.1} = 100 \text{ pies}$$

Responda Cuando el péndulo se detenga, habrá recorrido 100 pies.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 99

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una sucesión geométrica?
2. ¿Qué es una serie geométrica?
3. Explique cómo determinar la razón común en una sucesión geométrica.
4. ¿Qué es una serie geométrica infinita?
5. En una serie geométrica, si $|r| < 1$, ¿hacia dónde se aproxima r^n cuando n se hace cada vez más grande?
6. ¿La suma de una serie geométrica infinita existe cuando $|r| > 1$?
7. En una serie geométrica, ¿puede ser negativo el valor de r?
8. En una serie geométrica, ¿puede ser positivo el valor de r?
9. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = 1/4$, ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explique.
10. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = -2$, ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explique.

Práctica de habilidades

Determine los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.

11. $a_1 = 2, r = 3$
12. $a_1 = 2, r = -3$
13. $a_1 = 6, r = -\frac{1}{2}$
14. $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$
15. $a_1 = 72, r = \frac{1}{3}$
16. $a_1 = \frac{1}{8}, r = 4$
17. $a_1 = 90, r = -\frac{1}{3}$
18. $a_1 = 32, r = -\frac{1}{4}$
19. $a_1 = -1, r = 3$
20. $a_1 = -1, r = -3$
21. $a_1 = 5, r = -2$
22. $a_1 = -13, r = -1$
23. $a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{2}$
24. $a_1 = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{3}$
25. $a_1 = 3, r = \frac{3}{2}$
26. $a_1 = 60, r = -\frac{2}{5}$

Para cada sucesión geométrica, determine el término que se pide.

27. $a_1 = 4, r = 2$; determine a_6.
28. $a_1 = 4, r = -2$; determine a_6.
29. $a_1 = -12, r = \frac{1}{2}$; determine a_9.
30. $a_1 = 27, r = \frac{1}{3}$; determine a_7.
31. $a_1 = \frac{1}{4}, r = 2$; determine a_{10}.
32. $a_1 = 3, r = 3$; determine a_6.
33. $a_1 = -3, r = -2$; determine a_{12}.
34. $a_1 = -10, r = -2$; determine a_{10}.
35. $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}$; determine a_8.

36. $a_1 = 5, r = \frac{2}{3}$; determine a_9.
37. $a_1 = 50, r = \frac{1}{3}$; determine a_7.
38. $a_1 = -7, r = -\frac{3}{4}$; determine a_7.

Determine la suma indicada.

39. $a_1 = 3, r = 2$; determine s_5.
40. $a_1 = 7, r = -3$; determine s_5.
41. $a_1 = 2, r = 5$; determine s_6.
42. $a_1 = 9, r = \frac{1}{2}$; determine s_6.
43. $a_1 = 80, r = 2$; determine s_7.
44. $a_1 = 2, r = -2$; determine s_{12}.
45. $a_1 = -15, r = -\frac{1}{2}$; determine s_9.
46. $a_1 = \frac{3}{4}, r = 3$; determine s_7.
47. $a_1 = -9, r = \frac{2}{5}$; determine s_5.
48. $a_1 = 35, r = \frac{1}{5}$; determine s_{12}.

Para cada sucesión geométrica, determine la razón común, r, y luego escriba una expresión para el término general (n-ésimo), a_n.

49. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$
50. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$
51. $9, 18, 36, 72, \ldots$
52. $2, 6, 18, 54, \ldots$
53. $2, -6, 18, -54, \ldots$
54. $-1, -3, -9, -18, \ldots$
55. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$
56. $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \ldots$

Determine la suma de los términos en cada sucesión geométrica.

57. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
58. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
59. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$
60. $1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$
61. $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$
62. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$
63. $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \ldots$
64. $-\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, -\frac{4}{81}, \ldots$

Dados s_n, a_1 y r, determine n en cada serie geométrica.

65. $s_n = 93, a_1 = 3$ y $r = 2$
66. $s_n = 80, a_1 = 2$ y $r = 3$
67. $s_n = \frac{189}{32}, a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$
68. $s_n = \frac{121}{9}, a_1 = 9$ y $r = \frac{1}{3}$

Determine la suma de cada serie geométrica infinita.

69. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$
70. $8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$
71. $8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9} + \frac{64}{27} + \cdots$
72. $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \cdots$
73. $-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \cdots$
74. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$
75. $-12 - \frac{12}{5} - \frac{12}{25} - \frac{12}{125} - \cdots$
76. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

Escriba cada número con decimales periódicos (o que se repiten) como la razón de dos enteros.

77. 0.242424...
78. 0.454545...
79. 0.8888...
80. 0.375375...
81. 0.515151...
82. 0.742742...

Resolución de problemas

83. En una sucesión geométrica, $a_2 = 15$ y $a_5 = 405$; determine r y a_1.

84. En una sucesión geométrica, $a_2 = 27$ y $a_5 = 1$; determine r y a_1.

85. En una sucesión geométrica, $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$; determine r y a_1.

86. En una sucesión geométrica, $a_2 = 12$ y $a_5 = -324$; determine r y a_1.

87. Barra de pan Actualmente una hogaza de pan cuesta \$1.40. Determine su precio al cabo de 8 años (inicio del noveno año), si la inflación creciera a una razón constante de 3% al año. *Sugerencia:* Después de 1 año (al inicio del segundo año), el costo de la hogaza es \$1.40(1.03). Después de 2 años (al inicio del tercer año), el costo sería $\$1.40(1.03)^2$ y así sucesivamente.

88. Bicicleta Actualmente cierto tipo de bicicleta cuesta \$400. Determine su costo después de 12 años, si la inflación creciera a una tasa constante de 4% anual.

89. Masa Una sustancia pierde la mitad de su masa cada día. Si al inicio hay 300 gramos de la sustancia, determine

a) el número de días para que sólo queden 37.5 gramos de la sustancia.

b) la cantidad de la sustancia que queda después de 9 días.

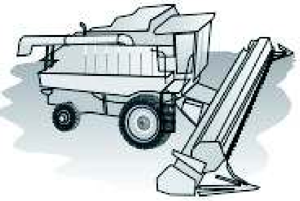
90. Bacterias El número de cierto tipo de bacterias se duplica cada hora. Si al inicio había 1000 bacterias, ¿después de cuántas horas el número de bacterias será 64,000?

91. Población El 1 de julio de 2005, la población de Estados Unidos era alrededor de 296.5 millones de personas. Si la población crece a una tasa de 1.1% por año, determine

a) la población al cabo de 10 años.

b) el número de años para que la población se duplique.

92. Equipo para granja Un equipo para la granja cuesta \$105,000 y su valor disminuye 15% cada año. Determine el valor del equipo al cabo de 4 años.



93. Luz filtrada La cantidad de luz que se filtra a través de un lago, disminuye un medio por cada metro de profundidad.

a) Escriba una sucesión que indique la cantidad de luz que se tiene en las profundidades de 1, 2, 3, 4 y 5 metros.

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión?

c) ¿Cuál es la cantidad de luz que llega a una profundidad de 7 metros?

94. Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre 80% de la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 10 pies, determine la distancia total que recorrió el péndulo hasta el momento que se detuvo.

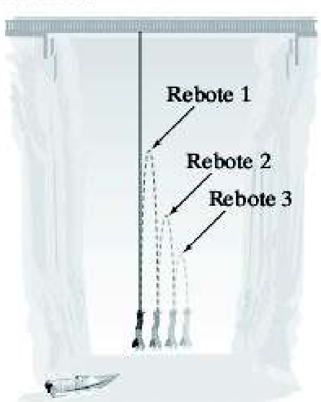
95. Inversión Usted invierte \$10,000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual. Determine la cantidad en su cuenta al cabo de 8 años.

96. Líquido de contraste Por razones médicas, un líquido de contraste se inyecta a Mark Damion. Después de cada hora quedan dos tercios del líquido de contraste que había una hora antes. Después de 10 horas, ¿cuánto líquido permanece en el sistema de Mark?

97. Salto de bungee Shawn Kelly salta de un bungee desde un puente. En el salto inicial, la cuerda del bungee se estira 220 pies. Suponga que el primer rebote alcanza una altura del 60% del salto original y que cada rebote adicional alcanza una altura del 60% del rebote anterior.

a) ¿Cuál es la altura del cuarto rebote?

b) En teoría, Shawna nunca pararía de rebotar, pero en la realidad, sí lo hará. Utilice la serie geométrica infinita para estimar la distancia total que Shawna recorre en dirección *descendente*.



98. Salto de bungee Repita el ejercicio 97 **b)**, pero esta vez determine la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

99. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de una mesa de 30 pulgadas de altura. Suponga que el primer rebote alcanza 70% de la distancia desde que cayó y cada rebote adicional alcanza 70% de la altura del rebote anterior.

a) ¿A qué altura llegará la pelota en el tercer rebote?

b) En teoría, la pelota nunca dejaría de rebotar, pero en la realidad lo hará. Estime la distancia total que recorre la pelota en dirección *descendente*.

100. Pelota de ping-pong Repita el ejercicio 99 **b)**, pero esta vez determine la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

101. Montón de fichas Suponga que forma montones de fichas de color negro, de tal forma que en cada montón hay el doble de fichas que en el montón anterior. Así, tendría montones con 1, 2, 4, 8, etcétera de fichas negras. También forma pilas de fichas rojas, iniciando con una ficha roja y luego triplicando el número de fichas en cada montón sucesivo. Así, los montones tendrían 1, 3, 9, 27, etcétera fichas rojas. ¿Cuántas fichas más habrá en el sexto montón de fichas rojas que en el sexto montón de fichas negras?

102. Montón de monedas Si inicia con \$1 y duplica su dinero cada día, ¿cuántos días tardará en superar \$1,000,000?

103. Depreciación Un método de depreciación de un artículo en los impuestos a los ingresos es el método de disminución de saldo. Con este método se deprecia cada año un porcentaje dado del costo del artículo. Suponga que un artículo tiene una vida de 5 años y se deprecia por medio del método de disminución de saldo. Entonces, al final del primer año, pierde $\frac{1}{5}$ de su valor y conserva $\frac{4}{5}$ de su valor. Al final del segundo año pierde $\frac{1}{5}$ de los $\frac{4}{5}$ restantes y así sucesivamente. Un automóvil tiene una expectativa de vida de 5 años y cuesta \$15,000.

a) Escriba una sucesión que muestre el valor del automóvil para cada uno de los primeros 3 años.

b) ¿Cuál es el término general de esta sucesión?

c) Determine el valor del automóvil al final de los 5 años.

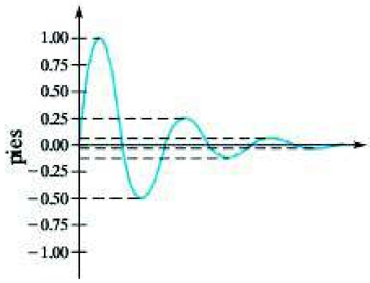
104. Valor de desecho En el ejercicio 77, de la página 635, en el conjunto de ejercicios 9.6, se dio una fórmula para el valor de desecho. Este valor, S, es $S = c(1 - r)^n$ donde c es el costo original, r es la tasa de depreciación anual y n es el número de años que el objeto se deprecia.

a) Si no ha resuelto el problema 103 anterior, hágalo ahora para determinar el valor del automóvil al final de los 5 años.

b) Utilice la fórmula dada para determinar el valor de desecho del automóvil al final de los 5 años y compare esta respuesta con la respuesta que encontró en la parte **a)**.

105. Rebote de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 10 pies. La pelota rebota hasta una altura de 9 pies. En cada rebote sucesivo, la pelota se eleva hasta el 90% de la altura anterior. Determine la *distancia vertical total* que recorre la pelota hasta que se detiene.

106. **Acción de las ondas** Una partícula sigue la trayectoria que se muestra en la onda. Determine la *distancia vertical total* que recorre la partícula.



107. La fórmula para el n-ésimo término de la sucesión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Si $a_1 = 1$, $a_n = r^{n-1}$.

a) Compare las gráficas de $y_1 = 2^{n-1}$ y $y_2 = 3^{n-1}$. ¿Cómo son?

b) Grafique y_1 y y_2 y determine si su respuesta a la parte **a)** fue correcta.

108. Utilice su calculadora graficadora para decidir el valor de n, al centésimo más cercano, de modo que $100 = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Reto

109. Determine la suma de la sucesión 1, 2, 4, 8, . . . , 1,048,576 y el número de términos en la sucesión.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.6] **110.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 3$. Determine $(f \cdot g)(4)$.

[5.2] **111.** Multiplique $(2x - 3y)(3x^2 + 4xy - 2y^2)$.

[6.4] **112.** Despeje r de $S = \dfrac{2a}{1 - r}$.

[9.1] **113.** Sea $g(x) = x^3 + 9$. Determine $g^{-1}(x)$.

[9.6] **114.** Resuelva $\log x + \log (x - 1) = \log 20$.

[10.4] **115.** **Vela de un velero** Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con un perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determine la longitud de cada cateto del triángulo.

Examen de mitad de capítulo: 11.1-11.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en la que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = -3n + 5$.

2. Si $a_n = n(n + 6)$, determine el séptimo término.

3. Determine la primera y la tercera suma parcial, s_1 y s_3, para la sucesión cuyo término n-ésimo es $a_n = 2^n - 1$.

4. Escriba los tres términos siguientes de la sucesión 5, 1, −3, −7, −11, ...

5. Evalúe la serie $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.

6. Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{3}n + 7$, escriba una expresión mediante Σ para representar la quinta suma parcial.

7. Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión aritmética con $a_1 = -6$ y $d = 5$. Determine una expresión para el término general a_n.

8. Determine d para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{11}{2}$ y $a_7 = -\frac{1}{2}$.

9. Determine n para la sucesión aritmética con $a_1 = 22$, $a_n = -3$ y $d = -5$.

10. Determine la diferencia común, d, y la suma, s_6, para la sucesión aritmética con $a_1 = -8$ y $a_6 = 7$.

11. Determine s_{10} para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{5}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$.

12. Determine el número de términos en la sucesión aritmética −7, 0, 7, 14, . . . , 63.

13. Se apilan troncos en una pila con 16 troncos en la fila inferior, 15 en la siguiente, 14 en la otra, y así sucesivamente hasta que la fila superior termina con un tronco. Cada fila tiene un tronco menos que la fila que le precede. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

14. Escriba los primeros cinco términos de la serie geométrica con $a_1 = 80$ y $r = -\frac{1}{2}$.

15. Determine a_7 para la sucesión geométrica con $a_1 = 81$ y $r = \frac{1}{3}$.

16. Determine s_6 para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$ y $r = 2$.

17. Para la sucesión geométrica $8, -\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, -\frac{64}{27}, \ldots$, determine r.

18. Determine la suma de la serie infinita $12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$.

19. Escriba el decimal periódico 0.878787. . . como un cociente de dos enteros.

20. **a)** ¿Qué es una sucesión?
b) ¿Qué es una sucesión aritmética?
c) ¿Qué es una sucesión geométrica?
d) ¿Qué es una serie?

11.4 Teorema del binomio

1. Evaluar factoriales.
2. Utilizar el triángulo de Pascal.
3. Utilizar el teorema del binomio.

1 Evaluar factoriales

Para comprender el teorema del binomio debe entender lo que son los **factoriales**. La notación $n!$ se lee "n factorial". Su definición es la siguiente.

n factorial

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$$

para cualquier entero positivo n.

Ejemplos

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Observe que, por definición, **0! es 1**.

A continuación explicamos cómo determinar factoriales por medio de una calculadora.

CÓMO USAR SU CALCULADORA

Calculadora científica

Los factoriales se pueden obtener en calculadoras que tienen una tecla $\boxed{n!}$ o $\boxed{x!}$ Con frecuencia, la tecla de factorial es una tecla de segunda función. En los ejemplos siguientes, las respuestas aparecen después de $\boxed{n!}$.

Evaluar 6! 6 $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{n!}$ 720

Evaluar 9! 9 $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{n!}$ 362880

Calculadora graficadora

Las calculadoras graficadoras no tienen una tecla de factorial. En algunas calculadoras graficadoras los factoriales se determinan en $\boxed{\text{MATH}}$, en el menú de funciones de probabilidad.

En la calculadora TI-84 Plus, para obtener el menú de funciones de probabilidad, PRB, presione $\boxed{\text{MATH}}$, y luego desplácese hacia la derecha, con la tecla de flecha $\boxed{\blacktriangleright}$, tres veces hasta que obtenga PRB. La $n!$ (o !) es el cuarto elemento del menú descendente.

Para determinar 5! o 6!, siga esta secuencia de teclas.

Secuencia de teclas	Respuesta
$\boxed{5}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	120
$\boxed{6}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	720

2 Utilizar el triángulo de Pascal

Mediante la multiplicación de polinomios podemos obtener los siguientes desarrollos de las potencias del binomio $a + b$:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Blaise Pascal

Observe que al desarrollar un binomio de la forma $(a + b)^n$,

1. Existen $n + 1$ términos en el desarrollo.
2. El primer término es a^n y el último término es b^n.
3. Si se leen de izquierda a derecha, los exponentes de a decrecen en 1 de un término a otro, mientras que los exponentes de b aumentan en 1 de un término a otro.
4. La suma de los exponentes de las variables de cada término es n.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Si sólo examinamos las variables en $(a + b)^5$, tenemos a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Podemos determinar los coeficientes numéricos de cada término del desarrollo de $(a + b)^n$ con el **triángulo de Pascal**, llamado así en honor de Blaise Pascal, matemático francés del siglo diecisiete. Por ejemplo, si $n = 5$, podemos determinar los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$ como sigue.

Exponente en el binomio	Triángulo de Pascal
$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Examinemos el renglón 5 ($n = 4$) y el renglón 6 ($n = 5$).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Observe que el primero y el último número de cada renglón son 1, y que los números interiores se obtienen sumando los dos números del renglón anterior (a la izquierda y a la derecha). Los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$ son 1, 5, 10, 10, 5 y 1. Así, podemos escribir el desarrollo de $(a + b)^5$ mediante la información de los incisos 1 a 5 anteriores para las variables y sus exponentes, y utilizando el triángulo de Pascal para sus coeficientes.

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Este método de desarrollo de un binomio no es práctico cuando n es grande.

3 Utilizar el teorema del binomio

En breve presentaremos un método más práctico, llamado teorema del binomio, para desarrollar expresiones de la forma $(a + b)^n$. Sin embargo, antes de presentar esta fórmula necesitamos explicar cómo determinar los *coeficientes binomiales* de la forma $\binom{n}{r}$.

Coeficientes binomiales

Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se lee "el número de *combinaciones* de n elementos tomando r a la vez". Las combinaciones se utilizan en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el estudio de la probabilidad.

EJEMPLO 1 Evalúe $\binom{6}{2}$.

Solución Por la definición, si sustituimos 5 en vez de n y 2 en vez de r, obtenemos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{(2\cdot 1)\cdot(\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1})} = 15$$

Así, $\binom{6}{2}$ es igual a 15.

Ahora resuelva el ejercicio 9

EJEMPLO 2 Evalúe

a) $\binom{7}{4}$ **b)** $\binom{8}{8}$ **c)** $\binom{5}{0}$

Solución

a) $$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{(\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1})(3\cdot 2\cdot 1)} = 35$$

b) $$\binom{8}{8} = \frac{8!}{8!\,(8-8)!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$$ Recuerde que $0! = 1$,

c) $$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\cdot(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{0!\cdot\cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora resuelva el ejercicio 17

Al estudiar los ejemplos 2 **b)** y **c)** puede deducir que para cualquier entero positivo n,

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{0} = 1$$

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Todas las calculadoras graficadoras pueden evaluar los coeficientes binomiales. En la mayoría se utiliza ${}_nC_r$ en lugar de $\binom{n}{r}$. Así, $\binom{7}{4}$ se representaría como ${}_7C_4$ en esas calculadoras.

En la calculadora TI-84 Plus, la notación ${}_nC_r$ se puede encontrar en el menú de funciones de probabilidad, PRB. En esta ocasión, el elemento 3 es ${}_nC_r$. Para determinar ${}_7C_4$ o bien ${}_8C_2$ utilice la secuencia de teclas siguiente:

	Secuencia de teclas	Respuesta
${}_7C_4$	7 MATH ▶ ▶ ▶ 3 4 ENTER	35
${}_8C_2$	8 MATH ▶ ▶ ▶ 3 2 ENTER	28

Si utiliza una calculadora graficadora diferente, consulte el manual para aprender a evaluar combinaciones.

Ahora presentaremos el teorema del binomio.

Teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Observe en el teorema del binomio que la suma de los exponentes de las variables en cada término es n. En la combinación, el número de arriba siempre es n y el número inferior siempre es igual al del exponente de la segunda variable del término.

Por ejemplo, si consideramos el término $\binom{n}{3}a^{n-3}b^{3}$, la suma de los exponentes de las variables es $(n-3)+3=n$. Además, el exponente de la variable b es 3, y el número inferior de la combinación también es 3.

Si las variables y los exponentes en un término del teorema del binomio son a^7b^5, entonces n debe ser $7+5=12$. También, la combinación que precede a a^7b^5 debe ser $\binom{12}{5}$. Así, el término sería $\binom{12}{5}a^7b^5$.

Ahora desarrollaremos $(a+b)^5$ mediante el teorema del binomio y veremos si obtenemos la misma expresión que cuando utilizamos la multiplicación de polinomios y el triángulo de Pascal.

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^{5-1}b^1+\binom{5}{2}a^{5-2}b^2+\binom{5}{3}a^{5-3}b^3+\binom{5}{4}a^{5-4}b^4+\binom{5}{5}a^{5-5}b^5\\
&= \binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^4b^1+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}a^1b^4+\binom{5}{5}a^0b^5\\
&= \frac{5!}{0!\cdot 5!}a^5+\frac{5!}{1!\cdot 4!}a^4b+\frac{5!}{2!\cdot 3!}a^3b^2+\frac{5!}{3!\cdot 2!}a^2b^3+\frac{5!}{4!\cdot 1!}ab^4+\frac{5!}{5!\cdot 0!}b^5\\
&= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}$$

Ésta es la misma expresión que obtuvimos antes.

En el teorema del binomio, el primero y último términos de un desarrollo contienen un factor elevado a la potencia cero. Como cualquier número distinto de cero elevado a la potencia 0 es igual a uno, podríamos haber omitido esos factores, pero los hemos incluido para que observe mejor el patrón.

EJEMPLO 3 Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(2x+3)^6$.

Solución Si utilizamos $2x$ como a y 3 como b, obtenemos

$$\begin{aligned}
(2x+3)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6(3)^0+\binom{6}{1}(2x)^5(3)^1+\binom{6}{2}(2x)^4(3)^2+\binom{6}{3}(2x)^3(3)^3+\binom{6}{4}(2x)^2(3)^4+\binom{6}{5}(2x)^1(3)^5+\binom{6}{6}(2x)^0(3)^6\\
&= 1(2x)^6+6(2x)^5(3)+15(2x)^4(9)+20(2x)^3(27)+15(2x)^2(81)+6(2x)(243)+1(729)\\
&= 64x^6+576x^5+2160x^4+4320x^3+4860x^2+2916x+729
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 4 Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(5x-2y)^4$.

Solución Escribimos $(5x-2y)^4$ como $[5x+(-2y)]^4$. En el teorema del binomio, utilizamos $5x$ en vez de a y $-2y$ en vez de b.

$$\begin{aligned}
[5x+(-2y)]^4 &= \binom{4}{0}(5x)^4(-2y)^0+\binom{4}{1}(5x)^3(-2y)^1+\binom{4}{2}(5x)^2(-2y)^2+\binom{4}{3}(5x)^1(-2y)^3+\binom{4}{4}(5x)^0(-2y)^4\\
&= 1(5x)^4+4(5x)^3(-2y)+6(5x)^2(-2y)^2+4(5x)(-2y)^3+1(-2y)^4\\
&= 625x^4-1000x^3y+600x^2y^2-160xy^3+16y^4
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.4

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo construir el triángulo de Pascal. Construya los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal.
2. Explique cómo determinar $n!$ para cualquier entero no negativo.
3. Proporcione el valor de 1!
4. Proporcione el valor de 0!
5. ¿Puede evaluar $(-3)!$? Explique.
6. ¿Puede evaluar $(-6)!$? Explique.
7. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo de $(a + b)^{13}$? Explique.
8. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo de $(x + y)^{20}$? Explique.

Práctica de habilidades

Evalúe cada una de las combinaciones.

9. $\binom{5}{2}$
10. $\binom{6}{3}$
11. $\binom{5}{5}$
12. $\binom{9}{3}$
13. $\binom{7}{0}$
14. $\binom{10}{7}$
15. $\binom{8}{4}$
16. $\binom{12}{3}$
17. $\binom{8}{2}$
18. $\binom{11}{4}$

Utilice el teorema del binomio para desarrollar cada expresión.

19. $(x + 4)^3$
20. $(x - 4)^3$
21. $(2x - 3)^3$
22. $(2x + 3)^3$
23. $(a - b)^4$
24. $(2r + s^2)^4$
25. $(3a - b)^5$
26. $(x + 2y)^5$
27. $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^4$
28. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)^4$
29. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^4$
30. $(3x^2 + y)^5$

Escriba los cuatro primeros términos de cada desarrollo.

31. $(x + 10)^{10}$
32. $(2x + 3)^8$
33. $(3x - y)^7$
34. $(3p - 2q)^{11}$
35. $(x^2 - 3y)^8$
36. $\left(2x + \frac{y}{7}\right)^9$

Resolución de problemas

37. ¿$n!$ es igual a $n \cdot (n - 1)!$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
38. ¿$(n + 1)!$ es igual a $(n + 1) \cdot n!$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
39. ¿Es $(n - 3)!$ igual a $(n - 3)(n - 4)(n - 5)!$ para $n \geq 5$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
40. ¿Es $(n + 2)!$ igual a $(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)!$ para $n \geq 1$? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
41. ¿Bajo qué condiciones $\binom{n}{m}$, tendrá un valor de 1? Considere que n y m son enteros no negativos.
42. ¿Puede $\binom{n}{m}$ llegar a tener un valor de 0? Explique.
43. ¿Cuáles son el primero, segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(x + 3)^8$?
44. ¿Cuáles son el primero, segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(2x + 5)^6$?
45. Escriba el teorema del binomio usando notación de suma.
46. Demuestre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para cualesquiera enteros no negativos n y r, con $r \leq n$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] 47. Determine la intersección con el eje y de la recta $2x + y = 10$.

[4.1] 48. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

[5.8] 49. Resuelva $x(x - 11) = -18$.

[7.4] 50. Simplifique $\sqrt{20xy^4}\,\sqrt{6x^5y^7}$.

[9.1] 51. Determine $f^{-1}(x)$ si $f(x) = 3x + 8$.

Resumen del capítulo 11

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 11.1

Una **sucesión** de números es una lista de números acomodados en un orden específico. Cada número se denomina **término** de la sucesión.

2, 6, 10, 14, 18, 22, ... es una sucesión.
7, 14, 21, 28, 35, 42, ... es una sucesión.

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Rango:} & \{7, & 14, & 21, & 28, & \ldots & 7n, & \ldots\} \end{array}$$

La sucesión infinita es 7, 14, 21, 28, ...

Una **sucesión finita** es una función cuyo dominio sólo incluye a los primeros n números naturales.

$$\begin{array}{lcccc} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rango:} & \{4, & 8, & 12, & 16\} \end{array}$$

La sucesión finita es 4, 8, 12, 16.

El **término general de una sucesión, a_n,** puede determinar la sucesión.

Sea $a_n = n^2 - 3$. Escriba los primeros tres términos de esta sucesión

$$a_1 = 1^2 - 3 = -2$$
$$a_2 = 2^2 - 3 = 1$$
$$a_3 = 3^2 - 3 = 6$$

Los primeros tres términos de la sucesión son $-2, 1, 6$.

Una **sucesión creciente** es una sucesión en la que cada término es mayor que el término que le precede.

$-2, 5, 7, 11$ es una sucesión creciente.

Una **sucesión decreciente** es una sucesión en la que cada término es menor que el término que le precede.

50, 48, 46, 44 es una sucesión decreciente.

Una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita.

Si la sucesión es 1, 3, 5, 7, 9, entonces la serie es $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Si la sucesión es $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$

entonces la serie es $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots$.

Una **suma parcial**, s_n, de una sucesión infinita, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es la suma de los primeros n términos. Esto es,

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Sea $a_n = \dfrac{5 + n}{n^2}$. Calcule s_1 y s_3.

$$s_1 = a_1 = \frac{5 + 1}{1^2} = \frac{6}{1} = 6$$
$$\begin{aligned} s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= \frac{5 + 1}{1^2} + \frac{5 + 2}{2^2} + \frac{5 + 3}{3^2} \\ &= \frac{6}{1} + \frac{7}{4} + \frac{8}{9} = 8\frac{23}{36} \end{aligned}$$

Una serie puede escribirse mediante la **notación de suma**:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

i es el **índice de la suma**, n es el **límite superior de la suma** y 1 es el **límite inferior de la suma**.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} (3i - 7) &= (3 \cdot 1 - 7) + (3 \cdot 2 - 7) + (3 \cdot 3 - 7) + (3 \cdot 4 - 7) \\ &= -4 - 1 + 2 + 5 = 2 \end{aligned}$$

Si $a_n = 6n^2 + 11$, la tercera suma parcial, s_3, en la notación de suma, se escribe como $\sum_{i=1}^{3} (6i^2 + 11)$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.2	
Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término después del primero difiere del término que le precede en una **diferencia común**, d.	Sucesión aritmética / Diferencia común, d $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ $d = 8 - 3 = 5$ $20, 14, 8, 2, -4, \ldots$ $d = 14 - 20 = -6$
El **n-ésimo término**, a_n, de una sucesión aritmética es $$a_n = a_1 + (n-1)d$$	El n-ésimo término de la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $d = -5$ es $$a_n = 7 + (n-1)(-5) = 7 - 5n + 5 = -5n + 12$$ Para esta sucesión, el vigésimo término es $$a_{20} = -5(20) + 12 = -100 + 12 = -88$$
Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión aritmética, también conocida como la **n-ésima suma parcial** es $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ Para una serie aritmética, esta suma está determinada por la fórmula $$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$	Determine la suma de los primeros 30 números naturales. Esto es, determine la suma de $$1 + 2 + 3 + \cdots + 30$$ Como $a_1 = 1$, $a_{30} = 30$ y $n = 30$, la suma es $$s_{30} = \frac{30(1+30)}{2} = \frac{30(31)}{2} = 465$$
Sección 11.3	
Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la que cada término, a partir del segundo, es un múltiplo común del término que le precede. El múltiplo común se denomina **razón común**, r.	Sucesión geométrica / Razón común, r $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ $r = \frac{6}{2} = 3$ $8, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots$ $r = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
El **n-ésimo término**, a_n, de una sucesión geométrica es $$a_n = a_1 r^{n-1}$$	Para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$, a_6 se determina como sigue. $$a_6 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$
Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica también conocida como la **n-ésima suma parcial**, es $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$ Para una serie geométrica, esta suma está determinada por la fórmula $$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$	Para determinar la suma de los seis términos de una sucesión geométrica con $a_1 = 12$ y $r = \frac{1}{3}$, utilice la fórmula con $n = 6$ para obtener $$s_6 = \frac{12\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12\left[1 - \frac{1}{729}\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{12\left(\frac{728}{729}\right)}{\frac{1}{3}}$$ $$= 12\left(\frac{728}{729}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{2912}{81} \text{ o } 35\frac{77}{81}$$
La suma de una serie geométrica infinita es $$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \text{ donde } \lvert r \rvert < 1$$	Para determinar la suma de la serie infinita $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, utilice la fórmula con $a_1 = 4$ y $r = -\frac{1}{2}$ para obtener $$s_\infty = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ or } 2\frac{2}{3}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.4	
n factorial $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$ para cualquier entero positivo n. Observe que 0! se define como 1.	$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40{,}320$
Coeficientes binomiales Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ $\binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{0} = 1$	$\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\cdot4!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 35$ $\binom{10}{10} = 1,\ \binom{10}{0} = 1$
Teorema del binomio Para cualquier entero positivo, n. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$	$(x+2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(2y) + \binom{4}{2}x^2(2y)^2 + \binom{4}{3}x(2y)^3 + \binom{4}{4}(2y)^4$ $= 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3(2y) + 6\cdot x^2(4y^2) + 4\cdot x(8y^3) + 1\cdot16y^4$ $= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

Ejercicios de repaso del capítulo 11

[11.1] *Escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.*

1. $a_n = n + 5$ **2.** $a_n = n^2 + n - 3$ **3.** $a_n = \dfrac{6}{n}$ **4.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+4}$

Determine el término indicado de cada sucesión.

5. $a_n = 3n - 10$, séptimo término.

6. $a_n = (-1)^n + 5$, séptimo término.

7. $a_n = \dfrac{n+17}{n^2}$, noveno término.

8. $a_n = (n)(n-3)$, décimo primer término.

Para cada sucesión, determine la primera y la tercera suma parcial, s_1 y s_3.

9. $a_n = 2n + 5$

10. $a_n = n^2 + 8$

11. $a_n = \dfrac{n+3}{n+2}$

12. $a_n = (-1)^n(n+8)$

Escriba los siguientes tres términos de cada sucesión. Luego escriba una expresión para el término general, a_n.

13. $2, 4, 8, 16, \ldots$

14. $-27, 9, -3, 1, \ldots$

15. $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \ldots$

16. $13, 9, 5, 1, \ldots$

Desarrolle cada serie. Luego determine la suma de cada serie.

17. $\sum_{i=1}^{3} i^2 + 9$

18. $\sum_{i=1}^{4} i(i+5)$

19. $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{i^2}{6}$

20. $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{i}{i+1}$

Para el conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 9, x_3 = 7, x_4 = 10$, evalúe la suma que se indica.

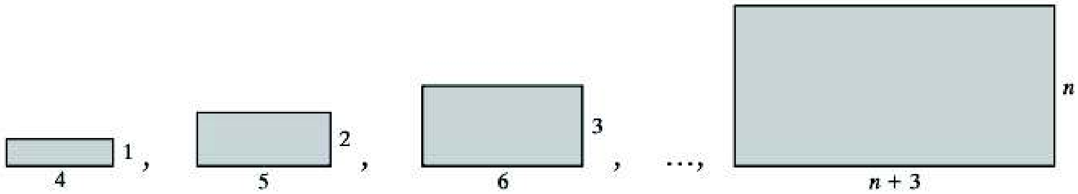
21. $\sum_{i=1}^{4} x_i$

22. $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$

23. $\sum_{i=2}^{3} (x_i^2 + 1)$

24. $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$

En los ejercicios 25 y 26, considere los rectángulos siguientes. Para el rectángulo n-ésimo, la longitud es $n + 3$ y el ancho es n.



25. Perímetro

a) Determine los perímetros de los cuatro rectángulos, y luego liste los perímetros en una sucesión.

b) Determine el término general para el perímetro del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice p_n para el perímetro.

26. Área

a) Determine las áreas para los cuatro rectángulos, y luego liste las áreas en una sucesión.

b) Determine el término general para el área del rectángulo n-ésimo en la sucesión. Utilice a_n para el área.

[11.2] *Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y la diferencia común indicados.*

27. $a_1 = 5, d = 3$

28. $a_1 = 5, d = -\frac{1}{3}$

29. $a_1 = \frac{1}{2}, d = -2$

30. $a_1 = -100, d = \frac{1}{5}$

Para cada sucesión aritmética, determine el valor que se indica.

31. $a_1 = 6, d = 3$; determine a_9

32. $a_1 = 10, a_8 = -18$; determine d.

33. $a_1 = -3, a_{11} = 2$; determine d.

34. $a_1 = 22, a_n = -3, d = -5$; determine n.

Determine s_n y d para cada sucesión aritmética.

35. $a_1 = 7, a_8 = 21, n = 8$

36. $a_1 = -12, a_7 = -48, n = 7$

37. $a_1 = \frac{3}{5}, a_6 = \frac{13}{5}, n = 6$

38. $a_1 = -\frac{10}{3}, a_9 = -6, n = 9$

Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión aritmética. Luego determine a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = -7, d = 4$

40. $a_1 = 4, d = -3$

41. $a_1 = \frac{5}{6}, d = \frac{2}{3}$

42. $a_1 = -60, d = 5$

Determine el número de términos en cada sucesión aritmética. Luego determine s_n.

43. $4, 9, 14, \ldots, 64$

44. $-7, -4, -1, \ldots, 11$

45. $\frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \ldots, \frac{36}{10}$

46. $-9, -3, 3, 9, \ldots, 45$

[11.3] *Determine los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.*

47. $a_1 = 6, r = 2$

48. $a_1 = -12, r = \frac{1}{2}$

49. $a_1 = 20, r = -\frac{2}{3}$

50. $a_1 = -20, r = \frac{1}{5}$

Determine el término que se indica de cada sucesión geométrica.

51. $a_1 = 6, r = \frac{1}{3}$; determine a_5

52. $a_1 = 15, r = 2$; determine a_6

53. $a_1 = -8, r = -3$; determine a_4

54. $a_1 = \frac{1}{12}, r = \frac{2}{3}$; determine a_5

Determine cada suma.

55. $a_1 = 7, r = 2$; determine s_6

56. $a_1 = -84, r = -\frac{1}{4}$; determine s_5

57. $a_1 = 9, r = \frac{3}{2}$; determine s_4

58. $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$; determine s_7

Para cada sucesión geométrica, determine la razón común, r, y luego escriba una expresión para el término general, a_n.

59. $6, 12, 24, \ldots$

60. $-4, -20, -100, \ldots$

61. $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \ldots$

62. $\frac{9}{5}, \frac{18}{15}, \frac{36}{45}, \ldots$

Determine la suma de los términos en cada sucesión geométrica infinita.

63. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

64. $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \ldots$

65. $-8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

66. $-6, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

Determine la suma de cada serie infinita.

67. $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$

68. $9 + \frac{9}{3} + \frac{9}{9} + \frac{9}{27} + \cdots$

69. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

70. $-4, -\frac{8}{3} - \frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \ldots$

Escriba cada número con decimales periódicos como una razón de enteros.

71. $0.363636\ldots$

72. $0.621621\ldots$

[11.4] *Utilice el teorema del binomio para desarrollar la expresión.*

73. $(3x + y)^4$

74. $(2x - 3y^2)^3$

Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo.

75. $(x - 2y)^9$

76. $(2a^2 + 3b)^8$

[11.2]

77. **Suma de enteros** Determine la suma de los enteros entre 101 y 200, inclusive.

78. **Barriles de petróleo** Los barriles de petróleo están apilados con 21 barriles en la fila inferior, 19 barriles en la segunda fila, 18 barriles en la tercera fila, y así sucesivamente, hasta la fila superior que sólo tiene un barril. ¿Cuántos barriles hay?

79. **Salario** Ahmed Mocanda acaba de iniciar en un trabajo nuevo con un salario anual de $36,000. Se le ha dicho que su salario aumentará $1000 por año durante los próximos 10 años.

a) Escriba una sucesión que muestre su salario para los primeros 4 años.

b) Escriba un término general de esta sucesión.

c) ¿Cuál será su salario dentro de 6 años?

d) ¿Cuánto dinero obtendrá en total en los primeros 11 años?

[11.3]

80. **Dinero** Usted inicia con $100, lo duplica para obtener $200, nuevamente lo duplica para obtener $400, y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá después de realizar este proceso 10 veces?

81. **Salario** Gertude Dibble inició un trabajo nuevo el día 1 de enero de 2006, con un salario mensual de $1600. Su jefa ha acordado darle 4% de aumento cada mes, durante el resto del año.

a) ¿Cuál será el salario de Gertude en julio?

b) ¿Cuál será el salario de Gertude en diciembre?

c) ¿Cuánto dinero ganará Gertude en 2006?

82. **Inflación** Si la tasa de inflación fuese constante del 8% anual (cada año el costo de la vida es 8% mayor que el año anterior), ¿cuánto costaría dentro de 12 años un producto que ahora cuesta $200?

83. **Péndulo** En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre el 92% de lo que recorrió en la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 12 pies, determine la distancia recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

Examen de práctica del capítulo 11

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. ¿Qué es una serie?
2. **a)** ¿Qué es una serie aritmética?
   b) ¿Qué es una serie geométrica?
3. Escriba los cinco primeros términos de la sucesión, si $a_n = \frac{n-2}{3n}$.
4. Determine la primera y la tercera sumas parciales, si $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$.
5. Desarrolle la serie siguiente y determine la suma de la serie.
$$\sum_{i=1}^{5}(2i^2+3)$$
6. Para $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 8$ y $x_4 = 10$, determine $\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2$.
7. Escriba el término general de la sucesión aritmética siguiente.
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$$
8. Escriba el término general de la sucesión geométrica siguiente.
$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

En los ejercicios 9 y 10, escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión.

9. $a_1 = 15, d = -6$
10. $a_1 = \frac{5}{12}, r = \frac{2}{3}$
11. Determine a_{11} cuando $a_1 = 40$ y $d = -8$.
12. Determine s_8 para la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $a_8 = -12$.
13. Determine el número de términos en la sucesión aritmética $-4, -16, -28, \ldots, -136$.
14. Determine a_6 cuando $a_1 = 8$ y $r = \frac{2}{3}$.
15. Determine s_7 cuando $a_1 = \frac{3}{5}$ y $r = -5$.
16. Determine la razón común y escriba una expresión para el término general de la sucesión $15, 5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \ldots$.
17. Determine la suma de esta serie geométrica infinita.
$$4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$
18. Escriba 0.3939... como una razón de enteros.
19. Evalúe $\binom{8}{3}$.
20. Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2y)^4$.
21. **Media aritmética** Las calificaciones de los exámenes de Paul Misselwitz son 76, 93, 83, 87 y 71. Utilice $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ para determinar la media aritmética de las calificaciones de Paul.
22. **Una pila de troncos** Se apilan troncos con 13 piezas en la fila inferior, 12 troncos en la segunda fila, 11 troncos en la tercera fila, y así sucesivamente hasta la parte superior. ¿Cuántos troncos hay?
23. **Ahorro para el retiro** Con la finalidad de ahorrar para su retiro, Jamie Monroe planea ahorrar \$1000 el primer año, \$2000 el segundo año, \$3000 el tercer año, e incrementar la cantidad ahorrada en \$1000 en cada año sucesivo. ¿Cuánto habrá ahorrado al final del vigésimo año de estar ahorrando?
24. **Ingresos** Yolanda Rivera gana \$700 a la semana trabajando en una oficina de seguros. Su jefe le ha garantizado un aumento de 4% a la semana durante las siguientes 7 semanas. ¿Cuánto recibirá en la sexta semana?
25. **Cultivo de bacterias** El número de bacterias en un cultivo se triplica cada hora. Si al inicio había 500 bacterias en el cultivo, ¿cuántas bacterias habrá en el cultivo al final de la sexta hora?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material se indica después de la respuesta.

1. Despeje b de $A = \frac{1}{2}bh$.
2. Determine una ecuación de la recta que pasa por $(4, -2)$ y $(1, 9)$. Escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción.
3. Resuelva el sistema de ecuaciones.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$
4. Multiplique $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$.
5. Factorice $x^3 + 2x - 6x^2 - 12$.
6. Factorice $(a + b)^2 + 8(a + b) + 16$.
7. Reste $5 - \frac{x-1}{x^2+3x-10}$.
8. y varía directamente con el cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determine y cuando z es 50.
9. Si $f(x) = 2\sqrt[3]{x-3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{5x-15}$, determine todos los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

10. Resuelva $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$.

11. Resuelva completando el cuadrado.

$$x^2 + 2x + 15 = 0$$

12. Resuelva por medio de la fórmula cuadrática

$$x^2 - \frac{x}{5} - \frac{1}{3} = 0$$

13. **Números** El doble del cuadrado de un número positivo, disminuido en nueve veces el mismo número da como resultado 5. Determine el número.

14. Grafique $y = x^2 - 4x$ y etiquete los vértices.

15. Despeje a de $\log_a \frac{1}{64} = 6$.

16. Grafique $y = 2^x - 1$.

17. Determine una ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ y radio 7.

18. Grafique $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

19. Grafique $9x^2 + 16y^2 = 144$.

20. Determine la suma de la serie geométrica infinita.

$$6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$