3 Gráficas y funciones

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Los dos objetivos principales de este capítulo son brindarle una mejor comprensión de la graficación y de las funciones. La graficación es un elemento clave en éste y en muchos cursos de matemáticas. Las funciones están estrechamente relacionadas con la graficación, y son un concepto unificador en toda la matemática. Usaremos de manera constante las funciones y la graficación en el resto de este libro.

DIARIAMENTE VEMOS GRÁFICAS en periódicos y revistas. Veremos muchas de tales gráficas en este capítulo. Por ejemplo, en el ejercicio 74 de la página 172, se utiliza una gráfica para mostrar el crecimiento en el embarque de monitores LCD.

3.1 Gráficas

1. Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas.
2. Dibujar gráficas por medio de puntos.
3. Graficar ecuaciones no lineales.
4. Usar una calculadora graficadora.
5. Interpretar gráficas.

René Descartes

1 Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

Muchas relaciones algebraicas son más fáciles de entender, si podemos ver una representación visual de ellas. Una gráfica es una imagen que muestra la relación entre dos o más variables en una ecuación. Antes de aprender cómo construir una gráfica, debe conocer el sistema de coordenadas cartesiano.

El **sistema de coordenadas cartesiano** (o **rectangular**), nombrado en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), consiste en dos ejes (o rectas numéricas) en un plano, dibujadas de forma perpendicular una de la otra (**figura 3.1**). Observe cómo los dos ejes determinan **cuadrantes**, etiquetados con numerales romanos, I, II, III y IV.

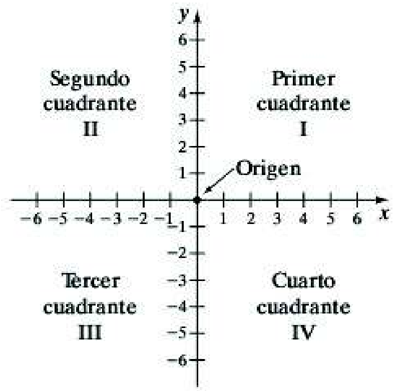


FIGURA 3.1

El eje horizontal se denomina **eje *x***. El eje vertical se denomina **eje *y***. El punto de intersección de los dos ejes se llama **origen**. Iniciando en el origen y moviéndose hacia la derecha, los números crecen; moviéndose hacia la izquierda, los números decrecen. Observe que el eje x y el eje y sólo son rectas numéricas, una horizontal y la otra vertical.

Un **par** (pareja) **ordenado** (x, y) se utiliza para dar las dos **coordenadas** de un punto. Si, por ejemplo, la coordenada x de un punto es 2 y la coordenada y es 3, el par ordenado que representa a ese punto es $(2, 3)$. La coordenada x siempre es la primera coordenada en el par ordenado. Para ubicar un punto, encuentre la coordenada x en el eje x y la coordenada y en el eje y, luego suponga que existe una recta vertical imaginaria desde la coordenada x y una recta horizontal imaginaria desde la coordenada y; el punto se coloca donde se intersequen las dos rectas imaginarias.

Por ejemplo, el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$ aparece en la **figura 3.2**. Con frecuencia, abreviamos la frase "el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$" como "el punto $(2, 3)$". Por ejemplo, si escribimos "el punto $(-1, 5)$", esto significa el punto correspondiente al par ordenado $(-1, 5)$. En la **figura 3.3** aparecen los pares ordenados A en $(-2, 3)$, B en $(0, 2)$, C en $(4, -1)$ y D en $(-4, 0)$.

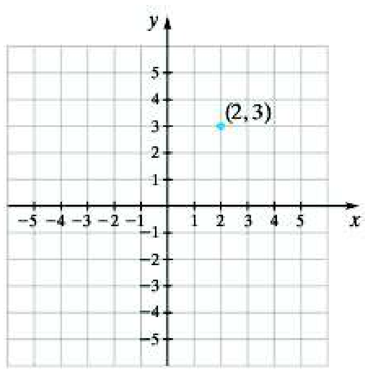


FIGURA 3.2

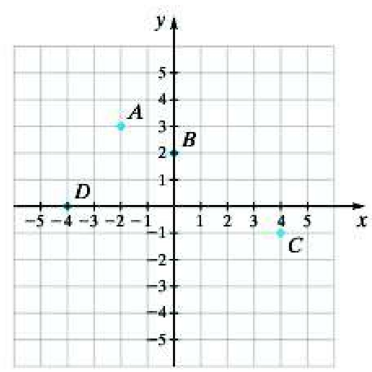


FIGURA 3.3

EJEMPLO 1 Localice cada uno de los siguientes puntos en el mismo conjunto de ejes.

a) $A(1, 4)$ **b)** $B(5, 5)$ **c)** $C(0, 2)$
d) $D(-3, 0)$ **e)** $E(-3, -1)$ **f)** $F(2, -4)$

Solución Vea la **figura 3.4**. Observe que el punto (1, 4) es diferente del (4, 1). También note que cuando la coordenada x es 0, como en la parte **c)**, el punto está en el eje y. Cuando la coordenada y es 0, como en la parte **d)**, el punto está en el eje x.

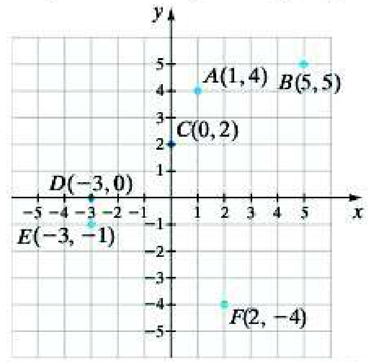


FIGURA 3.4

Ahora resuelva el ejercicio 7

2 Dibujar gráficas por medio de puntos

En el capítulo 2, resolvimos ecuaciones que tenían una variable. Ahora analizaremos ecuaciones que tienen dos variables. Si una ecuación tiene dos variables, sus soluciones son parejas de números.

EJEMPLO 2 Determine si los siguientes pares ordenados son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

a) $(1, -1)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
c) $(4, 6)$ **d)** $(-1, -5)$

Solución Sustituimos el primer número en el par ordenado por x y el segundo número por y. Si las sustituciones resultan en un enunciado verdadero, la pareja ordenada es una solución para la ecuación. Si las sustituciones dan como resultado una proposición falsa, la pareja ordenada no es una solución de la ecuación.

a)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -1 &\stackrel{?}{=} 2(1) - 3 \\ -1 &\stackrel{?}{=} 2 - 3 \\ -1 &= -1 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -2 &\stackrel{?}{=} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \\ -2 &\stackrel{?}{=} 1 - 3 \\ -2 &= -2 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ 6 &\stackrel{?}{=} 2(4) - 3 \\ 6 &\stackrel{?}{=} 8 - 3 \\ 6 &= 5 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} 2(-1) - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} -2 - 3 \\ -5 &\stackrel{?}{=} -5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Por tanto, las parejas ordenadas $(1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $(-1, -5)$ son soluciones para la ecuación $y = 2x - 3$. El par ordenado $(4, 6)$ no es una solución.

Ahora resuelva el ejercicio 17

Existen muchas otras soluciones para la ecuación en el ejemplo 2; de hecho, existe una infinidad de soluciones. Un método que puede utilizarse para determinar soluciones de una ecuación como $y = 2x - 3$ es sustituir valores para x y determinar los valores correspondientes de y. Por ejemplo, para determinar la solución para la ecuación $y = 2x - 3$ cuando $x = 0$, sustituimos 0 por x y resolvemos para y.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 2(0) - 3 \\ y &= 0 - 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Así, otra solución para la ecuación es $(0, -3)$.

Una **gráfica** es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Algunas veces cuando dibujamos una gráfica, listamos en una tabla algunos puntos que satisfacen la ecuación y luego localizamos esos puntos; después dibujamos una línea que pase por esos puntos para obtener la gráfica. A continuación está una tabla de algunos puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x - 3$. La gráfica se dibuja en la **figura 3.5**. Observe que la ecuación $y = 2x - 3$ tienen un número infinito de soluciones y que la recta continúa de manera indefinida en ambas direcciones (lo que se indica mediante las flechas).

En la **figura 3.5**, los cuatro puntos están en una línea recta. Puntos que están en una línea recta se dice que son **colineales**. La gráfica se denomina **lineal** ya que es una línea recta. Cualquier ecuación cuya gráfica es una línea recta se denomina **ecuación lineal**. La ecuación $y = 2x - 3$ es un ejemplo de una ecuación lineal. Las ecuaciones lineales, también se les denomina **ecuaciones de primer grado**, ya que el mayor exponente que aparece en las variables es 1. En los ejemplos 3 y 4, graficamos ecuaciones lineales.

x	y	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
$\frac{1}{2}$	-2	$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
1	-1	$(1, -1)$

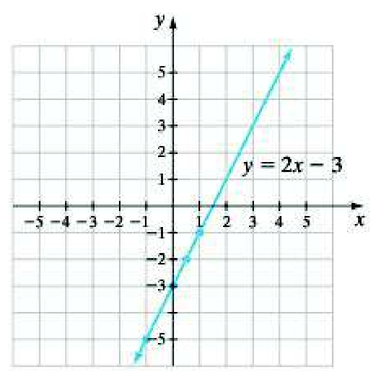


FIGURA 3.5

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo, y en varios de los siguientes, graficaremos puntos y trazaremos gráficas usando el sistema de coordenadas cartesiano. Algunas veces los estudiantes tienen problemas al dibujar gráficas precisas. Las siguientes son algunas sugerencias para mejorar la calidad de sus gráficas.

1. Para su tarea, utilice papel cuadriculado para dibujar sus gráficas. Esto le ayudará a mantener una escala consistente en su gráfica. Pregunte a su profesor si puede utilizar este tipo de papel en sus exámenes.
2. Utilice una regla para dibujar los ejes y rectas. Sus ejes y rectas se verán mucho mejor y mucho más precisos si las dibuja con una regla.
3. Si no utiliza papel cuadriculado, utilice una regla para hacer consistente la escala en sus ejes. Es imposible obtener una gráfica precisa cuando los ejes están marcados con una escala desigual.
4. Utilice un lápiz en lugar de una pluma, pues puede cometer un error al dibujar su gráfica. Así podrá corregir con rapidez un error con una goma y no tendrá que iniciar desde el principio.
5. Necesitará mucha práctica para mejorar sus habilidades. Trabaje todos los problemas que se le asignen. Para verificar sus gráficas de los ejercicios con número par, puede usar una calculadora graficadora.

EJEMPLO 3 ▸ Grafique $y = x$.

Solución Primero determinamos parejas ordenadas que sean soluciones seleccionando valores de x y determinando los valores correspondientes de y. Seleccionaremos 0, algunos valores positivos y algunos valores negativos para x. En general, seleccionaremos números cercanos a 0, de modo que las parejas ordenadas se ajusten en los ejes. La gráfica se ilustra en la **figura 3.6**.

x	y	(x, y)
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$

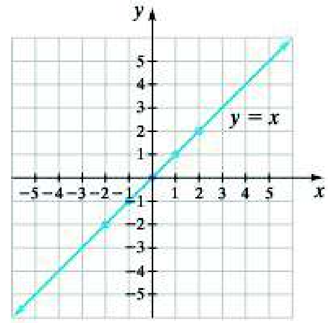


FIGURA 3.6

1. Seleccione valores para x
2. Calcule y
3. Parejas ordenadas
4. Trace los puntos y dibuje la gráfica

▸ Ahora resuelva el ejercicio 27

Al graficar ecuaciones lineales que contienen fracciones solemos seleccionar valores para x que sean múltiplos del denominador del término x. Esta selección, por lo común, da como resultado los valores de y que se convierten en valores enteros. Esto se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Solución Seleccionaremos algunos valores para x, determinaremos los valores correspondientes de y y luego haremos la gráfica. Cuando elegimos valores para x, seleccionaremos algunos valores positivos, algunos valores negativos y 0. La gráfica se ilustra en la **figura 3.7**. (Para ahorrar espacio, en la tabla no siempre listaremos una columna para los pares ordenados).

x	y
-6	3
-3	2
0	1
3	0
6	-1

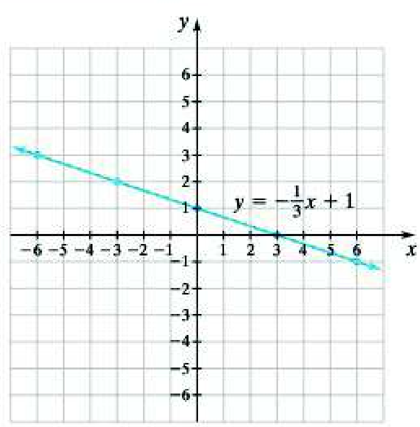


FIGURA 3.7

1. Seleccione valores para x
2. Calcule y
3. Trace los puntos y dibuje la gráfica

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

En el ejemplo 4, observe que seleccionamos valores de x que fueron múltiplos de 3, así no tuvimos que trabajar con fracciones.

Si nos piden graficar una ecuación que no tiene despejada a la y, tal como $x + 3y = 3$, nuestro primer paso será despejar a y de la ecuación. Por ejemplo, si despejamos a y de $x + 3y = 3$, utilizando el procedimiento estudiado en la sección 2.2, obtenemos

$$x + 3y = 3$$

$$3y = -x + 3 \qquad \text{Reste } x \text{ de ambos lados.}$$

$$y = \frac{-x + 3}{3} \qquad \text{Divida ambos lados entre 3.}$$

$$y = \frac{-x}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}x + 1$$

La ecuación resultante, $y = -\frac{1}{3}x + 1$, es la misma ecuación que graficamos en el ejemplo 4. Por lo tanto, la gráfica de $x + 3y = 3$ también aparece ilustrada en la **figura 3.7**.

3 Graficar ecuaciones no lineales

Existen muchas ecuaciones cuyas gráficas no son líneas rectas. Tales ecuaciones se denominan **ecuaciones no lineales**. Para graficarlas por medio del trazo de puntos seguimos el mismo procedimiento empleado para graficar ecuaciones lineales. Sin embargo, como las gráficas no son líneas rectas, podríamos necesitar más puntos para dibujar las gráficas.

EJEMPLO 5 ▸ Grafique $y = x^2 - 4$.

Solución Seleccionamos algunos valores para x y determinamos los valores correspondientes de y. Luego trazamos esos puntos y los conectamos por medio de una curva suave. Cuando sustituimos valores para x y evaluamos el lado derecho de la ecuación, seguimos el orden de las operaciones estudiado en la sección 1.4. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $y = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. La gráfica se muestra en la **figura 3.8**.

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

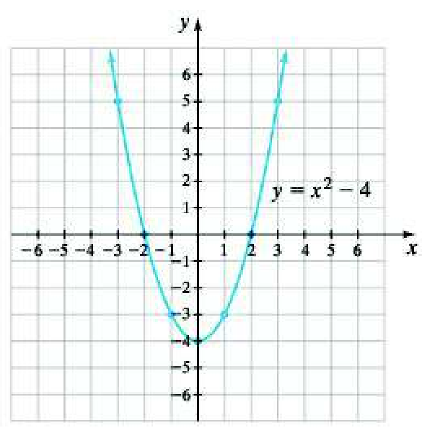


FIGURA 3.8

Si sustituimos 4 por x, y sería igual a 12. Cuando $x = 5$, $y = 21$. Observe que esta gráfica crece de manera consistente alejándose del origen.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 6 Grafique $y = \frac{1}{x}$.

Solución Iniciamos por seleccionar valores para x y determinar los valores correspondientes de y. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica. Observe que si sustituimos 0 por x, obtenemos $y = \frac{1}{0}$. Como $\frac{1}{0}$ no está definido, no podemos utilizar al 0 como primera coordenada. No habrá parte de la gráfica en $x = 0$. Trazaremos puntos a la izquierda de $x = 0$ y puntos a la derecha de $x = 0$ de forma separada. Seleccione puntos cercanos a 0 para ver qué le sucede a la gráfica cuando x es cercana a $x = 0$. Por ejemplo, observe que cuando $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$. Esta gráfica tiene dos ramas, una a la izquierda del eje y y una a la derecha del eje y, como se muestra en la **figura 3.9**.

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$

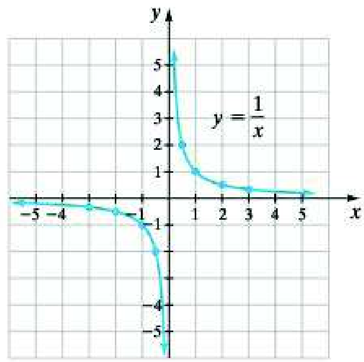


FIGURA 3.9

Ahora resuelva el ejercicio 51

En la gráfica del ejemplo 6, observe que para valores de x lejanos a 0 por la derecha, o lejanos a 0 por la izquierda, la gráfica se aproxima al eje x pero no lo toca. Por ejemplo, cuando $x = 1000$, $y = 0.001$ y cuando $x = -1000$, $y = -0.001$. ¿Puede explicar por qué y nunca puede tener un valor de 0?

EJEMPLO 7 Grafique $y = |x|$.

Solución Recuerde que $|x|$ se lee "valor absoluto de x". Los valores absolutos se estudiaron en la sección 1.3. Para graficar esta ecuación con valor absoluto, seleccionamos algunos valores para x y determinamos los valores correspondientes para y. Por ejemplo, si $x = -4$, entonces $y = |-4| = 4$. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica.

Observe que esta gráfica tiene forma de V, como se muestra en la **figura 3.10**.

x	y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

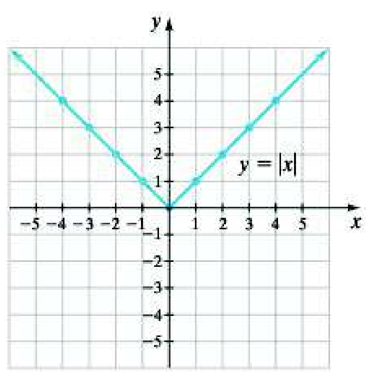


FIGURA 3.10

Ahora resuelva el ejercicio 45

Cómo evitar errores comunes

Cuando se grafican ecuaciones no lineales, muchos estudiantes no trazan suficientes puntos para obtener una imagen verdadera de la gráfica. Por ejemplo, cuando se grafica $y = \frac{1}{x}$ muchos estudiantes sólo consideran valores enteros para x. A continuación está una tabla de valores para la ecuación y dos gráficas que contienen los puntos indicados en la tabla.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

CORRECTO

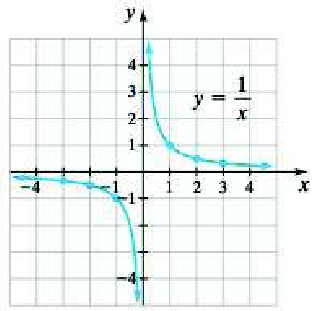


FIGURA 3.11

INCORRECTO

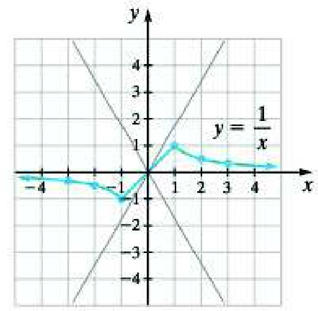


FIGURA 3.12

Si selecciona y traza valores fraccionarios de x cercanos a 0, como se hizo en el ejemplo 6, obtendría la gráfica de la **figura 3.11**. La gráfica de la **figura 3.12** no puede ser correcta ya que la ecuación no está definida cuando x es 0, y por tanto la gráfica no puede cruzar el eje y. Siempre que trace una gráfica que contenga una variable en el denominador, seleccione valores para la variable que estén muy cercanos al valor que haga al denominador igual a 0 y observe lo que sucede. Por ejemplo, cuando grafique $y = \frac{1}{x - 3}$ debe utilizar valores de x cercanos a 3, tales como 2.9 y 3.1 o 2.99 y 3.01, y ver qué valores obtiene para y.

También, cuando grafique ecuaciones no lineales, es buena idea considerar valores positivos y valores negativos. Por ejemplo, si sólo utiliza valores positivos de x cuando grafica $y = |x|$, la gráfica parecería ser una línea recta que pasa por el origen, en lugar de la gráfica en forma de V que se mostró en la **figura 3.10** de la página 149.

4 Usar una calculadora graficadora

Si una ecuación es complicada, determinar parejas de puntos consume tiempo. En esta sección presentamos un procedimiento general que puede usarse para graficar ecuaciones por medio de una **calculadora graficadora**.

Un uso principal de una calculadora graficadora es graficar ecuaciones. Una **ventana de graficación** es la pantalla rectangular en la que se muestra una gráfica.

En este libro todas las ventanas de graficación serán de las calculadoras graficadoras TI-83 Plus o TI-84 Plus. Ambas calculadoras muestran la misma ventana. En los recuadros *Cómo utilizar su calculadora graficadora* utilizados en todo el libro, en ocasiones indicaremos que la secuencia de teclas y las ventanas mostradas son para la calculadora graficadora TI-84 Plus. La misma secuencia de teclas y ventanas también son para la calculadora graficadora TI-83 Plus, aunque podríamos no indicarlo en los recuadros.

La **figura 3.13** muestra la ventana de graficación para una calculadora TI-84 Plus con alguna información ilustrada; la **figura 3.14** muestra el significado de la información dada en la **figura 3.13**.

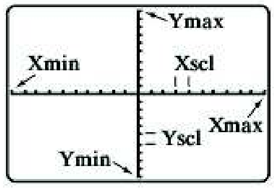


FIGURA 3.13

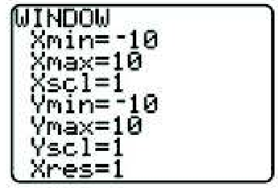
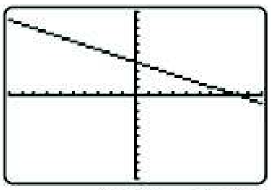


FIGURA 3.14

El eje x en la *pantalla estándar de la calculadora* va desde -10 (el valor mínimo de x, Xmin) hasta 10 (el valor máximo de x, Xmax) con una escala de 1. Por lo tanto, cada marca de división representa 1 unidad (Xscl = 1). El eje y va desde -10 (el valor mínimo de y, Ymin) hasta 10 (el valor máximo de y, Ymax) con una escala de 1 (Yscl = 1).

Como la ventana es rectangular, la distancia entre marcas de división en la ventana estándar son mayores en el eje horizontal que en el eje vertical.

Con frecuencia, al graficar necesitará cambiar los valores de esta ventana. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender a cambiar la configuración de la ventana. En la TI-84 Plus, presione la tecla $\boxed{\text{WINDOW}}$ y luego cambiar los ajustes.



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 3.15

Como la calculadora graficadora no muestra los valores de x y y en la ventana, de forma ocasional listaremos un conjunto de valores debajo de la pantalla. La **figura 3.15** muestra la ventana de una calculadora TI-84 Plus con la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Debajo de la ventana mostramos seis números que representan, en orden: Xmin, Xmax, Xscl, Ymin, Ymax y Yscl. Xscl y Yscl representan la escala en los ejes x y y, respectivamente. Cuando mostremos la ventana estándar de la calculadora, por lo general no mostraremos estos valores debajo de la pantalla.

Para graficar la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$ en la TI-84 Plus, presionaría

$$\boxed{Y=}\ \boxed{(-)}\ \boxed{(}\ 1\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{)}\ \boxed{X, T, \Theta, n}\ \boxed{+}\ 4$$

Luego cuando presiona $\boxed{\text{GRAPH}}$, la ecuación se grafica. La tecla $\boxed{X, T, \Theta, n}$ puede usarse para introducir cualquiera de los símbolos en la tecla. En este libro esta tecla siempre se usará para introducir la variable x.

La mayoría de las calculadoras graficadoras ofrecen una **característica TRACE** (rastreo) que le permite investigar puntos individuales después de que se mostró la gráfica. Con frecuencia, la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ se presiona para tener acceso a esta característica. Después de presionar la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ puede mover el cursor a lo largo de la línea presionando las teclas de flechas. Cuando el cursor se mueve a lo largo de la línea, los valores de x y y cambian para corresponder con la posición del cursor. La **figura 3.16** muestra la gráfica de la **figura 3.15** después que se presionó la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ y la tecla de la flecha hacia la derecha se ha presionado varias veces.

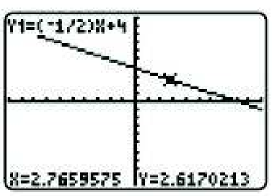


FIGURA 3.16

Muchas calculadoras graficadoras también proporcionan una **característica TABLE** que mostrará una tabla de parejas ordenadas para cualquier función introducida. En la TI-84 Plus, como TABLE aparece arriba de la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$ para obtener una tabla presione $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$. La **figura 3.17** muestra una tabla de valores para la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Puede desplazar hacia arriba y hacia abajo la tabla por medio de las teclas de flechas.

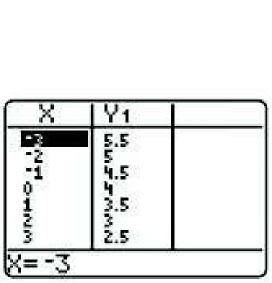


FIGURA 3.17

Mediante TBLSET (por configuración de tabla [Table setup]), puede controlar los valores de x que aparezcan en la tabla. Por ejemplo, si quiere que la tabla muestre los valores de x en décimos, podría hacer esto utilizando TBLSET.

Esta sección sólo es una breve introducción a graficación de ecuaciones, a la característica TRACE y a la característica TABLE de una calculadora graficadora. Usted debe leer el manual de su calculadora graficadora para aprender a utilizar con toda plenitud estas características.

5 Interpretar gráficas

Diariamente vemos una gran diversidad de tipos de gráficas en los periódicos, revistas, televisión, etcétera. A lo largo de este libro, presentamos una variedad de gráficas. Ya que ser capaces de dibujar e interpretar gráficas es muy importante, lo estudiaremos con mayor profundidad en la sección 3.2. En el ejemplo 8 debe entender e interpretar las gráficas para responder la pregunta.

EJEMPLO 8 ▸ Cuando Jim Herring fue a visitar a su madre en Cincinnati, él abordó un avión de Southwest Airlines. El avión estuvo en la pista de despegue durante 20 minutos y después despegó. El avión voló a casi 600 millas por hora durante alrededor de 2 horas. Luego redujo su velocidad a 300 millas por hora y voló en círculos alrededor del aeropuerto de Cincinnati durante casi 15 minutos antes de aterrizar. Después de aterrizar, el avión rodó hacia la puerta de salida y se detuvo. ¿Cuál de las gráficas en las figuras **3.18a-3.18d** ilustra mejor esta situación?

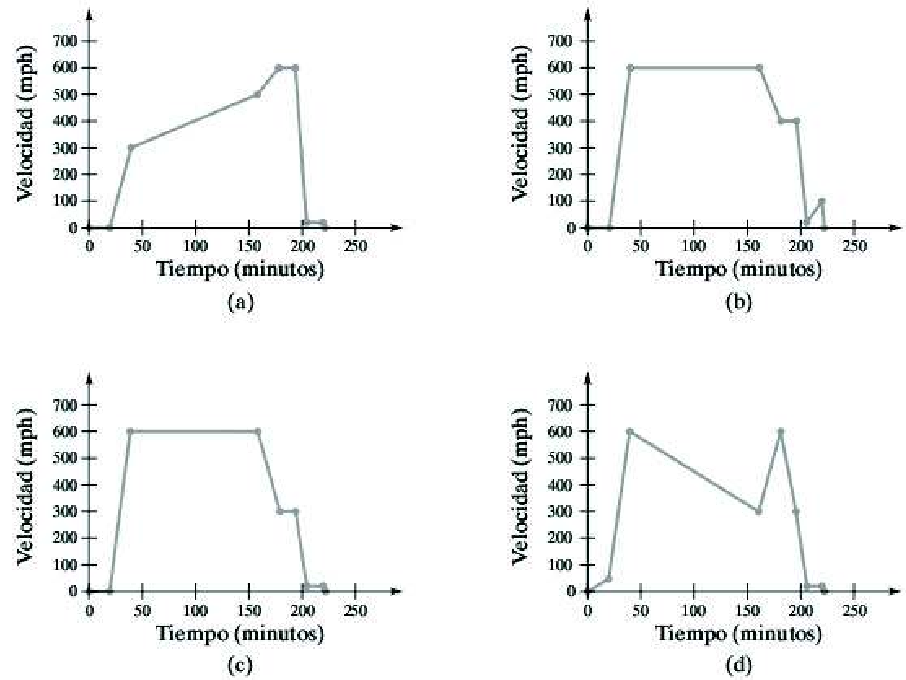


FIGURA 3.18

Solución La gráfica que representa la situación descrita es (c), la cual se reproduce con anotaciones en la **figura 3.19**. Muestra la velocidad contra el tiempo, con el tiempo en el eje horizontal. Mientras el avión se encuentra en la pista de despegue durante 20 minutos, su velocidad es de 0 millas por hora (la recta horizontal en 0 desde 0 hasta 20 minutos). Después de 20 minutos el avión despegó, y su velocidad se incrementó

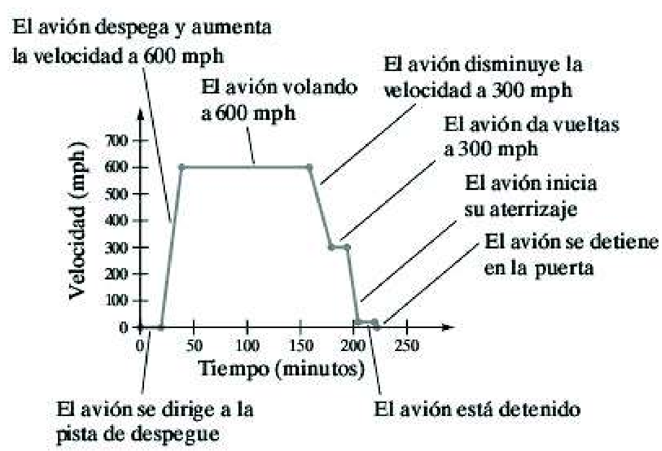


FIGURA 3.19

hasta 600 millas por hora (la recta casi vertical que va de 0 a 600 mph). Luego el avión voló a casi 600 millas por hora durante 2 horas (la recta horizontal en alrededor de 600 mph). Luego desciende a 300 millas por hora (la recta casi vertical de 600 mph a 300 mph). A continuación el avión da vueltas en círculo a casi 300 millas por hora durante 15 minutos (la recta horizontal de alrededor de 300 mph). El avión aterrizó (la recta casi vertical de alrededor de 300 mph a casi 20 mph). Luego rodó hacia la puerta de salida (la recta horizontal en casi 20 mph). Por último, se detuvo en la puerta (la recta casi vertical que cae a 0 mph)

▸ Ahora resuelva el ejercicio 81

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.1

MathXL® MyMathLab

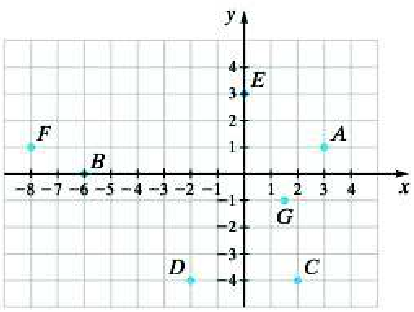
Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cómo se ve la gráfica de cualquier ecuación lineal?
   b) ¿Cuántos puntos son necesarios para graficar una ecuación lineal? Explique.
2. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con dos variables?
3. ¿Qué significa que un conjunto de puntos sea colineal?
4. Cuando se grafica la ecuación $y = \frac{1}{x}$, ¿qué valor no puede sustituirse para x? Explique.

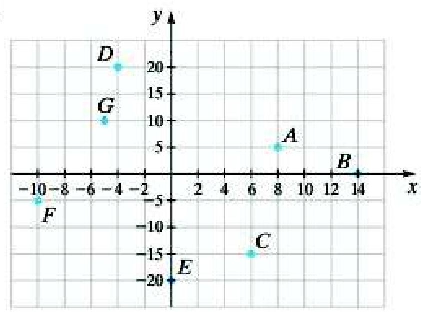
Práctica de habilidades

Liste las parejas ordenadas que corresponden a los puntos indicados.

5.



6.



7. Grafique los puntos siguientes en los mismos ejes.
$A(4, 2)$ $B(-6, 2)$ $C(0, -1)$ $D(-2, 0)$

8. Grafique los puntos siguientes en los mismos ejes.
$A(-4, -2)$ $B(3, 2)$ $C(2, -3)$ $D(-3, 3)$

Determine el cuadrante en el que está cada punto.

9. $(3, 5)$
10. $(-9, 1)$
11. $(4, -3)$
12. $(36, 43)$
13. $(-12, 18)$
14. $(-31, -8)$
15. $(-11, -19)$
16. $(8, -52)$

Determine si la pareja ordenada es una solución para la ecuación dada.

17. $(2, 21)$; $y = 2x - 5$
18. $(1, 1)$; $2x + 3y = 6$
19. $(-4, -2)$; $y = |x| + 3$
20. $(1, -5)$; $y = x^2 + x - 7$
21. $(-2, 5)$; $s = 2r^2 - r - 5$
22. $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$; $y = |x - 3|$
23. $(2, 1)$; $-a^2 + 2b^2 = -2$
24. $(-10, -2)$; $|p| - 3|q| = 4$
25. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $2x^2 + 6x - y = 0$
26. $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$; $2m^2 + 3n = 2$

Grafique cada ecuación.

27. $y = x + 1$
28. $y = 3x$
29. $y = -3x - 5$
30. $y = -2x + 2$
31. $y = 2x + 4$
32. $y = x + 2$
33. $y = \frac{1}{2}x$
34. $y = -\frac{1}{3}x$
35. $y = \frac{1}{2}x - 1$
36. $y = -\frac{1}{2}x - 3$
37. $y = -\frac{1}{3}x + 2$
38. $y = -\frac{1}{3}x + 4$

39. $y = x^2$ **40.** $y = x^2 - 2$ **41.** $y = -x^2$ **42.** $y = -x^2 + 4$

43. $y = |x| + 1$ **44.** $y = |x| + 2$ **45.** $y = -|x|$ **46.** $y = -|x| - 3$

47. $y = x^3$ **48.** $y = -x^3$ **49.** $y = x^3 + 1$ **50.** $y = \dfrac{1}{x}$

51. $y = -\dfrac{1}{x}$ **52.** $x^2 = 1 + y$ **53.** $x = |y|$ **54.** $x = y^2$

En los ejercicios del 55 al 62, utilice una calculadora para obtener al menos ocho puntos que son soluciones para la ecuación. Luego grafique la ecuación trazando los puntos.

55. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ **56.** $y = -x^3 + x^2 + x - 1$ **57.** $y = \dfrac{1}{x + 1}$ **58.** $y = \dfrac{1}{x} + 1$

59. $y = \sqrt{x}$ **60.** $y = \sqrt{x + 4}$ **61.** $y = \dfrac{1}{x^2}$ **62.** $y = \dfrac{|x^2|}{2}$

63. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right)$ está en la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$? Explique.

64. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$ está en la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$? Explique.

65. a) Trace los puntos $A(2, 7)$, $B(2, 3)$, $C(6, 3)$ y luego dibuje $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. ($\overline{AB}$ representa el segmento de recta de A a B).

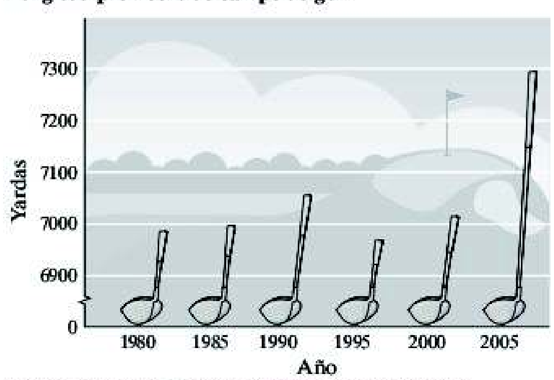
b) Determine el área de la figura.

66. a) Trace los puntos $A(-4, 5)$, $B(2, 5)$, $C(2, -3)$ y $D(-4, -3)$, y luego dibuje $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

b) Determine el área de la figura.

67. Campo de golf La gráfica siguiente muestra que la longitud promedio de un campo de golf en los torneos más importantes ha aumentado en los años recientes.

Longitud promedio de campo de golf



Fuente: Rees Jones Inc., PGA Tour, investigación de *USA TODAY.*

a) Estime la longitud promedio del campo de golf, en los torneos más importantes, en 1980.

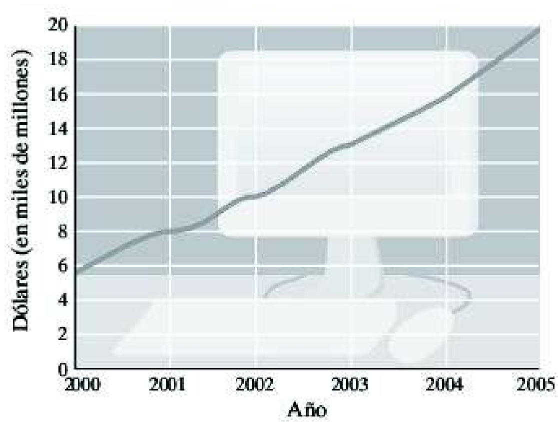
b) Estime la longitud promedio del campo de golf, en los torneos más importantes, en 2005.

c) ¿En cuáles años la longitud promedio fue mayor que 7000 yardas?

d) El aumento en la longitud promedio de los campos de golf, de los torneos más importantes, de 1995 a 2005 parece que es lineal. Explique.

68. Comercio electrónico La gráfica siguiente muestra que el comercio electrónico (ventas por medio de internet) ha aumentado de forma constante. La gráfica muestra las ventas, en el primer trimestre de cada año, durante los años desde 2000 hasta 2005.

Alza en el comercio electrónico



Fuente: Oficina de censos, *USA TODAY* (8/9/05)

a) Estime las ventas por internet en el primer trimestre de 2000.

b) Estime las ventas por internet en el primer trimestre de 2005.

c) ¿En cuáles años las ventas por internet, en el primer trimestre, fueron mayores de $12 mil millones?

d) El aumento en las ventas por internet en el primer trimestre de cada año de 2000 a 2005, ¿parece lineal? Explique.

Analizaremos muchos de los conceptos introducidos en los ejercicios del 69 al 76 en la sección 3.4.

69. Grafique $y = x + 1$, $y = x + 3$ y $y = x - 1$ en los mismos ejes.

a) ¿Qué observa con respecto a las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan al eje y?

b) ¿Todas las ecuaciones parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

70. Grafique $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{2}x - 4$ en los mismos ejes.

a) ¿Qué nota con respecto a las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan al eje y?

b) ¿Todas las ecuaciones parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

71. Grafique $y = 2x$. Determine la *razón de cambio* de y con respecto a x. Esto es, ¿en cuántas unidades cambia y comparado con cada unidad que cambia x?

72. Grafique $y = 4x$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

73. Grafique $y = 3x + 2$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

74. Grafique $y = \frac{1}{2}x$. Determine la razón de cambio de y con respecto a x.

75. La pareja ordenada $(3, -7)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 4 unidades por cada unidad que aumenta x en la gráfica, determine otras dos soluciones para la ecuación.

76. La pareja ordenada $(1, -4)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 3 unidades por cada unidad que aumenta x en la gráfica, determine otras dos soluciones para la ecuación.

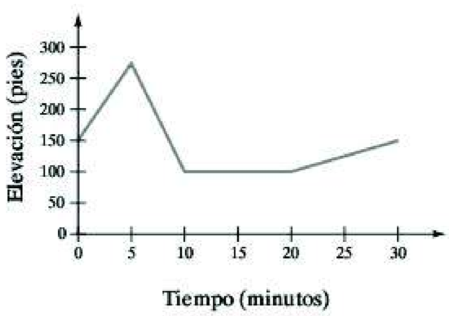
Relacione cada ejercicio del 77 al 80 con la gráfica correspondiente de la altura del nivel del mar con respecto al tiempo, etiquetadas de la a a la d.

77. María Leeseberg caminó durante cinco minutos a nivel del piso. Luego durante cinco minutos escaló una pequeña colina. Después caminó a nivel del piso durante cinco minutos. Posteriormente, durante los siguientes cinco minutos escaló una colina inclinada. Durante los siguientes 10 minutos descendió de manera uniforme hasta que alcanzó la altura a la cual había iniciado.

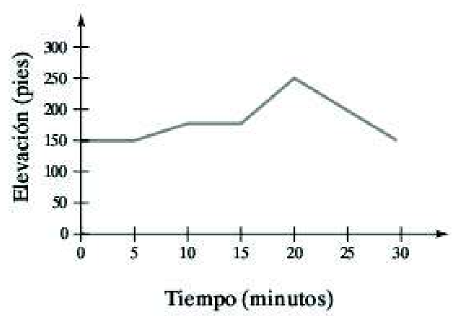
78. Don Gordon caminó a nivel del piso durante cinco minutos, después bajó una colina empinada durante 10 minutos. Los siguientes cinco minutos caminó al nivel del piso. Los siguientes cinco minutos caminó y regresó a la altura en que inició. Los siguientes cinco minutos caminó al nivel del piso.

79. Nancy Johnson inició su caminata ascendente en una colina empinada durante cinco minutos. En los siguientes cinco minutos caminó descendiendo una colina empinada hasta una elevación menor que el punto en que inició. Los siguientes 10 minutos caminó al nivel del piso. Los siguientes 10 minutos caminó hacia arriba en una colina un poco inclinada, en ese momento alcanzó la elevación con que inició.

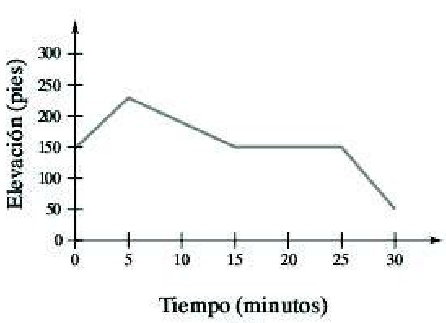
80. James Condor inició ascendiendo una colina durante cinco minutos. Los siguientes 10 minutos descendió caminando una colina hasta una elevación igual a la elevación en que inició. Los siguientes 10 minutos caminó a nivel del piso. Los siguientes cinco minutos caminó descendiendo por la colina.



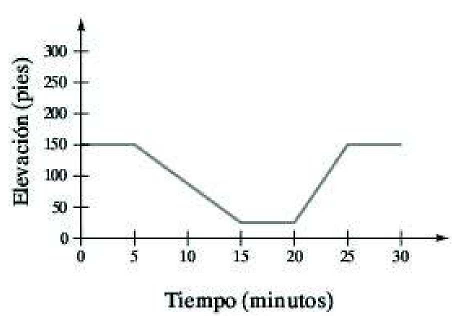
(a)



(c)



(b)



(d)

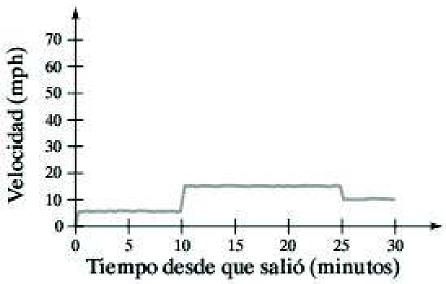
Relacione los ejercicios del 81 al 84 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, etiquetadas con las letras de la a a la d.

81. Para ir al trabajo, Cletidus Hunt caminó durante tres minutos, esperó el tren durante cinco minutos, viajó en el tren durante 15 minutos, y después caminó durante 7 minutos.

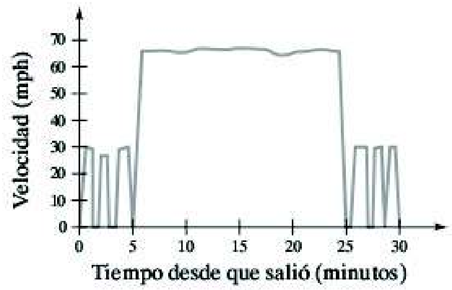
82. Para ir al trabajo, Tyrone Williams condujo en tráfico pesado (paraba y avanzaba) durante cinco minutos, luego manejó en una autopista durante 20 minutos y luego volvió al tráfico pesado durante cinco minutos.

83. Para ir al trabajo, Sheila Washington manejó en una carretera rural durante 10 minutos, después manejó en una autopista durante doce minutos y luego en tráfico pesado durante ocho minutos.

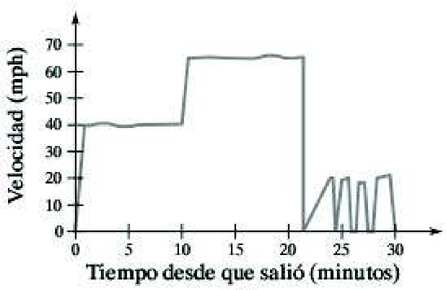
84. Para ir al trabajo, Brenda Pinkney condujo su bicicleta colina arriba durante 10 minutos, después colina abajo durante 15 minutos y luego condujo en una calle plana durante cinco minutos.



(a)



(c)



(b)

(d)

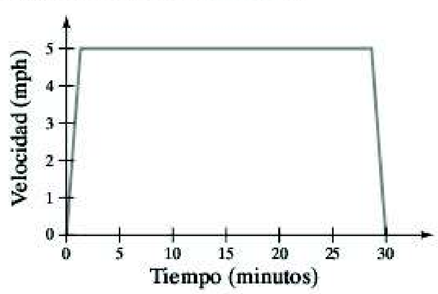
Relacione los ejercicios del 85 al 88 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, etiquetadas de la a a la d.

85. Cristina Dwyer caminó durante cinco minutos para calentar, trotó durante 20 minutos, y después caminó durante cinco minutos para el enfriamiento.

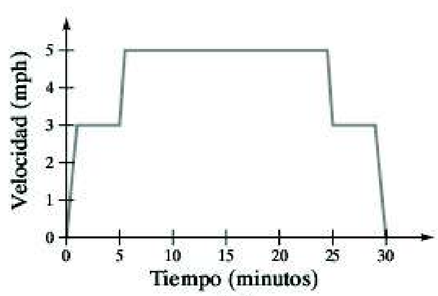
86. Ana Droullard fue por una bicicleta y la condujo a una velocidad constante durante 30 minutos.

87. Miguel Odu tomó un camino a través de su vecindario durante 30 minutos. Se detuvo brevemente en siete ocasiones para recolectar basura.

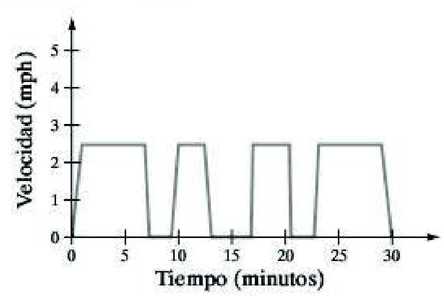
88. Ricardo Dai caminó a través de su vecindario y se detuvo tres veces para platicar con sus vecinos. Estuvo fuera de su casa durante 30 minutos.



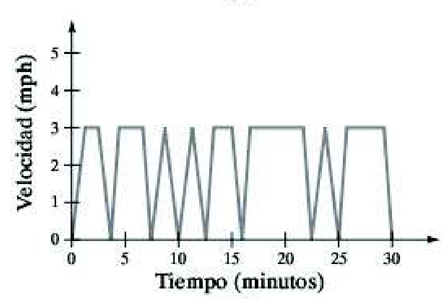
(a)



(b)



(c)



(d)

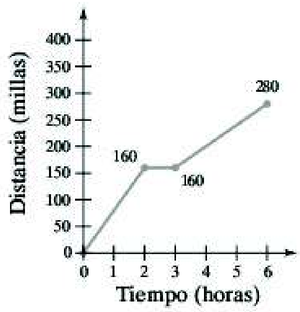
Relacione los ejercicios del 89 al 92 con la gráfica correspondiente de distancia recorrida contra tiempo, etiquetada de la a a la d. Del capítulo 2, recuerde que distancia = velocidad × tiempo. En las gráficas se indican las distancias seleccionadas.

89. El tren A viajó a una velocidad de 40 mph durante una hora, luego durante dos horas a 80 mph y luego a 60 mph durante tres horas.

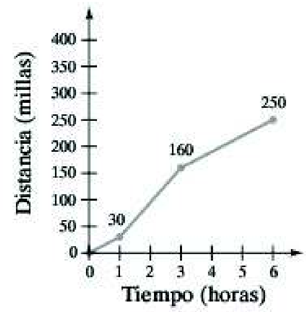
90. El tren C viajó a una velocidad de 80 mph durante dos horas, luego permaneció parado en una estación durante una hora y después viajó a 40 mph durante tres horas.

91. El tren B viajó a una velocidad de 20 mph durante dos horas, luego a 60 mph durante tres horas y luego a 80 mph durante una hora.

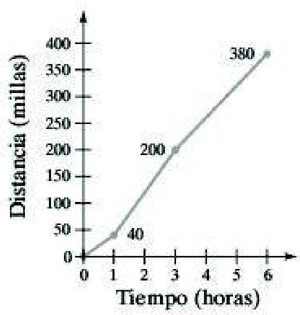
92. El tren D viajó a 30 mph durante una hora, después a 65 mph durante dos horas y después a 30 mph durante tres horas.



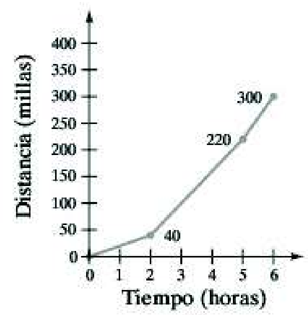
(a)



(c)



(b)



(d)

Utilice una calculadora graficadora para graficar cada función. Asegúrese de seleccionar valores para la ventana que muestre la curvatura de la gráfica. Luego, si su calculadora puede mostrar tablas, despliegue una tabla de valores de x, en unidades, de 0 a 6.

93. $y = 2x - 3$

94. $y = \frac{1}{3}x + 2$

95. $y = x^2 - 2x - 8$

96. $y = -x^2 + 16$

97. $y = x^3 - 2x + 4$

98. $y = 2x^3 - 6x^2 - 1$

Retos

Grafique cada expresión.

99. $y = |x - 2|$

100. $x = y^2 + 2$

Actividad en grupo

Analice y resuelva en grupo los ejercicios del 101 al 102.

101. a) Miembro uno del grupo: Trace los puntos $(-2, 4)$ y $(6, 8)$. Determine *el punto medio* del segmento de recta que conecta estos puntos.

Miembro dos del grupo: Siga las instrucciones anteriores para los puntos $(-3, -2)$ y $(5, 6)$.

Miembro tres del grupo: Siga las instrucciones anteriores para los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$.

b) Como grupo, determine una fórmula para el punto medio de un segmento de línea que conecta los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). (*Nota:* analizaremos la fórmula del punto medio más adelante, en el capítulo 10).

102. Tres puntos en un paralelogramo son: $A(3, 5)$, $B(8, 5)$ y $C(-1, -3)$.

a) De forma individual determine un cuarto punto D que complete el paralelogramo.

b) De forma individual calcule el área de su paralelogramo.

c) Compare sus respuestas. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? Si no, ¿por qué no?

d) ¿Hay más de un punto que se pueda usar para completar el paralelogramo? Si es así, proporcionen los puntos y encuentren las áreas correspondientes de cada uno de los paralelogramos.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **103.** Evalúe $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para $a = 2, b = 7$ y $c = -15$.

[2.3] **104.** **Renta de un camión** Hertz Truck Rental cobra una cuota diaria de \$60 más \$0.10 por milla. La agencia de renta National Automobile cobra una cuota diaria de \$50 más \$0.24 por milla para el mismo camión. ¿Qué distancia tendría que conducir usted durante un día para que el costo de renta de ambas compañías sea igual?

[2.5] **105.** Resuelva la desigualdad $-1 \le \dfrac{4-3x}{2} < 5$. Escriba la solución en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **106.** Determine el conjunto solución para la desigualdad $|3x + 2| > 7$.

3.2 Funciones

1 Entender las relaciones.
2 Reconocer las funciones.
3 Utilizar la prueba de la recta vertical.
4 Entender la notación de funciones.
5 Aplicación de funciones en la vida diaria.

1 Entender las relaciones

Con frecuencia en la vida diaria encontramos que una cantidad está relacionada con una segunda cantidad. Por ejemplo, la cantidad que gasta en naranjas está relacionada con el número de naranjas que usted compra. La velocidad de un bote de vela está relacionada con la velocidad del viento. Y el impuesto por ingresos que usted paga está relacionado con el ingreso que obtiene.

Suponga que las naranjas cuestan 30 centavos por pieza. Entonces una naranja cuesta 30 centavos, dos naranjas cuestan 60 centavos, tres naranjas cuestan 90 centavos, y así sucesivamente. Podemos listar esta información, o relación, como un conjunto de parejas ordenadas, listando el número de naranjas primero, y el costo en centavos en segundo lugar. Las parejas ordenadas que representan esta situación son (1, 30), (2, 60), (3, 90), etcétera. Una ecuación que representa esta situación es $c = 30n$, donde c es el costo en centavos, y n es el número de naranjas. Como el costo depende del número de naranjas, decimos que el costo es la *variable dependiente* y el número de naranjas es la *variable independiente*.

Ahora considere la ecuación $y = 2x + 3$. Algunas parejas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, etcétera. En esta ecuación, el valor obtenido para y depende del valor seleccionado para x. Por lo tanto, x es la *variable independiente* y y es la *variable dependiente*. Observe que en este ejemplo, a diferencia de las naranjas, no existe una conexión física entre x y y. La variable x es la variable independiente y y es la variable dependiente simplemente a consecuencia de su lugar en la ecuación.

Para una ecuación de las variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**. Ya que las cantidades relacionadas pueden representarse como parejas ordenadas, el concepto de **relación** puede definirse como sigue.

Relación

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Como la ecuación $y = 2x + 3$ puede representarse como un conjunto de parejas ordenadas, es una relación.

2 Reconocer las funciones

Ahora desarrollamos la idea de **función**, uno de los conceptos más importantes en matemáticas. Una función es un tipo especial de relación en la que a cada elemento en un conjunto (llamado el dominio) le corresponde *exactamente un* elemento en un segundo conjunto (llamado el rango).

Considere las naranjas que cuestan 30 centavos por pieza, que acabamos de analizar. Podemos ilustrar el número de naranjas y el costo de las naranjas por medio de la **figura 3.20**.

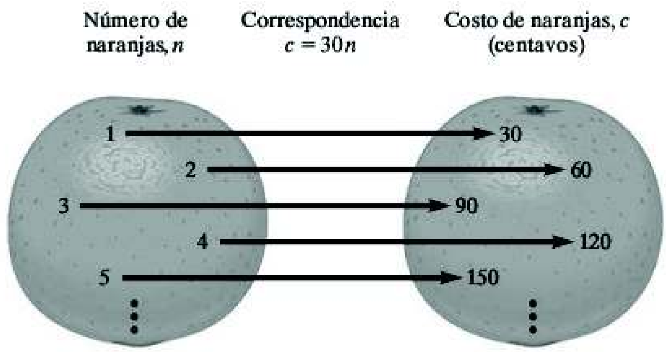


FIGURA 3.20

Observe que cada número en el conjunto de número de naranjas corresponde a (o es transformado en) exactamente un número en el conjunto de costo de naranjas, c. Por consiguiente, esta correspondencia es una función. El conjunto que consiste en el número de naranjas $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, se denomina **dominio**. El conjunto que consiste en los costos en centavos, $\{30, 60, 90, 120, 150, \ldots\}$, se denomina **rango**. En general, el conjunto de valores para la variable independiente se llama **dominio**. El conjunto de valores para la variable dependiente se denomina **rango**, vea la **figura 3.21**.

FIGURA 3.21

EJEMPLO 1 Determine si cada correspondencia es una función.

a)
1 → 1
2 → 4
3 → 9

b)
mariquita → insecto
grillo → insecto
águila → ave
halcón → ave

c)
JCPenney → Dallas
JCPenney → Milwaukee
Sears → Chicago

Solución

a) Para que una correspondencia sea una función, cada elemento en el dominio debe corresponder con exactamente un elemento en el rango. Aquí el dominio es $\{1, 2, 3\}$ y el rango es $\{1, 4, 9\}$. Como cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango, esta correspondencia es una función.

b) Aquí el dominio es {mariquita, grillo, águila, halcón} y el rango es {insecto, ave}. Aunque el dominio tiene cuatro elementos y el rango dos, cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento en el rango. Por lo tanto, esta correspondencia es una función.

c) Aquí el dominio es {JCPenney, Sears} y el rango es {Dallas, Milwaukee, Chicago}. Observe que JCPenney corresponde tanto a Dallas como a Milwaukee. Por lo tanto, cada elemento en el dominio *no* corresponde a exactamente un elemento en el rango. En consecuencia, esta correspondencia es una relación pero *no* una función.

Ahora resuelva el ejercicio 17

Ahora definiremos de manera formal el concepto de función.

Función

Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, de modo que cada elemento del dominio corresponde a *exactamente un* elemento en el rango.

EJEMPLO 2 ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?

a) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (-1, 3), (0, 6)\}$

b) $\{(-1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5)\}$

Solución

a) El dominio es el conjunto de las primeras coordenadas en el conjunto de parejas ordenadas, $\{1, 2, 3, -1, 0\}$ y el rango es el conjunto de segundas coordenadas, $\{4, 3, 5, 6\}$. Observe que cuando listamos el rango, sólo incluimos el número 3 una vez aunque aparece en $(2, 3)$ y $(-1, 3)$. Al examinar el conjunto de parejas ordenadas, vemos que cada número en el dominio corresponde con exactamente un número en el rango. Por ejemplo, el 1 en el dominio corresponde sólo con el 4 en el rango, y así sucesivamente. Ningún valor de x corresponde a más de un valor de y. Por lo tanto, esta relación *es una función*.

b) El dominio es $\{-1, 4, 3, 2\}$ y el rango es $\{3, 2, 1, 6, 5\}$. Observe que 3 aparece como la primera coordenada de dos parejas ordenadas aunque está listado sólo una vez en el conjunto de elementos que representa al dominio. Como las parejas ordenadas $(3, 1)$ y $(3, 5)$ tienen *la misma primera coordenada* y una segunda coordenada diferente, cada valor en el dominio no corresponde a exactamente un valor en el rango. Por lo tanto, esta relación *no es una función*.

Ahora resuelva el ejercicio 23

El ejemplo 2 conduce a una definición alterna de función.

Función

Una **función** es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna *primera* coordenada se repite.

Si la segunda coordenada en un conjunto de parejas ordenadas se repite, el conjunto de parejas ordenadas todavía puede ser una función, como en el ejemplo 2 **a)**. Sin embargo, si dos o más parejas ordenadas tienen la misma primera coordenada, como en el ejemplo 2 **b)**, el conjunto de parejas ordenadas no es una función.

Ahora consideremos la ecuación $y = 2x + 3$, de la página 158. Como se dijo anteriormente, algunas parejas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ y $(2, 7)$. Observe que cada valor de x que sustituimos en la ecuación da un único valor de y. Por lo tanto, la ecuación $y = 2x + 3$ no es sólo una relación, sino también una función. En general, si se nos da una función lineal con variables x y y, en las que x es la variable independiente, como en $y = 2x + 3$, *entonces para cada valor de x hay exactamente un valor de y*. Esta idea la explicaremos más adelante en esta sección.

3 Utilizar la prueba de la recta vertical

La **gráfica de una función o relación** es la gráfica de su conjunto de parejas ordenadas. Los dos conjuntos de parejas ordenadas del ejemplo 2 se grafican en las **figuras 3.22a** y **3.22b**. Observe que en la función de la **figura 3.22a** no es posible trazar una recta vertical que interseque dos puntos. Debemos esperar esto ya que, en una función, cada valor de x debe corresponder a exactamente un valor de y. En la **figura 3.22b** *podemos* trazar una recta vertical a través de los puntos $(3, 1)$ y $(3, 5)$. Esto muestra que cada valor de x no corresponde a exactamente un valor de y, y la gráfica no representa una función.

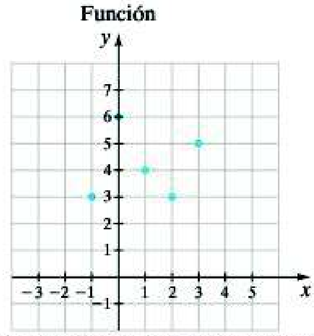


FIGURA 3.22 (a) Primer conjunto de parejas ordenadas (b) Segundo conjunto de parejas ordenadas

Este método para determinar si una gráfica representa una función se denomina **prueba de la recta vertical**.

Prueba de la recta vertical

Si una recta vertical puede dibujarse a través de cualquier parte de la gráfica y la recta interseca otra parte de la gráfica, la gráfica no representa una función. Si una recta vertical no puede dibujarse para intersecar la gráfica en más de un punto, la gráfica representa una función.

Utilizamos la prueba de la recta vertical para mostrar que la **figura 3.23b** representa una función y las **figuras 3.23a** y **3.23c** no representan funciones.

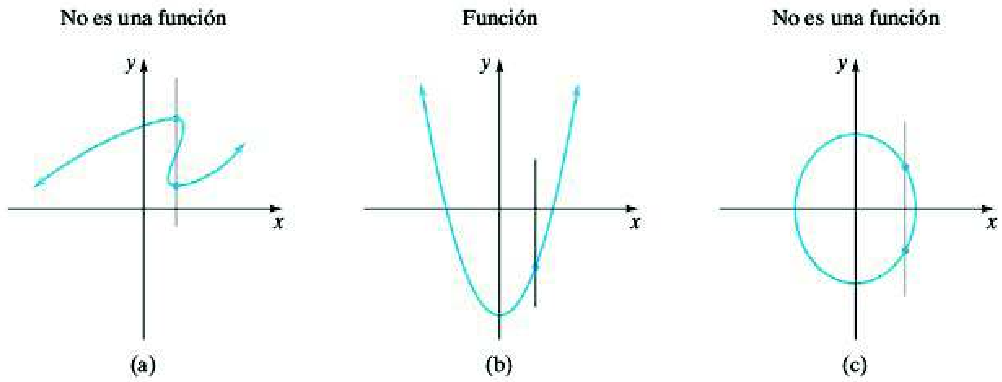


FIGURA 3.23

EJEMPLO 3 ▸ Utilice la prueba de la recta vertical para determinar si las gráficas siguientes representan funciones. También determine el dominio y el rango de cada función o relación.

a)

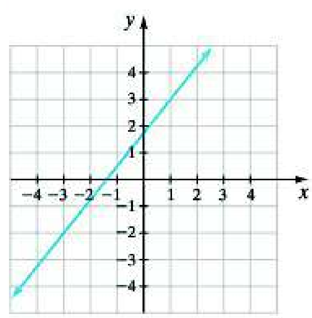


FIGURA 3.24

b)

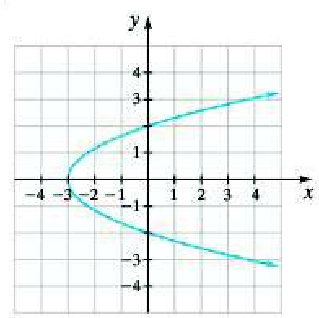


FIGURA 3.25

Solución

a) No se puede dibujar una recta vertical para que interseque la gráfica de la **figura 3.24** en más de un punto. Así, ésta es la gráfica de una función. Como la recta se extiende de manera indefinida en ambas direcciones, cada valor de x estará incluido en el dominio. El dominio es el conjunto de los números reales.

$$\text{Dominio:} \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

El rango también es el conjunto de los números reales ya que todos los valores de y están incluidos en la gráfica.

$$\text{Rango:} \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

b) Como se puede dibujar una recta vertical para que interseque la gráfica de la **figura 3.25** en más de un punto, ésta *no* es la gráfica de una función. El dominio de esta relación es el conjunto de valores mayores o iguales a -3.

$$\text{Dominio:} \quad \{x | x \geq -3\} \quad \text{o} \quad [-3, \infty)$$

El rango es el conjunto de valores de y, y en este caso puede ser cualquier número real.

$$\text{Rango:} \quad \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

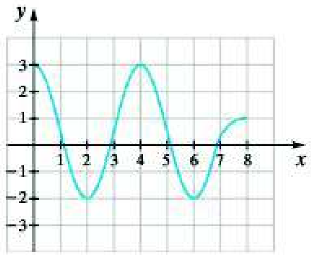


FIGURA 3.26

EJEMPLO 4 Considere la gráfica que se muestra en la **figura 3.26**.

a) ¿Qué elemento del rango es pareja de 4 en el dominio?

b) ¿Qué elementos del dominio son pareja de −2 en el rango?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

d) ¿Cuál es el rango de la función?

Solución

a) El rango es el conjunto de valores de y. El valor de y que tiene como pareja el valor 4 de x es 3.

b) El dominio es el conjunto de valores de x. Los valores de x que tienen como pareja al valor de y igual −2 son 2 y 6.

c) El dominio es el conjunto de valores de x, del 0 al 8. Por tanto el dominio es

$$\{x|0 \le x \le 8\} \quad \text{o} \quad [0, 8]$$

d) El rango es el conjunto de valores y, de −2 a 3. Así, el rango es

$$\{y|-2 \le y \le 3\} \quad \text{o} \quad [-2, 3]$$

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 5 La **figura 3.27** ilustra una gráfica de velocidad contra tiempo de un hombre que salió a caminar y trotar. Escriba una historia acerca de la salida de este hombre que corresponda a esta función.

FIGURA 3.27

Solución Entienda el problema El eje horizontal es el tiempo y el eje vertical es la velocidad. Cuando la gráfica es horizontal significa que la persona está trasladándose a una velocidad constante indicada en el eje vertical. Las rectas casi verticales que aumentan con el tiempo (o que tienen una pendiente positiva, como se estudiará más adelante) indican un aumento en la velocidad, mientras que las rectas casi verticales que descienden con el tiempo (o que tienen pendiente negativa) indican una disminución en la velocidad.

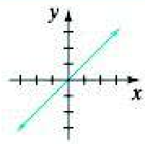
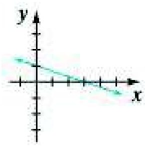
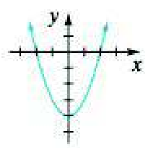
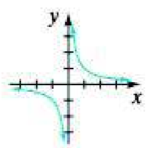
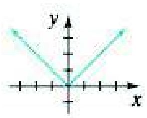
Responda Aquí hay una posible interpretación de la gráfica. El hombre camina durante alrededor de cinco minutos a una velocidad de casi dos millas por hora. Después aumenta su velocidad a casi cuatro millas por hora y camina rápido o trota a esta velocidad durante alrededor de 10 minutos. Luego va más lento y se detiene, y después descansa durante casi cinco minutos. Finalmente, el hombre aumenta su velocidad a casi cinco millas por hora y trota a esta velocidad durante 10 minutos.

Ahora resuelva el ejercicio 65

4 Entender la notación de funciones

En la sección 3.1 graficamos varias ecuaciones, como lo resumimos en la **tabla 3.1**. Si examina cada ecuación en la tabla, verá que todas ellas son funciones, ya que sus gráficas pasan la prueba de la recta vertical.

TABLA 3.1 Ejemplo

Ejemplo sección 3.1	Ecuación que se grafica	Gráfica	¿La gráfica representa una función?	Dominio	Rango
3	$y = x$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
4	$y = -\frac{1}{3}x + 1$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
5	$y = x^2 - 4$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[-4, \infty)$
6	$y = \frac{1}{x}$		Sí	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7	$y = \lvert x \rvert$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$

Como la gráfica de cada ecuación que se muestra representa una función, podemos referirnos a cada ecuación en la tabla como una función. Cuando nos referimos a una ecuación en las variables x y y como una función, significa que la gráfica de la ecuación satisface el criterio para ser función. Esto es, cada valor de x corresponde exactamente a un valor de y, y la gráfica de la ecuación pasa la prueba de la recta vertical.

No todas las ecuaciones son funciones, como lo verá posteriormente en este libro, las secciones cónicas, donde analizaremos ecuaciones de circunferencias y elipses. Sin embargo, hasta llegar a ese capítulo, todas las ecuaciones que estudiaremos serán funciones.

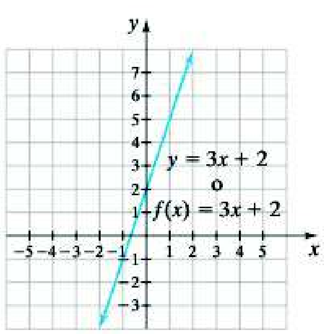


FIGURA 3.28

Considere de la ecuación $y = 3x + 2$. Al aplicar la prueba de la recta vertical a su gráfica (**figura 3.28**), podemos ver que la gráfica representa una función. Cuando una ecuación en las variables x y y es una función, con frecuencia escribimos la ecuación utilizando la **notación de funciones**, $f(x)$, se lee "f de x". Como la ecuación $y = 3x + 2$ es una función, y el valor de y depende del valor de x, decimos que **y es una función de x**. Cuando se nos da un ecuación lineal en las variables x y y, *en la que y está despejada*, podemos escribir la ecuación en notación de función sustituyendo $f(x)$ por y. En este caso, podemos escribir la ecuación en notación de función como $f(x) = 3x + 2$. La notación $f(x)$ representa la variable dependiente *y no significa f por x*. Pueden usarse otras letras para indicar funciones. Por ejemplo, $g(x)$ y $h(x)$ también representan funciones de x, y en la sección 5.1 utilizaremos $P(x)$ para representar funciones polinomiales.

Las funciones escritas en notación de funciones también son ecuaciones ya que contienen un signo de igual. Podemos referirnos a $y = 3x + 2$ ya sea como un ecuación o bien como una función. De manera análoga, podemos referirnos a $f(x) = 3x + 2$ como una función o como una ecuación.

Si y es una función de x, la notación $f(5)$, que se lee "f de 5", significa el valor de y cuando x es 5. Para evaluar una función para un valor específico de x, sustituya ese valor para x en la función. Por ejemplo, si $f(x) = 3x + 2$, entonces $f(5)$ se determina como sigue:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(5) = 3(5) + 2 = 17$$

Por lo tanto, cuando x es 5, y es 17. La pareja ordenada (5, 17) aparecería en la gráfica de $y = 3x + 2$.

Sugerencia útil

Las ecuaciones lineales en las que y no está despejada, pueden escribirse usando notación de funciones despejando y en la ecuación, y luego reemplazando y con $f(x)$. Por ejemplo, la ecuación $-9x + 3y = 6$ se convierte en $y = 3x + 2$, cuando se despeja y. Por lo tanto, podemos escribir $f(x) = 3x + 2$.

EJEMPLO 6 ▸ Si $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$, determine

a) $f(2)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(a)$

Solución

a) $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$

$f(2) = -4(2)^2 + 3(2) - 2 = -4(4) + 6 - 2 = -16 + 6 - 2 = -12$

b) $f(-1) = -4(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4(1) - 3 - 2 = -4 - 3 - 2 = -9$

c) Para evaluar la función en a, reemplazamos cada x en la función con una a.

$$f(x) = -4x^2 + 3x - 2$$
$$f(a) = -4a^2 + 3a - 2$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

EJEMPLO 7 ▸ Determine cada valor indicado de la función.

a) $g(-2)$ para $g(t) = \dfrac{1}{t + 8}$

b) $h(5)$ para $h(s) = 2|s - 6|$

c) $j(-3)$ para $j(r) = \sqrt{22 - r}$

Solución En cada parte, sustituya el valor indicado en la función y evalúe la función.

a) $g(-2) = \dfrac{1}{-2 + 8} = \dfrac{1}{6}$

b) $h(5) = 2|5 - 6| = 2|-1| = 2(1) = 2$

c) $j(-3) = \sqrt{22 - (-3)} = \sqrt{22 + 3} = \sqrt{25} = 5$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

5 Aplicación de funciones en la vida diaria

Muchas de las aplicaciones que se estudiaron en el capítulo 2 eran funciones. Sin embargo, no habíamos definido una función en ese momento. Ahora examinaremos aplicaciones adicionales de funciones.

EJEMPLO 8 ▸ **Jets de negocios** La gráfica en la **figura 3.29** se tomó del número del 11 de noviembre de 2004, de *USA Today*. La gráfica muestra el número de jets de negocios fabricados de 1994 a 2004, y con una proyección hasta 2013.

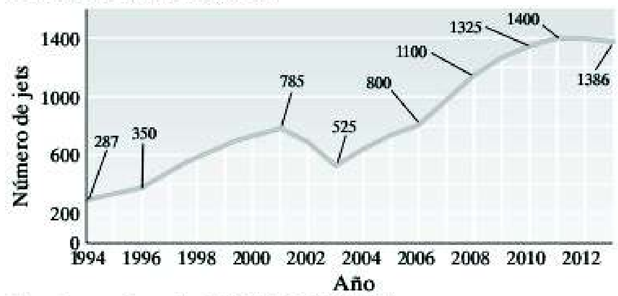


FIGURA 3.29

Fuente: Forecast International, USA TODAY (11/11/04)

a) Explique por qué la gráfica en la **figura 3.29** representa una función.

b) Determine el número de jets de negocios que se pronostica se fabricarán en 2010.

c) Determine el aumento porcentual proyectado, en el número de jets de negocios, que se fabricarán desde 2003 hasta 2011.

d) Determine la disminución porcentual, en el número de jets de negocios, fabricados de 2001 a 2003.

Solución

a) La gráfica representa una función, ya que cada año corresponde con un número específico de jets de negocios fabricados. Observe que la gráfica pasa el criterio de la recta vertical.

b) En 2010, la gráfica muestra que se fabricarán 1325 jets de negocios. Si representamos la función mediante J, entonces $J(2010) = 1325$.

c) Para resolver este problema seguiremos el procedimiento de resolución de problemas.

Entienda el problema y traduzca Necesitamos determinar el aumento porcentual en el número de jets de negocios que se fabricarán de 2003 a 2011. Para hacer esto utilizamos la fórmula

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo final}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo inicial}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo inicial}}$$

El último periodo es 2011 y el periodo anterior es 2003. Al sustituir valores, obtenemos

$$\text{cambio porcentual} = \frac{1400 - 525}{525}$$

Realizar los cálculos

$$= \frac{875}{525} \approx 1.667 = 166.7\%$$

Compruebe y responda Nuestros cálculos parecen correctos. De 2003 a 2011 está proyectado un aumento de alrededor de 166.7% en el número de jets de negocios fabricados.

d) Para determinar la disminución porcentual de 2001 a 2003, seguimos el mismo procedimiento que en la parte **c)**. El periodo final es 2003 y el periodo inicial es 2001.

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo final}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo inicial}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo inicial}}$$

$$= \frac{525 - 785}{785} = \frac{-260}{785} \approx -0.331 = -33.1\%$$

El signo negativo que precede a 33.1% indica una disminución de porcentaje. Así, hubo alrededor de 33.1% de disminución en la fabricación de jets de negocios de 2001 a 2003.

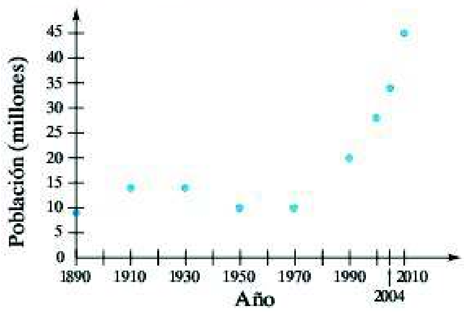
▸ Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 9 ▸ **Inmigración** El tamaño de la población extranjera de Estados Unidos es el más alto de todos los tiempos. La gráfica en la **figura 3.30** muestra esta población, en millones, desde 1890 hasta 2004 y proyectada hasta 2010.

a) Por medio de la gráfica de la **figura 3.30**, explique por qué este conjunto de puntos representa una función.

b) Por medio de la gráfica de la **figura 3.31**, estime la población extranjera de Estados Unidos en 2008.

Población de Estados Unidos nacida en el extranjero



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, USA TODAY (8/3/05)

FIGURA 3.30

Población extranjera de Estados Unidos

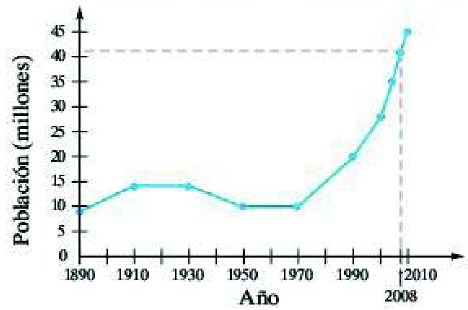


FIGURA 3.31

Solución

a) Como cada año corresponde con exactamente una población, este conjunto de puntos representa una función. Observe que esta gráfica pasa la prueba de la recta vertical.

b) Podemos conectar los puntos con segmentos de línea recta como en la **figura 3.31**. Entonces podemos estimar, a partir de la gráfica, que habría alrededor de 41 millones de estadounidenses extranjeros de Estados Unidos en 2008. Si llamamos f a la función, entonces $f(2008) = 41$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

En la sección 2.2 aprendimos a usar fórmulas. Considere la fórmula para el área de un círculo, $A = \pi r^2$. En la fórmula, π es una constante que es aproximadamente 3.14. Para cada valor específico del radio, r, corresponde exactamente un área, A. Así que el área del círculo es una función de su radio. Por lo tanto, podemos escribir

$$A(r) = \pi r^2$$

Con frecuencia, al igual que ésta, las fórmulas se escriben usando notación de funciones.

EJEMPLO 10 ▸ La temperatura Celsius, C, es una función de la temperatura Fahrenheit, F.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Determine la temperatura Celsius que corresponde a 50°F.

Solución Necesitamos determinar $C(50)$. Lo hacemos por medio de sustitución.

$$\begin{aligned} C(F) &= \frac{5}{9}(F - 32) \\ C(50) &= \frac{5}{9}(50 - 32) \\ &= \frac{5}{9}(18) = 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 50°F = 10°C.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 55

En el ejemplo 10, F es la variable independiente y C es la variable dependiente. Si despejamos F en la función, obtendríamos $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. En esta fórmula C es la variable independiente y F es la variable dependiente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué es una relación?
3. ¿Todas las funciones también son relaciones? Explique.
4. ¿Todas las relaciones también son funciones? Explique.
5. Explique cómo usar la prueba de la recta vertical para determinar si la relación es una función.
6. ¿Qué es el dominio de una función?
7. ¿Qué es el rango de una función?
8. ¿Cuáles son el dominio y rango de la función $f(x) = 2x + 1$? Explique su respuesta.
9. Considere la función $y = \frac{1}{x}$. ¿Cuál es su dominio y cuál es su rango? Escriba su respuesta mediante la notación de conjuntos. Explique.
10. ¿Cuáles son el dominio y el rango de una función de la forma $f(x) = ax + b, a \neq 0$? Explique su respuesta.
11. Considere la función valor absoluto $y = |x|$. ¿Cuál es su dominio y cuál su rango? Explique.
12. ¿Qué es una variable dependiente?
13. ¿Qué es una variable independiente?
14. ¿Cómo se lee "$f(x)$"?

Práctica de habilidades

En los ejercicios del 15 al 20, **a)** *determine si la relación ilustrada es una función.* **b)** *Proporcione el dominio y rango de cada función o relación.*

15. el doble de un número

$3 \rightarrow 6$
$5 \rightarrow 10$
$11 \rightarrow 22$

16. Sobrenombres

Robert → Bobby
Robert → Rob
Margaret → Peggy
Margaret → Maggie

17. número de descendientes

Cameron → 3
Tyrone → 6
Vishnu → 6

18. un número al cuadrado

$4 \rightarrow 16$
$5 \rightarrow 25$
$7 \rightarrow 49$

19. costo de una estampilla

$1990 \rightarrow 20$
$2001 \rightarrow 34$
$2002 \rightarrow 34$
$2002 \rightarrow 37$

20. valor absoluto

$|-8| \rightarrow 8$
$|8| \rightarrow 8$
$|0| \rightarrow 0$

En los ejercicios del 21 al 28, **a)** *determine cuáles de las siguientes relaciones también son funciones.* **b)** *Proporcione el dominio y el rango de cada relación o función.*

21. $\{(1, 4), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

22. $\{(1, 0), (4, 2), (9, 3), (1, -1), (4, -2), (9, -3)\}$

23. $\{(3, -1), (5, 0), (1, 2), (4, 4), (2, 2), (7, 9)\}$

24. $\{(-1, 1), (0, -3), (3, 4), (4, 5), (-2, -2)\}$

25. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (2, 2), (1, 1)\}$

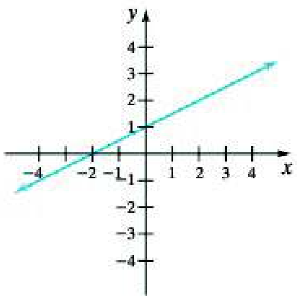
26. $\{(6, 3), (-3, 4), (0, 3), (5, 2), (3, 5), (2, 8)\}$

27. $\{(0, 3), (1, 3), (2, 2), (1, -1), (2, -7)\}$

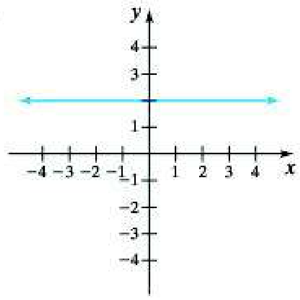
28. $\{(3, 5), (2, 5), (1, 5), (0, 5), (-1, 5)\}$

En los ejercicios del 29 al 40, **a)** *determine si la gráfica ilustrada representa una función.* **b)** *Proporcione el dominio y el rango de cada función o relación.* **c)** *Aproxime el valor o valores de x donde $y = 2$.*

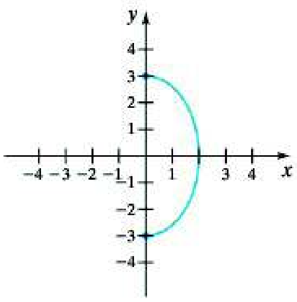
29.



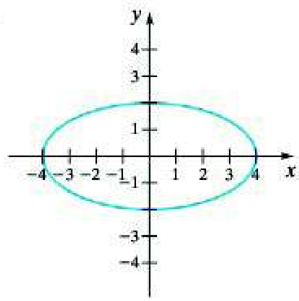
30.



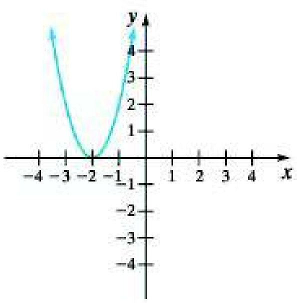
31.



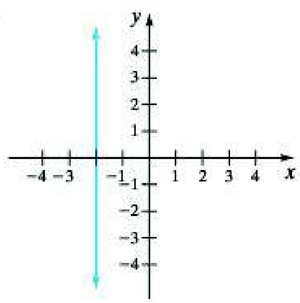
32.



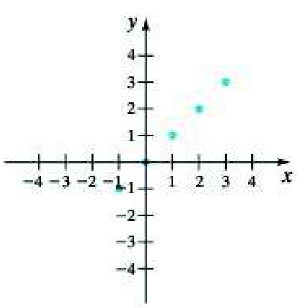
33.



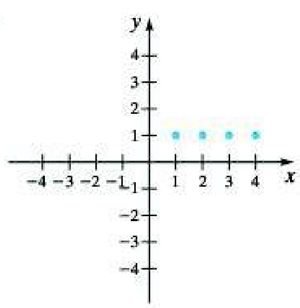
34.



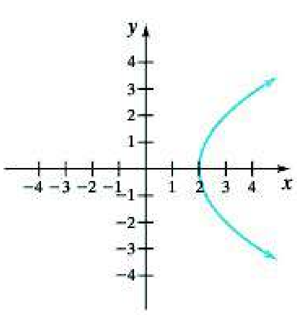
35.



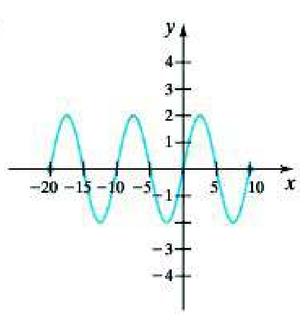
36.



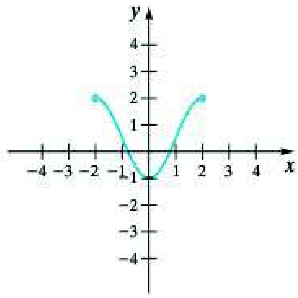
37.



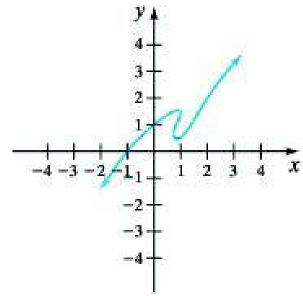
38.



39.



40.



Evalúe cada función en los valores indicados.

41. $f(x) = -2x + 7$; determine
a) $f(2)$.
b) $f(-3)$.

42. $f(a) = \frac{1}{3}a + 4$; determine
a) $f(0)$.
b) $f(-12)$.

43. $h(x) = x^2 - x - 6$; determine
a) $h(0)$.
b) $h(-1)$.

44. $g(x) = -2x^2 + 7x - 11$; determine
a) $g(2)$.
b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

45. $r(t) = -t^3 - 2t^2 + t + 4$; determine
a) $r(1)$.
b) $r(-2)$.

46. $g(t) = 4 - 3t + 16t^2 - 2t^3$; determine
a) $g(0)$.
b) $g(3)$.

47. $h(z) = |5 - 2z|$; determine
a) $h(6)$.
b) $h\left(\frac{5}{2}\right)$.

48. $q(x) = -2|x + 8| + 13$; determine
a) $q(0)$.
b) $q(-4)$.

49. $s(t) = \sqrt{t + 3}$; determine
a) $s(-3)$.
b) $s(6)$.

50. $f(t) = \sqrt{5 - 2t}$; determine
a) $f(-2)$.
b) $f(2)$.

51. $g(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$; determine
a) $g(0)$.
b) $g(2)$.

52. $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 6}$; determine
a) $h(-3)$.
b) $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

Resolución de problemas

53. **Área de un rectángulo** La fórmula para el área de un rectángulo es $A = lw$. Si la longitud de un rectángulo es 6 pies, entonces el área es una función de su ancho, $A(w) = 6w$. Determine el área cuando el ancho es
a) 4 pies.
b) 6.5 pies.

54. **Interés simple** La fórmula para el interés simple generado durante un periodo de 1 año es $i = pr$, donde p es el capital invertido y r es la tasa de interés simple. Si se invierten \$1000, el interés simple generado en un año es una función de la tasa de interés simple, $i(r) = 1000r$. Determine el interés simple generado en un año si la tasa de interés es
a) 2.5%.
b) 4.25%.

55. **Área de un círculo** La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área es una función del radio.
a) Escriba esta función por medio de la notación de funciones.
b) Determine el área cuando el radio es 12 yardas.

56. **Perímetro del cuadrado** La fórmula para el perímetro de un cuadrado es $P = 4s$, donde s representa la longitud de cualquiera de los lados del cuadrado.
a) Escriba esta función utilizando la notación de funciones.
b) Determine el perímetro de un cuadrado con lados de longitud de 7 metros.

57. **Temperatura** La fórmula para cambiar temperaturas en Fahrenheit a temperaturas en Celsius es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. La temperatura Celsius es una función de la temperatura Fahrenheit.
a) Escriba esta función utilizando la notación de funciones.
b) Determine la temperatura Celsius que corresponde a −31°F.

58. Volumen de un cilindro La fórmula para el volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$. Si la altura, h, es de 3 pies, entonces el volumen es una función del radio, r.

a) Escriba esta fórmula en notación de funciones, donde la altura es 3 pies.

b) Determine el volumen, si el radio es de 2 pies.

59. Temperatura en un sauna La temperatura, T, en grados Celsius, en un sauna n minutos después de haberlo encendido, está dada por la función $T(n) = -0.03n^2 + 1.5n + 14$. Determine la temperatura del sauna después de

a) 3 minutos **b)** 12 minutos

60. Distancia para detenerse La distancia para detenerse, d, en metros para un automóvil que viaja a v km/h, está dado por la función $d(v) = 0.18v + 0.01v^2$. Determine la distancia para detenerse para las velocidades siguientes:

a) 60 km/hr **b)** 25 km/hr

61. Aire acondicionado Cuando un aire acondicionado se enciende al máximo en una habitación que está a 80°, la temperatura, T, en la habitación después de A minutos, puede aproximarse por medio de la función $T(A) = -0.02A^2 - 0.34A + 80,\ 0 \le A \le 15$.

a) Estime la temperatura de la habitación 4 minutos después de que se encendió el aire acondicionado.

b) Estime la temperatura de la habitación 12 minutos después de que se encendió el aire acondicionado.

62. Accidentes El número de accidentes, n, durante un mes que involucran a conductores de x años de edad, puede aproximarse por medio de la función $n(x) = 2x^2 - 150x + 4000$. Determine el número aproximado de accidentes en un mes que involucran a conductores de

a) 18 años.

b) 25 años.

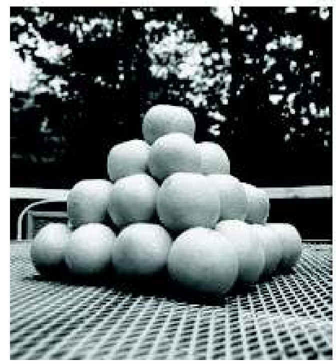
63. Naranjas El número total de naranjas, T, en una pirámide cuadrada cuya base es de n por n naranjas, está dada por medio de la función

$$T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Determine el número total de naranjas, si la base es de

a) 6 por 6 naranjas.

b) 8 por 8 naranjas.



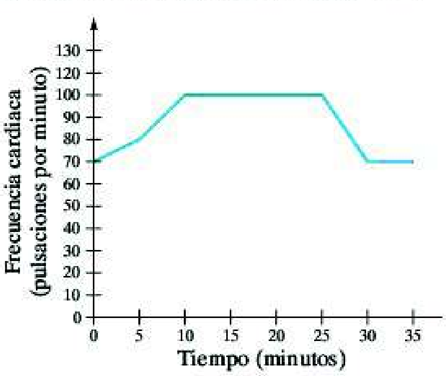
64. Concierto de rock Si el costo de un boleto para un concierto de rock se aumenta en x dólares, el aumento estimado en el ingreso, R, en miles de dólares está dado por medio de la función $R(x) = 24 + 5x - x^2$, $x < 8$. Determine el aumento en los ingresos, si el costo del boleto se aumenta en

a) \$1.

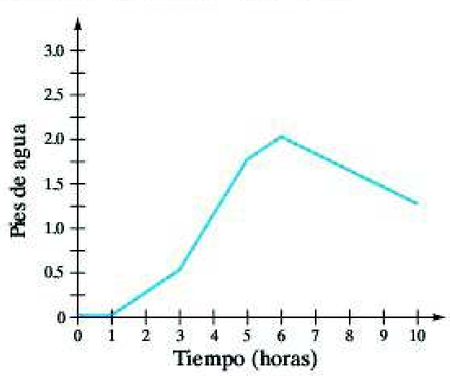
b) \$4.

Revise el ejemplo 5 antes de resolver los ejercicios 65 a 70.

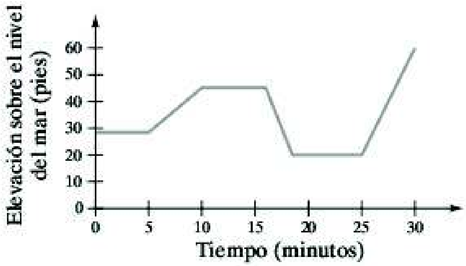
65. Ritmo cardiaco La gráfica siguiente muestra el ritmo cardiaco de una persona mientras está haciendo ejercicio. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



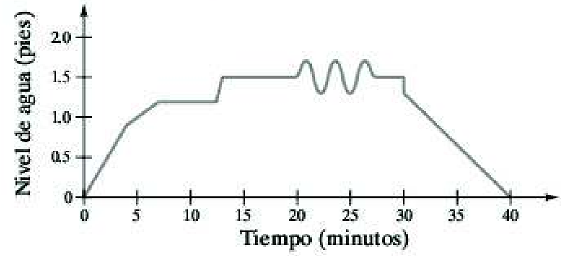
66. Nivel de agua La gráfica siguiente muestra el nivel de agua en un cierto punto durante una inundación. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



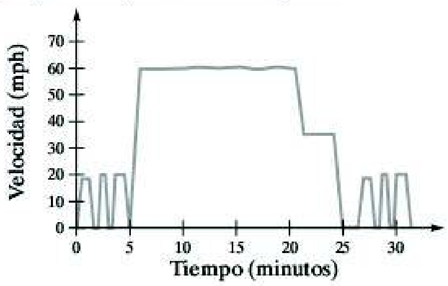
67. Altura sobre el nivel del mar La gráfica siguiente muestra la altura sobre el nivel del mar contra el tiempo cuando un hombre sale de su casa a caminar. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



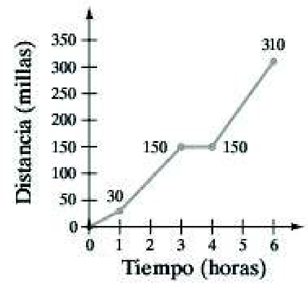
68. Nivel de agua en una tina La gráfica siguiente muestra el nivel de agua en una tina contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



69. Velocidad de un automóvil La gráfica siguiente muestra la velocidad de un automóvil contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



70. Distancia recorrida La gráfica siguiente muestra la distancia recorrida, por una persona en un automóvil, contra el tiempo. Escriba una historia que pueda representar esta gráfica.



71. Precios de casas La gráfica siguiente compara la mediana de los precios de venta de casas en Estados Unidos y en la zona postal 95129 de California.

Fuente: Sistemas de información DATAQuick: Asociación nacional de agentes inmobiliarios. USA Today (2/8/05)

a) ¿Ambas líneas representan funciones? Explique.

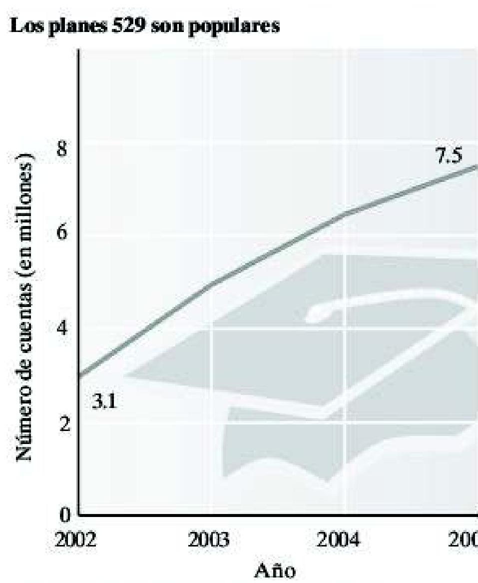
b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable independiente?

c) Si f representa el promedio del precio de venta de las casas en Estados Unidos, determine $f(2005)$.

d) Si g representa el promedio del precio de venta en la zona postal 95129, determine $g(2005)$.

e) Determine el porcentaje de aumento en el precio de venta de una casa unifamiliar en Estados Unidos de 1988 a 2005.

72. Planes de ahorro escolares El número de los planes 529 de ahorro escolares se ha incrementado en Estados Unidos de 2002 a 2005, como se ilustra en la gráfica siguiente.



Fuente: College Savings Plans Network, *USA Today* (8/9/05)

a) ¿Esta gráfica representa una función? Explique.

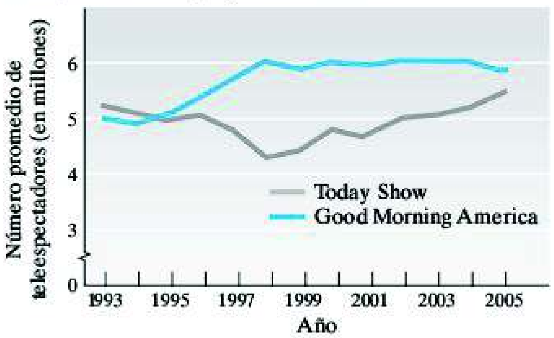
b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente?

c) Si n representa el número de planes 529, determine $n(2005)$.

d) Determine el aumento porcentual en el número de planes 529 de 2002 a 2005.

73. Programa matutino La gráfica siguiente muestra el número de teleespectadores de los programas *The Today Show* (NBC) y *Good Morning America* (ABC) desde la temporada 1992-1993 a la temporada 2004-2005.

Teleespectadores de programas matutinos



Fuente: Nielsen Media Reasearch, *New York Times* (8/9/05)

a) ¿Ambas líneas representan funciones? Explique.

b) Si f representa el número de teleespectadores de *The Today Show*, estime $f(1998)$.

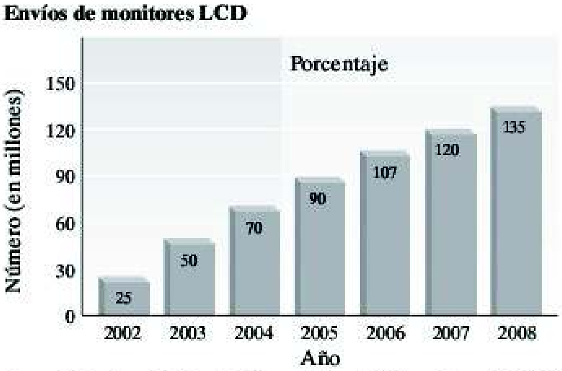
c) Si g representa el número de teleespectadores de *Good Morning America*, estime $g(1998)$.

d) ¿Ambas líneas parecen ser aproximadamente rectas de 1998 a 2005? Explique.

e) Si esta tendencia continúa, estime cuándo los dos programas tendrán el mismo número de teleespectadores.

74. Envíos de monitores LCD Se espera que los envíos de monitores LCD aumenten en los próximos años. La gráfica siguiente muestra los envíos de monitores LCD, en millones de unidades, para los años 2002 a 2008.

Envíos de monitores LCD



Fuente: DisplaySearch, Market Intelligence Center, *Wall Street Journal* (3/24/05)

a) Dibuje una gráfica lineal que muestre esta información.

b) ¿La gráfica que dibujó en la parte **a)** parece ser aproximadamente lineal? Explique.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, estime, con base en la gráfica que dibujó, el número de monitores de LCD que serán enviados en 2009.

d) ¿La gráfica de barras representa una función?

e) ¿La gráfica lineal que dibujó en la parte **a)** representa una función?

75. **Comerciales en el Súper Bowl** El precio promedio del costo de un comercial de 30 segundos durante el Súper Tazón (Súper Bowl) se ha incrementado al paso de los años. La tabla siguiente proporciona el costo aproximado de un comercial de 30 segundos para años seleccionados desde 1981 hasta 2005.

Año	Costo (miles de dólares)
1981	280
1985	500
1989	740
1993	970
1997	1200
2001	2000
2005	2400

a) Dibuje una gráfica de líneas que muestre esta información.

b) ¿La gráfica parece ser aproximadamente lineal? Explique.

c) Con base en la gráfica, estime el costo de un comercial de 30 segundos en el año 2004.

76. Gasto familiar El promedio anual de gastos familiares es una función del ingreso promedio anual de la familia. El gasto promedio puede estimarse por medio de la función

$$f(i) = 0.6i + 5000 \quad \$3500 \le i \le \$50{,}000$$

donde $f(i)$ es el gasto familiar promedio e i es el ingreso promedio de la familia.

a) Dibuje una gráfica que muestre la relación entre ingreso promedio de la familia y el gasto familiar promedio.

b) Estime el gasto familiar promedio para una familia cuyo ingreso promedio es de $30,000.

77. Oferta y demanda El precio de bienes como la soya, se determina por medio de **la oferta y la demanda**. Si se produce demasiada soya, la oferta será mayor que la demanda y el precio caerá. Si no se produce suficiente soya, la demanda será mayor que la oferta y el precio de la soya subirá. Por lo tanto, el precio de la soya es una función del número de *bushels* de soya producidos. El precio de un *bushel* de soya puede estimarse por medio de la función

$$f(Q) = -0.00004Q + 4.25, \quad 10{,}000 \le Q \le 60{,}000$$

donde $f(Q)$ es el precio de un *bushel* de soya y Q es el número anual de *bushels* de soya producidos.

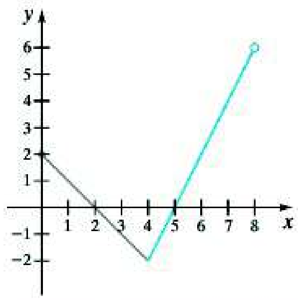
a) Construya una gráfica que muestre la relación entre el número de *bushels* de soya producidos y el precio de *bushel* de soya.

b) Estime el costo de un *bushel* de soya, si se producen 40,000 *bushels* de soya en un año dado.

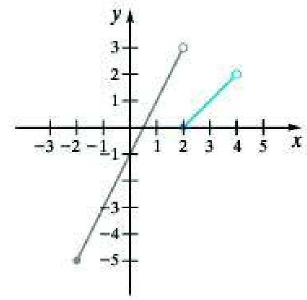
Actividad en grupo

En muchas situaciones de la vida real se puede requerir más de una función para representar un problema. Con frecuencia esto ocurre donde están implicadas dos o más tasas diferentes. Por ejemplo, cuando analizamos los impuestos federales por ingresos hay diferentes tasas de impuestos. Cuando se utilizan dos o más funciones para representar un problema, la función se denomina ***definida por partes****. A continuación están dos ejemplos de funciones definidas por partes y sus gráficas.*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \le x < 4 \\ 2x - 10, & 4 \le x < 8 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -2 \le x < 2 \\ x - 2, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$



En equipo, grafiquen las siguientes funciones definidas por partes.

78. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & -1 \le x < 2 \\ 7 - x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$

79. $g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -3 < x < 0 \\ -3x + 1, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **80.** Resuelva $3x - 2 = \frac{1}{3}(3x - 3)$.

[2.2] **81.** Despeje p_2 de la fórmula siguiente.

$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

[2.5] **82.** Resuelva la desigualdad $\frac{3}{5}(x - 3) > \frac{1}{4}(3 - x)$ e indique la solución

a) en la recta numérica;

b) en notación de intervalos, y

c) en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **83.** Resuelva la ecuación $\left|\frac{x - 4}{3}\right| + 9 = 11$.

3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones

1. Graficar funciones lineales.
2. Graficar funciones lineales mediante sus intercepciones.
3. Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$.
4. Estudiar aplicaciones de funciones.
5. Resolver de manera gráfica ecuaciones lineales con una variable.

1 Graficar funciones lineales

En la sección 3.1 graficamos ecuaciones lineales. Para graficar la ecuación lineal $y = 2x + 4$, podemos construir una tabla de valores, trazar los puntos y dibujar la gráfica, como se muestra en la **figura 3.32**. Observe que esta gráfica representa una función, ya que pasa la prueba de la recta vertical.

x	y
-2	0
0	4
1	6

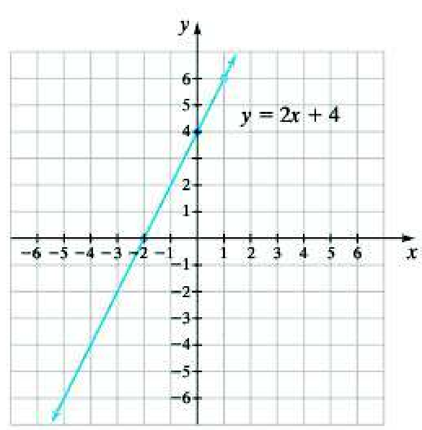


FIGURA 3.32

Podemos escribir la ecuación que se graficó en la **figura 3.32** utilizando la notación de función como $f(x) = 2x + 4$. Éste es un ejemplo de una función lineal. Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de cualquier función lineal es una línea recta. El dominio de cualquier función es el conjunto de números reales para los cuales la función es un número real. El dominio de cualquier función lineal es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$: cualquier número real, x, sustituido en una función lineal tendrá como resultado que $f(x)$ sea un número real. Estudiaremos dominios de funciones más adelante en la sección 3.6.

Para graficar una función lineal, tratamos a $f(x)$ como y y seguimos el mismo procedimiento utilizado para graficar ecuaciones lineales.

Sugerencia útil

Al graficar una función lineal, recuerde que $y = f(x)$.

EJEMPLO 1 ▸ Grafique $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Solución Construimos una tabla de valores por medio de la sustitución de valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$ o y. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica, como se ilustra en la **figura 3.33**.

x	$f(x)$
−2	−2
0	−1
2	0

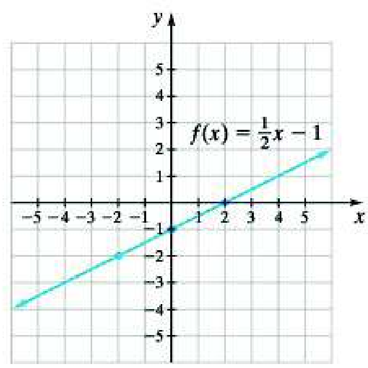


FIGURA 3.33

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

Observe que el eje vertical en la **figura 3.33** también puede etiquetarse como $f(x)$, en lugar de y. En este libro continuaremos etiquetándolo como y.

2 Graficar funciones lineales mediante sus intercepciones

Las ecuaciones lineales no siempre están en la forma $y = ax + b$. La ecuación $2x + 3y = 6$ es un ejemplo de una ecuación lineal dada en *la forma general.*

Forma general de una ecuación lineal

La **forma general de una ecuación lineal** es

$$ax + by = c$$

en donde a, b y c son números reales, y a y b no son ambos iguales a 0.

Ejemplos de ecuaciones lineales en la forma general

$$2x + 3y = 4 \qquad -x + 5y = -2$$

Algunas veces, cuando una ecuación está dada en la forma general, puede ser más fácil dibujar la gráfica usando las intersecciones con el eje x y con el eje y. Examine los dos puntos en la gráfica que se muestra en la **figura 3.32**. Observe que la gráfica cruza el eje x en el punto $(-2, 0)$. Así, $(-2, 0)$ se denomina **intercepción x** o **intersección con el eje x**. En ocasiones decimos que la intercepción x está *en* -2 (en el eje x), la coordenada x de la pareja ordenada.

La gráfica cruza al eje y en el punto $(0, 4)$. Por consiguiente $(0, 4)$ se denomina **intercepción y** o **intersección con el eje y**. En ocasiones decimos que la intercepción y está *en* 4 (en el eje y), la coordenada y de la pareja ordenada.

A continuación explicamos cómo pueden determinarse las intercepciones x y y de manera algebraica.

Para determinar las intercepciones x y y

Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y despeje a y.

Para determinar la intercepción x, haga $y = 0$ y despeje a x.

Para graficar una ecuación lineal o una función lineal, utilizando las intercepciones x y y, determine las intercepciones y trace los puntos. Luego dibuje una línea recta que pase por los puntos. Cuando grafique ecuaciones lineales por medio de las intercepciones, debe ser muy cuidadoso. Si alguno de sus puntos se traza de manera equivocada, su gráfica será incorrecta.

EJEMPLO 2 Grafique la ecuación $5x = 10y - 20$ trazando las intercepciones x y y.

Solución Para determinar la intercepción y (el punto donde la gráfica cruza el eje y), haga $x = 0$ y despeje a y.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5(0) &= 10y - 20 \\ 0 &= 10y - 20 \\ 20 &= 10y \\ 2 &= y \end{aligned}$$

La gráfica cruza el eje y en $y = 2$. La pareja ordenada que representa la intercepción y es $(0, 2)$.

Para determinar la intercepción x (el punto donde la gráfica cruza al eje x), haga $y = 0$ y despeje a x.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5x &= 10(0) - 20 \\ 5x &= -20 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

La gráfica cruza el eje x en $x = -4$. La pareja ordenada que representa la intercepción x es $(-4, 0)$. Ahora trace las intercepciones y dibuje la gráfica (**figura 3.34**).

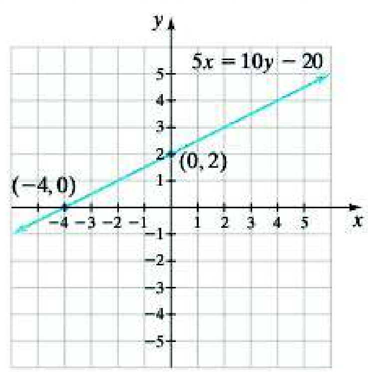


FIGURA 3.34

Ahora resuelva el ejercicio 23

EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ utilizando las intercepciones x y y.

Solución Trate a $f(x)$ igual que a y. Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y resuelva para $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x - 1 \\ f(x) &= -\frac{1}{3}(0) - 1 = -1 \end{aligned}$$

La intercepción y es $(0, -1)$.

Para determinar la intercepción x, haga $f(x) = 0$ y despeje a x.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$0 = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$3(0) = 3\left(-\frac{1}{3}x - 1\right) \quad \text{Multiplique ambos lados por 3.}$$

$$0 = -x - 3 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$x = -3 \quad \text{Sume } x \text{ a ambos lados.}$$

La intercepción x es $(-3, 0)$. La gráfica se muestra en la **figura 3.35**.

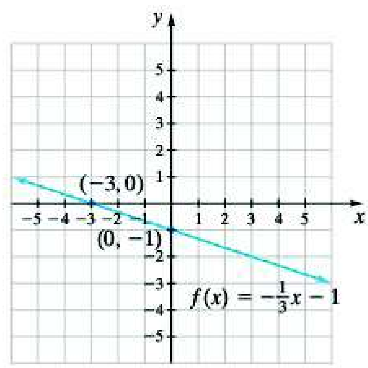


FIGURA 3.35

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

Las gráficas de la forma $ax + by = 0$, pasan por el origen y tienen la misma intercepción x y y $(0, 0)$. Para graficar tales ecuaciones podemos usar la intercepción como un punto y sustituir valores para x y determinar los valores correspondientes de y para obtener otros puntos en la gráfica.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $-6x + 4y = 0$.

Solución Si sustituimos $x = 0$, encontramos que $y = 0$. Por lo que la gráfica pasa por el origen. Seleccionaremos $x = -2$ y $x = 2$ y sustituimos estos valores en la ecuación, uno a la vez, para determinar otros dos puntos en la gráfica.

Sea $x = -2$.	Sea $x = 2$.
$-6x + 4y = 0$	$-6x + 4y = 0$
$-6(-2) + 4y = 0$	$-6(2) + 4y = 0$
$12 + 4y = 0$	$-12 + 4y = 0$
$4y = -12$	$4y = 12$
$y = -3$	$y = 3$
parejas ordenadas: $(-2, -3)$	$(2, 3)$

Otros dos puntos en la gráfica están en $(-2, -3)$ y $(2, 3)$. La gráfica de $-6x + 4y = 0$ se muestra en la **figura 3.36** de la página 177.

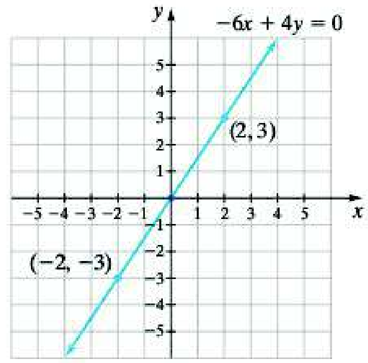


FIGURA 3.36

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En ocasiones puede ser difícil estimar la intercepción de una gráfica de manera precisa. Cuando esto ocurra, quizá desee utilizar una calculadora graficadora. En el ejemplo siguiente demostramos cómo.

Ejemplo Determine las intercepciones x y y de la gráfica de $y = 1.3(x - 3.2)$.

Solución Presione la tecla $\boxed{Y=}$, y después asigne $1.3(x - 3.2)$ a y. Luego presione la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$ para graficar la función $y = 1.3(x - 3.2)$, como se muestra la **figura 3.37a**.

Con base en la gráfica puede ser difícil determinar las intercepciones. Una manera de determinar la intercepción y es utilizar la característica TRACE, que se analizó en la sección 3.1. La **figura 3.37b** muestra la pantalla de una TI-84 Plus después que ha sido presionada la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$. Observe que la intercepción y está en -4.16.

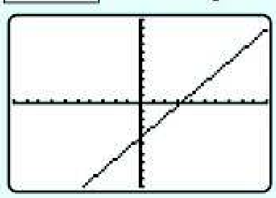


FIGURA 3.37a

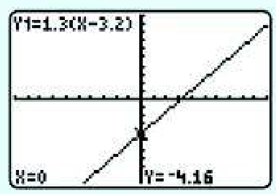


FIGURA 3.37b

Algunas calculadoras graficadoras tienen la capacidad para determinar las intercepciones x de una función presionando sólo algunas teclas. Un **cero** (o **raíz**) de una función es un valor de x tal que $f(x) = 0$. Un cero (o raíz) de una función, es la coordenada x de la intercepción x de la gráfica de la función. Lea el manual de su calculadora para aprender cómo determinar los ceros o raíces de una función. En la TI-84 Plus presione las teclas $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ para obtener el menú CALC (la cual se establece para calcular). Luego seleccione la opción 2, *zero*. Una vez seleccionada la característica cero, la calculadora mostrará

Left bound?

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la curva hasta que esté a la *izquierda* del cero. Luego presione $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora la calculadora mostrará

Right bound?

Mueva el cursor a lo largo de la curva hasta que esté a la *derecha* del cero. Luego presione $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora la calculadora muestra

Guess?

Presione $\boxed{\text{ENTER}}$ por tercera vez y el cero se mostrará en la parte inferior de la pantalla, como en la **figura 3.38**. Así, la intercepción x en la función está en 3.2. Para practicar la determinación de intercepciones en su calculadora, resuelva los ejercicios del 69 al 72.

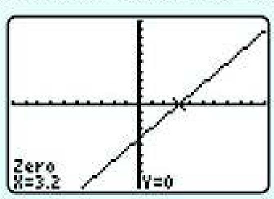


FIGURA 3.38

3 Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$

Los ejemplos 5 y 6 ilustran cómo se grafican ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$, donde a y b son constantes.

EJEMPLO 5 Grafique la ecuación $y = -3$.

Solución Esta ecuación puede escribirse como $y = -3 + 0x$. Así, para cualquier valor seleccionado de x, y es -3. La gráfica de $y = -3$ se ilustra en la **figura 3.39**.

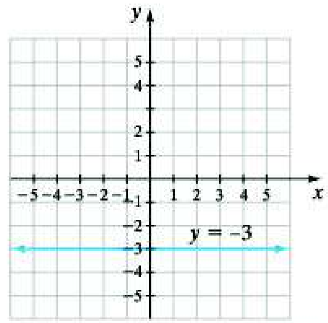


FIGURA 3.39

Ahora resuelva el ejercicio 43

Ecuación de una recta horizontal

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ siempre será una recta horizontal para cualquier número real b.

Observe que la gráfica de $y = -3$ es una función, ya que pasa la prueba de la recta vertical. Para cada valor seleccionado de x, el valor de y, o el valor de la función, es -3. Éste es un ejemplo de una **función constante**. Podemos escribir

$$f(x) = -3$$

Cualquier ecuación de la forma $y = b$ o $f(x) = b$, donde b representa una constante, es una función constante.

EJEMPLO 6 Grafique la ecuación $x = 2$.

Solución Esta ecuación puede escribirse como $x = 2 + 0y$. Por lo tanto, para cada valor seleccionado de y, x tendrá un valor de 2 (**figura 3.40**).

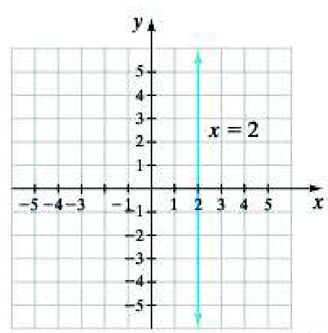


FIGURA 3.40

Ahora resuelva el ejercicio 41

Ecuación de una recta vertical

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Observe que la gráfica de $x = 2$ no representa una función ya que no pasa la prueba de la recta vertical. Para $x = 2$ existe más de un valor de y. De hecho, cuando $x = 2$ hay un número infinito de valores para y.

4 Estudiar aplicaciones de funciones

Con frecuencia las gráficas se utilizan para mostrar la relación entre variables. Los ejes de una gráfica no tienen que ser etiquetados como x y y; antes bien, pueden designarse con cualquier variable. Considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ▸ **Utilidad en un almacén de neumáticos** La utilidad anual, p, de un almacén de neumáticos puede estimarse por medio de la función $p(n) = 20n - 30{,}000$, en la que n es el número de neumáticos vendidos por año.

a) Dibuje una gráfica de la utilidad contra los neumáticos vendidos hasta e incluyendo 6000 neumáticos.

b) Estime el número de neumáticos que deben venderse para que la compañía no pierda ni gane.

c) Estime el número de neumáticos vendidos, si la compañía tiene una utilidad de \$70,000.

Solución **a)** Entienda el problema La utilidad, p, es una función del número de neumáticos vendidos, n. Por tanto, el eje horizontal estará etiquetado Número de neumáticos vendidos (la variable independiente) y el eje vertical estará etiquetado Utilidad (la variable dependiente). Como el número mínimo de neumáticos que pueden venderse es 0, los valores negativos no tienen que estar listados en el eje horizontal. Por consiguiente, el eje horizontal irá de 0 a 6000 neumáticos.

Graficaremos esta ecuación determinando y trazando las intercepciones.

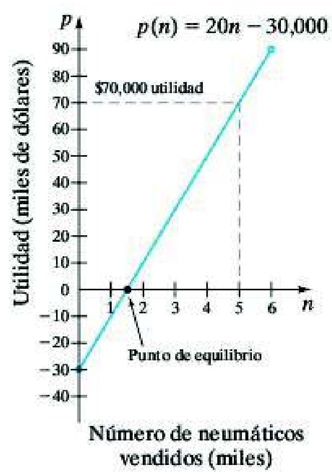


FIGURA 3.41

Traduzca y realice los cálculos Para determinar la intercepción p, hacemos $n = 0$ y le resolvemos para $p(n)$.

$$p(n) = 20n - 30{,}000$$
$$p(n) = 20(0) - 30{,}000 = -30{,}000$$

Así, la intercepción p es $(0, -30{,}000)$

Para determinar la intercepción n, hacemos $p(n) = 0$ y despejamos n.

$$p(n) = 20n - 30{,}000$$
$$0 = 20n - 30{,}000$$
$$30{,}000 = 20n$$
$$1500 = n$$

Así, la intercepción n es $(1500, 0)$.

Responda Ahora utilizamos las intercepciones p y n para dibujar la gráfica (vea la **figura 3.41**).

b) El punto de equilibrio es el número de neumáticos que deben venderse para que la compañía no tenga ganancias ni pérdidas. El punto de equilibrio es donde la gráfica interseca el eje n, que es donde la utilidad, p, es 0. Para estar en equilibrio, deben venderse aproximadamente 1500 neumáticos.

c) Para tener una utilidad de \$70,000, deben venderse aproximadamente 5000 neumáticos (mostrados por la línea discontinua en la **figura 3.41**).

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

Algunas veces es difícil leer una respuesta exacta a partir de una gráfica. A fin de determinar el número exacto de neumáticos necesarios para estar en el punto de equilibrio del ejemplo 7, sustituya 0 por $p(n)$ en la función $p(n) = 20n - 30{,}000$ y despeje n. Para determinar el número exacto de neumáticos para tener una utilidad de \$70,000, sustituya 70,000 por $p(n)$ y resuelva la ecuación para n.

EJEMPLO 8 ▸ **Ventas en una juguetería** Andrew Gestrich es el propietario de una juguetería. Su salario mensual consiste en \$200 más 10% de las ventas de la tienda durante el mes.

a) Escriba una función que exprese su salario mensual, m, en términos de las ventas de la tienda, s.

b) Dibuje una gráfica de su salario mensual para ventas superiores a e incluyendo \$20,000.

c) Si las ventas del almacén durante el mes de abril son \$15,000, ¿cuál será el salario de Andrew para abril?

s	m
0	200
10,000	1200
20,000	2200

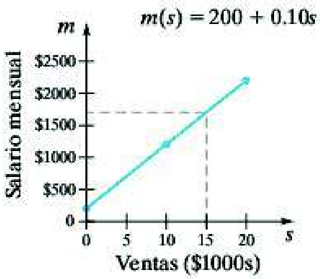


FIGURA 3.42

Solución

a) El salario mensual de Andrew es una función de las ventas. Su salario mensual, m, consiste en \$200 más 10% de las ventas, s. Diez por ciento de s es $0.10s$. Así que la función para determinar su salario es

$$m(s) = 200 + 0.10s$$

b) Como el salario mensual es una función de las ventas, Ventas estará representado en el eje horizontal y Salario mensual estará representado en el eje vertical. Como las ventas nunca pueden ser negativas, el salario mensual nunca puede ser negativo. Así, ambos ejes se dibujarán sólo con números positivos. Dibujaremos esta gráfica por medio del trazo de puntos. Seleccionamos valores para s, determinamos los valores correspondientes de m y luego dibujamos la gráfica. Podemos seleccionar valores de s que estén entre \$0 y \$20,000 (**figura 3.42**).

c) Al leer cuidadosamente nuestra gráfica, podemos estimar que cuando las ventas de la tienda son de \$15,000, el salario mensual de Andrew es alrededor de \$1700.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

5 Resolver de manera gráfica ecuaciones lineales con una variable

Anteriormente estudiamos la gráfica de $f(x) = 2x + 4$. A continuación, en la **figura 3.43**, ilustramos la gráfica de $f(x)$ junto con la gráfica de $g(x) = 0$. Observe que las dos gráficas se intersecan en $(-2, 0)$. Podemos obtener la coordenada x de la pareja ordenada resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$. Recuerde que $f(x)$ y $g(x)$ representan a y, y que despejando a x de esta ecuación obtendremos el valor de x donde las y son iguales.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \overbrace{2x + 4} &= \overbrace{0} \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Observe que obtenemos -2, la coordenada x de la pareja ordenada en el punto de intersección.

Ahora determinemos la coordenada x del punto en el cual se intersecan las gráficas de $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = 2$. Resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \overbrace{2x + 4} &= \overbrace{2} \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

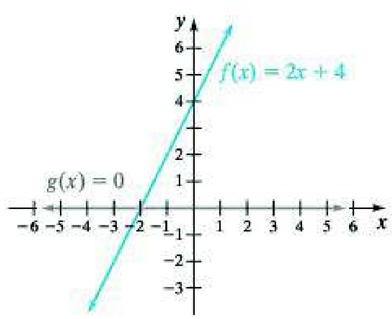


FIGURA 3.43

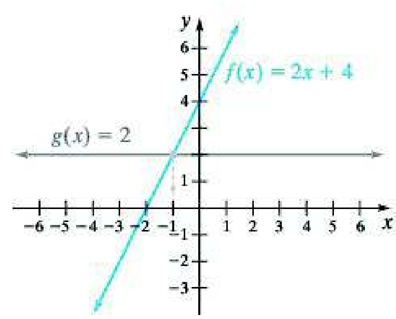


FIGURA 3.44

La coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas es -1, como se muestra en la **figura 3.44**. Observe que $f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$.

En general, si se nos da una ecuación en una variable, podemos considerar cada lado de la ecuación como una función separada. Para obtener la solución para la ecuación, podemos graficar las dos funciones. La coordenada x del punto de intersección será la solución a la ecuación.

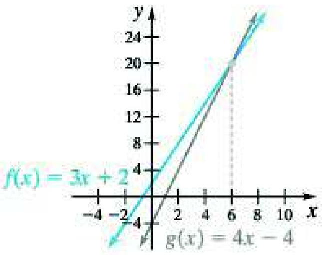


FIGURA 3.45

EJEMPLO 9 ▶ Determine, de forma gráfica, la solución a la ecuación $3x + 2 = 4x - 4$.

Solución Sean $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 4x - 4$. La gráfica de estas funciones se ilustra en la **figura 3.45**. La coordenada x del punto de intersección es 6. Por lo tanto, la solución de la ecuación es 6. Ahora compruebe la solución.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 65**

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 9 resolvimos una ecuación en una variable por medio de la graficación de dos funciones. En el ejemplo siguiente, explicamos cómo determinar el punto de intersección de dos funciones en una calculadora graficadora.

Ejemplo Utilice una calculadora graficadora para determinar la solución de $2(x + 3) = \frac{1}{2}x + 4$.

Solución Asigne $2(x + 3)$ a Y_1 y asigne $\frac{1}{2}x + 4$ a Y_2 para obtener

$$Y_1 = 2(x + 3)$$
$$Y_2 = \frac{1}{2}x + 4$$

Ahora presione la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$ para graficar las funciones. La gráfica de las funciones se muestra en la **figura 3.46**.

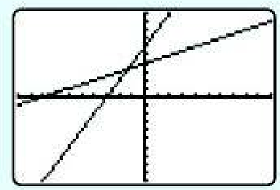


FIGURA 3.46

Examinando la gráfica, ¿puede determinar la coordenada x del punto de intersección? ¿Es -1, -1.5, o algún valor diferente? Podemos determinar el punto de intersección de varias formas. Un método implica utilizar las características TRACE y ZOOM. La **figura 3.47** muestra la ventana de una TI-84 Plus después de que se ha utilizado la característica TRACE y el cursor se ha movido muy cerca del punto de intersección. (Observe que al presionar las teclas de flecha hacia arriba y hacia abajo cambia de una función a la otra).

En la parte inferior de la pantalla de la **figura 3.47**, observe las coordenadas x y y del cursor. Para obtener una vista más cercana alrededor del área del cursor, podemos realizar un *acercamiento* (*zoom in*) por medio de la tecla $\boxed{\text{ZOOM}}$. Después de hacer un acercamiento, puede mover el cursor más cerca del punto de intersección y obtener una mejor lectura (**figura 3.48**). Puede hacer esto una y otra vez hasta que obtenga tanta precisión en su respuesta como necesite. Parece, de la **figura 3.48**, que la coordenada x de la intersección es alrededor de -1.33.

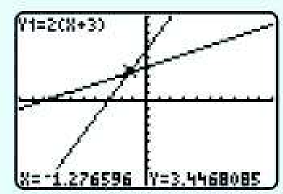


FIGURA 3.47

Las calculadoras graficadoras también pueden mostrar la intersección de dos gráficas utilizando ciertas teclas. Las teclas que hay que presionar dependen de su calculadora; lea el manual de su calculadora para determinar cómo hacer esto. Por lo general, este procedimiento es más rápido y fácil de usar para determinar el punto de intersección de dos gráficas.

En la TI-84 Plus, seleccione la opción 5:INTERSECT, del menú CALC para determinar la intersección. Una vez que se ha seleccionado la característica INTERSECT, la calculadora mostrará

First curve?

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la primera curva hasta que esté cerca del punto de intersección. Luego presione la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora la calculadora mostrará

Second curve?

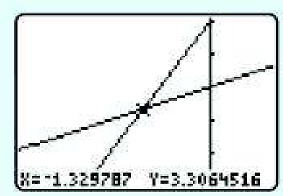


FIGURA 3.48

Entonces, el cursor aparecerá en la segunda curva. Si el cursor no está cerca del punto de intersección, muévalo a lo largo de esta curva hasta que esté cerca. Ahora presione $\boxed{\text{ENTER}}$. A continuación la calculadora mostrará

Guess?

Ahora presione otra vez $\boxed{\text{ENTER}}$ y se mostrará el punto de intersección.

La **figura 3.49** muestra la ventana después de que se ha realizado este procedimiento. Vemos que la coordenada x del punto de intersección es $-1.333\ldots$ o $-1\frac{1}{3}$ y la coordenada y del punto de intersección es $3.333\ldots 3\frac{1}{3}$.

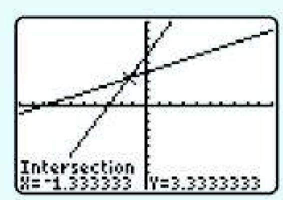


FIGURA 3.49

Para practicar el uso de una calculadora graficadora a fin de resolver una ecuación con una variable, resuelva los ejercicios del 65 al 68.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la forma general de una ecuación lineal?
2. Si le dan una ecuación lineal en forma general y desea escribir la ecuación por medio de notación de funciones, ¿cómo lo haría?
3. Expliqué cómo determinar las intercepciones x y y de la gráfica de una ecuación.
4. ¿Qué términos utiliza una calculadora graficadora para indicar las intercepciones x?
5. ¿Cómo se verá la gráfica de $x = a$ para cualquier número real a?
6. ¿Qué apariencia tendrá la gráfica de $y = b$ para cualquier número real b?
7. ¿Qué apariencia tendrá la gráfica de $f(x) = b$ para cualquier número real b?
8. ¿La gráfica de $x = a$ es una función? Explique.
9. Explique cómo resolver, de forma gráfica, una ecuación con una variable.
10. Explique cómo resolver la ecuación $4(x - 1) = 3x - 8$ de forma gráfica.

Práctica de habilidades

Escriba cada ecuación en la forma general.

11. $y = -2x + 5$
12. $7x = 3y - 6$
13. $3(x - 2) = 4(y - 5)$
14. $\frac{1}{2}y = 2(x - 3) + 4$

Grafique cada ecuación utilizando las intercepciones x y y.

15. $y = -2x + 1$
16. $y = x - 5$
17. $f(x) = 2x + 3$
18. $f(x) = -6x + 5$
19. $2y = 4x + 6$
20. $2x - 3y = 12$
21. $\frac{4}{3}x = y - 3$
22. $\frac{1}{4}x + y = 2$
23. $15x + 30y = 60$
24. $6x + 12y = 24$
25. $0.25x + 0.50y = 1.00$
26. $-1.6y = 0.4x + 9.6$
27. $120x - 360y = 720$
28. $250 = 50x - 50y$
29. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 12$
30. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -3$

Grafique cada ecuación.

31. $y = -2x$
32. $y = \frac{1}{2}x$
33. $f(x) = \frac{1}{3}x$
34. $g(x) = 4x$
35. $2x + 4y = 0$
36. $-10x + 5y = 0$
37. $6x - 9y = 0$
38. $18x + 6y = 0$

Grafique cada ecuación.

39. $y = 4$
40. $y = -4$
41. $x = -4$
42. $x = 4$
43. $y = -1.5$
44. $f(x) = -3$
45. $x = 0$
46. $g(x) = 0$
47. $x = \frac{5}{2}$
48. $x = -3.25$

Resolución de problemas

49. **Distancia** Por medio de la fórmula de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo, o } d = rt$$

dibuje una gráfica de distancia contra tiempo para una velocidad constante de 30 millas por hora.

50. **Interés simple** Por medio de la fórmula de interés simple

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo, o } i = prt$$

dibuje una gráfica de interés contra tiempo para un capital de \$1000 y una tasa de 3%.

51. **Utilidad en bicicletas** La utilidad de un fabricante de bicicletas puede aproximarse por medio de la función $p(x) = 60x - 80{,}000$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas.

a) Dibuje una gráfica de utilidad contra el número de bicicletas vendidas (hasta 5000 bicicletas).

b) Estime el número de bicicletas que deben venderse para que la compañía esté en equilibrio.

c) Estime el número de bicicletas que se debe vender para que la compañía tenga una utilidad de \$150,000.

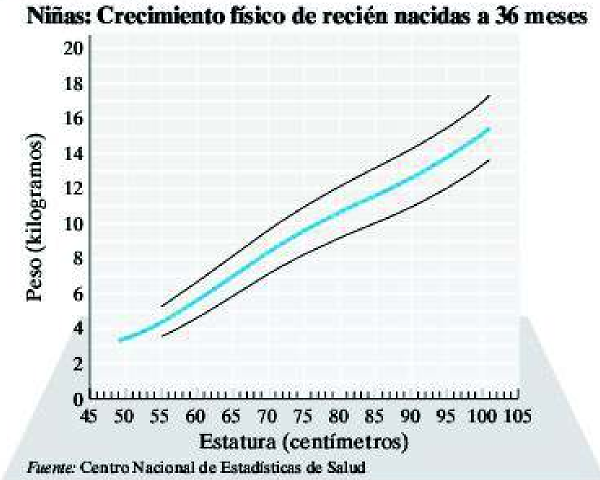
52. **Costo de operación de un taxi** El costo semanal de Raúl López para la operación de un taxi es \$75 más 15 centavos por milla.
   a) Escriba una función que exprese el costo semanal de Raúl, c, en términos del número de millas, m.
   b) Dibuje una gráfica que ilustre el costo semanal contra el número de millas, hasta 200, conducidas por semana.
   c) Si durante una semana, Raúl condujo el taxi 150 millas, ¿cuál sería el costo?
   d) ¿Cuántas millas tendría que conducir Raúl para que el costo semanal fuese de \$135?

53. **Salario más comisión** El salario semanal de Jayne Haydack en Charter Network es \$500 más 15% de comisión sobre sus ventas semanales.
   a) Escriba una función que exprese el salario semanal de Jayne, s, en términos de sus ventas semanales, x.
   b) Dibuje una gráfica del salario semanal de Jayne contra sus ventas semanales, hasta \$5000 en ventas.
   c) ¿Cuál es el salario semanal de Jayne, si sus ventas fueron de \$3000?
   d) Si el salario semanal de Jayne durante la semana fue de \$1100, ¿cuáles fueron sus ventas semanales?

54. **Salario más comisión** Lynn Hicks, una agente de bienes raíces, gana \$100 por semana más 3% de comisión por ventas en cada propiedad que ella venda.
   a) Escriba una función que exprese su salario semanal, s, en términos de las ventas, x.
   b) Dibuje una gráfica de su salario contra sus ventas semanales, para ventas hasta de \$100,000.
   c) Si ella vende una casa por semana en \$75,000, ¿cuál será su salario semanal?

55. **Peso de niñas** La gráfica siguiente muestra el peso, en kilogramos, para niñas (hasta de 36 meses de edad) contra la altura (o estatura), en centímetros. La línea roja es el peso promedio de todas las niñas de la estatura dada, y las líneas más delgadas en negro representan los límites superior e inferior del rango normal.

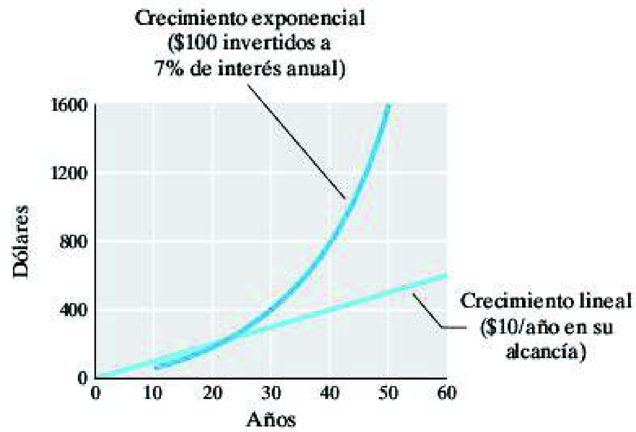
Niñas: Crecimiento físico de recién nacidas a 36 meses



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

   a) Explique por qué la línea roja representa una función.
   b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?
   c) ¿La gráfica del peso contra la estatura es aproximadamente lineal?
   d) ¿Cuál es el peso, en kilogramos, de las niñas que tengan una estatura de 85 centímetros?
   e) ¿Cuál es la altura promedio, en centímetros, de las niñas con un peso de 7 kilogramos?
   f) ¿Qué pesos son considerados normales para una niña de 95 centímetros de estatura?
   g) ¿Qué le sucede al rango normal conforme la altura aumenta? ¿Esto es lo que usted esperaría que sucediese? Explique.

56. **Interés compuesto** La gráfica siguiente ilustra el efecto del interés compuesto.



Si un niño pone \$10 cada año en su alcancía, los ahorros crecerán linealmente, como lo muestra la curva inferior. Si, a la edad de diez años, el niño invierte \$100 al 7% de interés compuesto cada año, esos \$100 crecerán de manera exponencial.
   a) Explique por qué ambas gráficas representan funciones.
   b) ¿Qué es la variable independiente? ¿Qué es la variable dependiente?
   c) Por medio de la curva de crecimiento lineal, determine cuánto tiempo pasará para ahorrar \$600.
   d) Por medio de la curva de crecimiento exponencial, la cual inicia en el año 10, determine cuánto tiempo después de que se haya abierto la cuenta la cantidad alcanzaría \$600.
   e) Iniciando en el año 20 y el dinero creciendo a una tasa lineal, ¿cuánto tiempo pasaría para que el dinero se duplicara?
   f) Si se iniciara en el año 20 y el dinero creciera a una tasa exponencial, ¿cuánto tiempo pasaría para que el dinero se duplicara? (El crecimiento exponencial se estudiará con detalle en el capítulo 9).

57. ¿Cuándo, si sucede, las intercepciones x y y de una gráfica serán iguales? Explique.

58. Escriba dos funciones lineales cuyas intercepciones x y y sean $(0, 0)$.

59. Escriba una función cuya gráfica no tenga intercepción x pero que tenga una intercepción y en $(0, 4)$.

60. Escriba una ecuación cuya gráfica no tenga intercepción y, pero que tenga una intercepción x en -5.

61. Si las intercepciones x y y de una función lineal están en 1 y -3, respectivamente, ¿cuáles serán las nuevas intercepciones x y y, si la gráfica se mueve (o traslada) tres unidades hacia arriba?

62. Si las intercepciones x y y de una función lineal son -1 y 3, respectivamente, ¿cuáles serán las nuevas intercepciones x y y, si la gráfica se mueve (o traslada) cuatro unidades hacia abajo?

En los ejercicios 63 y 64, damos dos parejas ordenadas, las cuales son las intercepciones x y y de una gráfica. **a)** *Trace los puntos y dibuje la línea que pasa por los puntos.* **b)** *Determine el cambio en y, cambio vertical, entre los puntos.* **c)** *Determine el cambio en x, cambio horizontal, entre los puntos.* **d)** *Determine la razón del cambio vertical al cambio horizontal entre estos dos puntos. ¿Sabe lo que representa esta razón? (Estudiaremos esto con más detalle en la sección 3.4).*

63. $(0, 2)$ y $(-4, 0)$

64. $(3, 5)$ y $(-1, -1)$

Resuelva cada ecuación para x como se hizo en el ejemplo 9. Utilice una calculadora graficadora, si tiene una disponible. Si no, dibuje la gráfica usted mismo.

65. $2x + 5 = 8x - 1$

66. $3(x + 2) + 1 = 2(x - 1) + 7$

67. $0.3(x + 5) = -0.6(x + 2)$

68. $2x + \frac{1}{4} = 5x - \frac{1}{2}$

Por medio de su calculadora graficadora, determine las intercepciones x y y de la gráfica de cada ecuación.

69. $y = 2(x + 3.2)$

70. $5x - 2y = 7$

71. $-4x - 3.2y = 8$

72. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] 73. Evalúe $4\{2 - 3[(1 - 4) - 5]\} - 2$.

[2.1] 74. Resuelva $\frac{1}{3}y - 3y = 6(y + 2)$.

[2.6] *En los ejercicios del 75 al 77* **a)** *explique el procedimiento para resolver la ecuación o desigualdad para x (suponga que $b > 0$) y* **b)** *resuelva la ecuación o desigualdad.*

75. $|x - a| = b$

76. $|x - a| < b$

77. $|x - a| > b$

78. Resuelva la ecuación $|x - 4| = |2x - 2|$.

3.4 La forma pendiente intercepción de una ecuación lineal

1 Entender la traslación de gráficas.

2 Determinar la pendiente de una recta.

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio.

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente intercepción.

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intercepción y.

6 Usar la forma pendiente intercepción para construir modelos a partir de gráficas.

1 Entender la traslación de gráficas

En esta sección estudiamos la traslación de gráficas, el concepto de pendiente y la forma pendiente intercepción de una ecuación lineal.

Considere las tres ecuaciones

$$y = 2x + 3$$
$$y = 2x$$
$$y = 2x - 3$$

Cada ecuación se grafica en la **figura 3.50**.

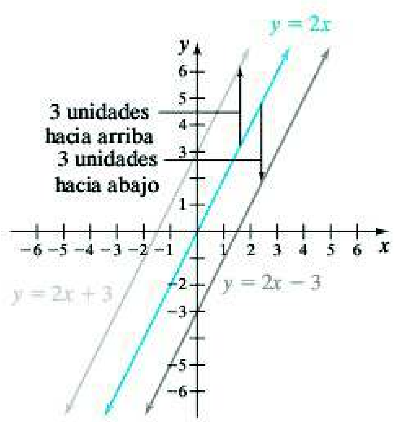


FIGURA 3.50

¿Cuáles son las intercepciones y de $y = 2x + 3$, $y = 2x$ (o $y = 2x + 0$) y $y = 2x - 3$? Las intercepciones y están en $(0, 3)$, $(0, 0)$ y $(0, -3)$, respectivamente. Observe que la gráfica de $y = 2x + 3$ es la gráfica de $y = 2x$ recorrida, o **trasladada**, 3 unidades hacia arriba y $y = 2x - 3$ es la gráfica de $y = 2x$ trasladada 3 unidades hacia abajo. Las tres rectas son **paralelas**; esto es, no se intersecan sin importar cuánto se extiendan.

Por medio de esta información, ¿podría conjeturar cuál será la intercepción y de $y = 2x + 4$? ¿qué hay acerca de la intercepción y de $y = 2x - \frac{5}{3}$? Si respondió $(0, 4)$ y $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, respectivamente, lo hizo correctamente. En efecto, la gráfica de una ecuación de la forma $y = 2x + b$, tendrá una intercepción y de $(0, b)$.

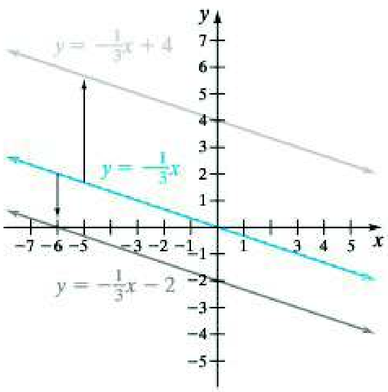


FIGURA 3.51

Ahora considere las gráficas de las ecuaciones $y = -\frac{1}{3}x + 4$, $y = -\frac{1}{3}x$ y $y = -\frac{1}{3}x - 2$, que se muestran en la **figura 3.51**. Las intercepciones y de las tres rectas son $(0, 4)$, $(0, 0)$ y $(0, -2)$, respectivamente. La gráfica de $y = -\frac{1}{3}x + b$ tendrá una intercepción y de $(0, b)$.

Al ver las ecuaciones anteriores, sus gráficas e intercepciones y, ¿podría determinar la intercepción y de la gráfica de $y = mx + b$, donde m y b son números reales? Si su respuesta es $(0, b)$, respondió de forma correcta. En general, la gráfica de $y = mx + b$, donde m y b son números reales, tiene una intercepción y igual a $(0, b)$.

Se miramos las gráficas en la **figura 3.50**, vemos que las pendientes (o inclinaciones) de las tres rectas parecen ser iguales. Si observamos las gráficas en la **figura 3.51**, vemos que las pendientes de esas tres rectas parecen ser iguales, pero su pendiente es diferente de la pendiente de las tres rectas en la **figura 3.50**.

Si consideramos la ecuación $y = mx + b$, en donde la b determina la intercepción y de la recta, podemos razonar que la m es responsable de la pendiente (o inclinación) de la recta.

2 Determinar la pendiente de una recta

Ahora analicemos la pendiente. La **pendiente de una recta** es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera de la recta. Considere la gráfica de $y = 2x$ (la recta de en medio de la **figura 3.50**, y que se repite en la **figura 3.52a**). Dos puntos en esta línea son $(1, 2)$ y $(3, 6)$. Determinamos la pendiente de la recta a través de estos puntos. Si dibujamos una recta paralela al eje x que pase por el punto $(1, 2)$ y una recta paralela al eje y que pase por el punto $(3, 6)$, las dos rectas se intersecan en $(3, 2)$. (Vea la **figura 3.52b**).

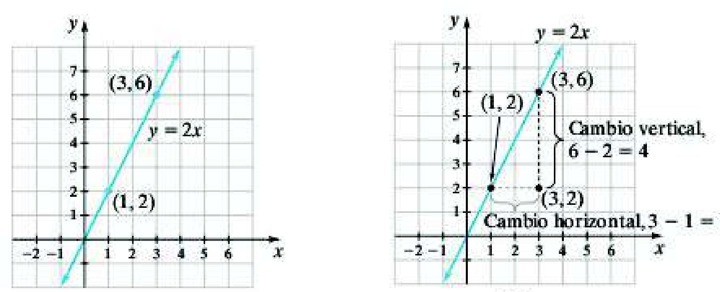


FIGURA 3.52

Con base en la **figura 3.52b** podemos determinar la pendiente de la recta. El cambio vertical (a lo largo del eje y) es $6 - 2$, o 4 unidades. El cambio horizontal (a lo largo del eje x) es $3 - 1$, o 2 unidades.

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$$

Así, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3, 6)$ y $(1, 2)$ es 2. Al examinar la recta que conecta estos dos puntos, podemos ver que por cada 2 unidades que la gráfica se mueve hacia arriba en el eje y, se mueve 1 unidad a la derecha en el eje x (vea la **figura 3.53**).

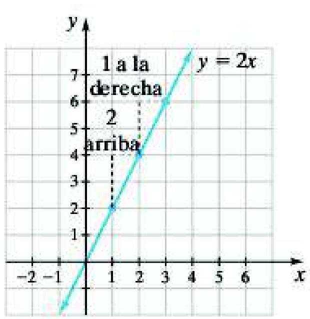


FIGURA 3.53

Hemos determinado que la pendiente de la gráfica de $y = 2x$ sea 2. Si tuviera que calcular la pendiente de las otras dos rectas en la **figura 3.50**, determinaría que las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ también tienen una pendiente de 2.

¿Puede conjeturar cuál es la pendiente de las gráficas de las ecuaciones $y = -3x + 2$, $y = -3x$ y $y = -3x - 2$? La pendiente de las tres rectas es -3. En general, la pendiente de una ecuación de la forma $y = \boldsymbol{m}x + b$ es $\boldsymbol{m}$.*

Ahora determinaremos el procedimiento para encontrar la pendiente de una recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Considere la **figura 3.54**. Podemos determinar el cambio vertical restando y_1 de y_2. Podemos también determinar el cambio horizontal restando x_1 de x_2.

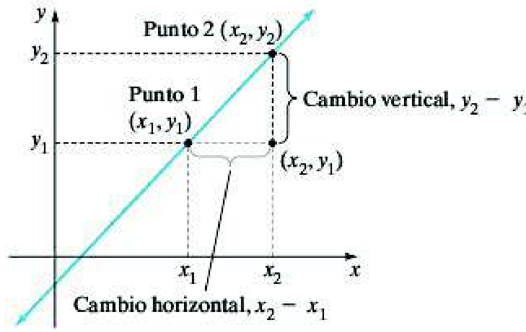


FIGURA 3.54

Pendiente

La **pendiente** de una recta que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre y cuando $x_1 \neq x_2$.

Al determinar la pendiente de una recta no importa cuáles dos puntos de la recta se elijan. Tampoco importa cuál punto se marque como (x_1, y_1) o como (x_2, y_2). Como se mencionó antes, la letra m se utiliza para representar la pendiente de una recta. La letra griega mayúscula delta, Δ, se utiliza para representar las palabras *el cambio en*. Así, en ocasiones la pendiente se indica como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

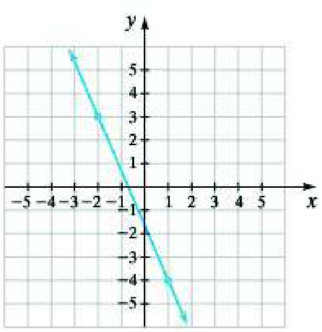


FIGURA 3.55

EJEMPLO 1 Determine la pendiente de la recta de la **figura 3.55**.

Solución Dos puntos en la recta son $(-2, 3)$ y $(1, -4)$. Sea $(x_2, y_2) = (-2, 3)$ y $(x_1, y_1) = (1, -4)$. Entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-4)}{-2 - 1} = \frac{3 + 4}{-3} = -\frac{7}{3}$$

La pendiente de la recta es $-\frac{7}{3}$. Observe que si hubiéramos hecho $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ y $(x_2, y_2) = (1, -4)$, la pendiente seguiría siendo $-\frac{7}{3}$. Inténtelo y lo verá.

Ahora resuelva el ejercicio 35

Una recta que se eleva conforme va de izquierda a derecha (**figura 3.56a** en la página 187) tiene una **pendiente positiva**. Una recta que no se eleva ni baja al ir de izquierda a derecha (**figura 3.56b**) tiene **pendiente cero**. Una recta que baja conforme va de izquierda a derecha (**figura 3.56c**) tiene una **pendiente negativa**.

*Tradicionalmente, la letra m se usa para la pendiente. Se cree que m proviene de la palabra francesa *monter*, que significa "escalar".

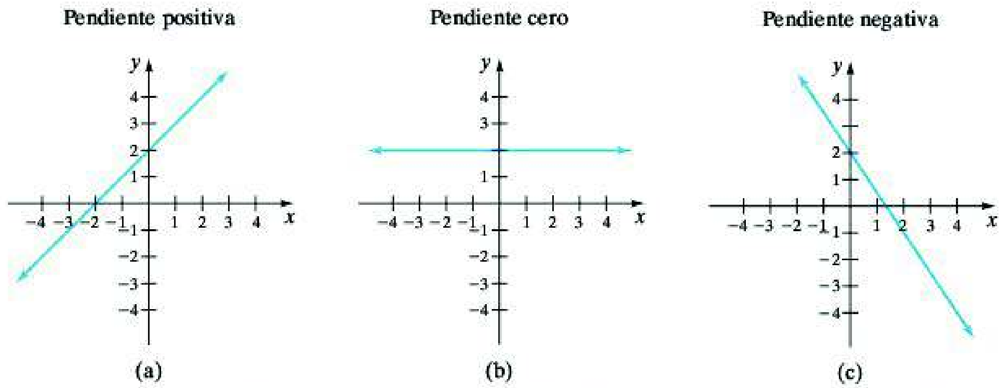


FIGURA 3.56

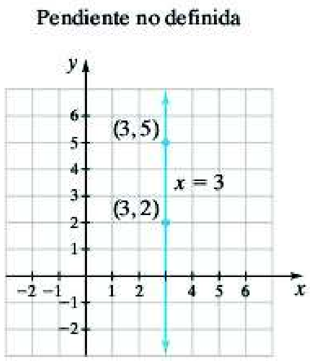


FIGURA 3.57

Considere la gráfica de $x = 3$ (**figura 3.57**). ¿Cuál es su pendiente? La gráfica es una recta vertical y pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(3, 5)$. Sea $(3, 5)$ el punto correspondiente a (x_2, y_2) y sea $(3, 2)$ el punto correspondiente a (x_1, y_1). Entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{3 - 3} = \frac{3}{0}$$

Como no tiene sentido dividir entre 0, decimos que la pendiente de esta recta es indefinida. **La pendiente de cualquier recta vertical es indefinida.**

Sugerencia útil

Cuando se pide a los estudiantes dar la pendiente de una recta horizontal o una vertical, con frecuencia responden de manera incorrecta. Cuando se les pide la pendiente de una recta horizontal, su respuesta debería ser "la pendiente es 0". Si usted responde "no tiene pendiente", su instructor podría indicar que eso es incorrecto, ya que estas palabras pueden tener varias interpretaciones. Cuando se le pregunte por la pendiente de una recta vertical, su respuesta debe ser "la pendiente es indefinida". Nuevamente, si usted utiliza las palabras "no tiene pendiente", su instructor podría interpretar esto en forma diferente y calificarlo como incorrecto.

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio

En ocasiones es útil describir la pendiente como *una razón de cambio*. Considere una pendiente de $\frac{5}{3}$. Esto significa que el valor de y aumenta 5 unidades por cada aumento de 3 unidades en x. De forma equivalente, podemos decir que el valor de y aumenta $\frac{5}{3}$ unidades, o $1.\overline{6}$ unidades, por cada aumento de una unidad en x. Cuando damos el cambio en y por unidad de cambio en x estamos dando la pendiente como una **razón de cambio**. Cuando analicemos situaciones de la vida real o cuando creemos modelos matemáticos, con frecuencia es útil estudiar pendiente como una razón de cambio.

EJEMPLO 2 ▸ Deuda pública La siguiente tabla de valores y la gráfica correspondiente (**figura 3.58**) ilustran la deuda pública de Estados Unidos en miles de millones de dólares desde 1910 a 2005.

Año	Deuda pública de Estados Unidos (miles de millones de dólares)
1910	1.1
1930	16.1
1950	256.1
1970	370.1
1990	3323.3
2002	5957.2
2005	7832.6

Fuente: Departamento del Tesoro de Estados Unidos, Oficina de Deuda Pública.

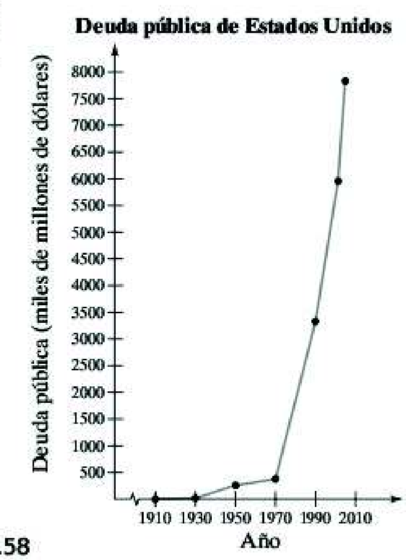


FIGURA 3.58

a) Determine la pendiente de los segmentos de recta entre 1910 y 1930 y entre 2002 y 2005.

b) Compare las dos pendientes determinadas en la parte **a)** y explique lo que esto significa en términos de la deuda pública de Estados Unidos.

Solución Entienda el problema **a)** Para determinar la pendiente entre cualquiera de dos años, determine la razón de cambio en la deuda al cambio en años.

Pendiente de 1910 a 1930

$$m = \frac{16.1 - 1.1}{1930 - 1910} = \frac{15}{20} = 0.75$$

La deuda pública de Estados Unidos de 1910 a 1930 aumentó a una tasa de \$0.75 miles de millones por año.

Pendiente de 1990 a 2002

$$m = \frac{7832.6 - 5957.2}{2005 - 2002} = \frac{1875.4}{3} \approx 625.13$$

La deuda pública de Estados Unidos de 2002 a 2005 aumentó a una tasa de alrededor de \$625.13 miles de millones por año.

b) La pendiente mide una razón de cambio. Al comparar las pendientes para los dos periodos, se observa un incremento mucho mayor en la razón de cambio promedio en la deuda pública de 2002 a 2005 que de 1910 a 1930. La pendiente del segmento de recta de 2002 a 2005 es mayor que la pendiente de cualquier otro segmento de recta en la gráfica. Esto indica que la deuda pública de 2002 a 2005 creció a una tasa más rápida que en cualquier otro periodo ilustrado.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente intercepción

Ya hemos mostrado que para una ecuación de la forma $y = mx + b$, m representa la pendiente y b representa la intercepción y. Por esta razón, una ecuación lineal escrita en la forma $y = mx + b$ se dice que está en la **forma pendiente intercepción** (o forma pendiente ordenada al origen).

Forma pendiente intercepción

La **forma pendiente intercepción de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

donde ***m* es la pendiente** de la recta y **(0, *b*) es la intercepción *y*** de la recta.

Ejemplos de ecuaciones en forma pendiente intercepción

$$y = 3x - 6 \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = \underbrace{m}_{\text{Pendiente}}x + \underbrace{b}_{\text{la intercepción } y \text{ es } (0,\, b)}$$

Ecuación	Pendiente	Intercepción y
$y = 3x - 6$	3	$(0, -6)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Cómo escribir una ecuación en la forma pendiente intercepción

Para escribir una ecuación en la forma pendiente intercepción, despeje a y en la ecuación.

EJEMPLO 3 ▸ Determine la pendiente y la intercepción y de la ecuación $-5x + 2y = 8$.

Solución Escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción, despejando a y en la ecuación.

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 8 \\ 2y &= 5x + 8 \\ y &= \frac{5x + 8}{2} \\ y &= \frac{5x}{2} + \frac{8}{2} \\ y &= \frac{5}{2}x + 4 \end{aligned}$$

La pendiente es $\frac{5}{2}$; la intercepción y es $(0, 4)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intercepción y

Una razón para estudiar la forma pendiente intercepción de una recta es que puede ser útil al dibujar la gráfica de una ecuación lineal, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $2y + 4x = 6$ utilizando la intercepción y y la pendiente.

Solución Empiece despejando a y para obtener la ecuación en la forma pendiente intercepción.

$$\begin{aligned} 2y + 4x &= 6 \\ 2y &= -4x + 6 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

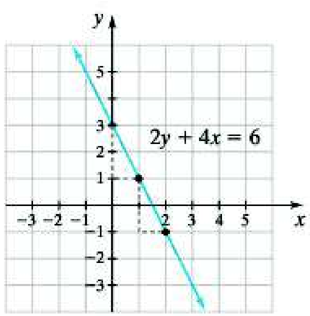


FIGURA 3.59

La pendiente es -2 y la intercepción y es $(0, 3)$. En el eje y coloque un punto en 3 (**figura 3.59**). Luego utilice la pendiente para obtener un segundo punto. La pendiente es negativa; por lo tanto, la gráfica debe descender conforme va de izquierda a derecha. Como la pendiente es -2, la razón del cambio vertical al cambio horizontal debe ser de 2 a 1 (recuerde, 2 significa $\frac{2}{1}$). Así, si usted inicia en $y = 3$ y se mueve dos unidades hacia abajo y una unidad hacia la derecha, obtendrá un segundo punto en la gráfica.

Continúe este proceso de mover 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para obtener un tercer punto. Ahora dibuje una recta que pase por los tres puntos para obtener la gráfica.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

En el ejemplo 4 elegimos movernos hacia abajo y a la derecha para obtener los puntos segundo y tercero. También podríamos haber decidido movernos hacia arriba y hacia la izquierda para obtener los puntos segundo y tercero.

EJEMPLO 5 ▸ Grafique $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ utilizando la intercepción y y la pendiente.

Solución Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, esta función está en la forma pendiente intercepción. La intercepción y es $(0, -3)$ y la pendiente es $\frac{4}{3}$. Coloque en el eje y un punto en -3. Luego, como la pendiente es positiva, obtendrá los puntos segundo y tercero moviéndose cuatro unidades hacia arriba y tres unidades hacia la derecha. La gráfica se muestra en la **figura 3.60**.

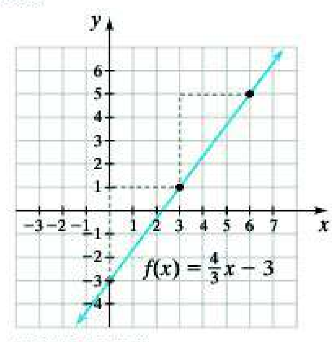


FIGURA 3.60

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

6 Usar la forma pendiente intercepción para construir modelos a partir de gráficas

En ocasiones podemos utilizar la forma pendiente intercepción de una ecuación lineal para determinar una función que modele una situación de la vida real. El ejemplo 6 muestra cómo puede hacerse esto.

EJEMPLO 6 ▸ **Periódicos** Considere la gráfica en la **figura 3.61**, la cual muestra la disminución del número de adultos que leen diariamente el periódico. Observe que la gráfica, de alguna manera, es lineal. La línea discontinua en rojo es una función lineal que se dibujó para aproximar la gráfica en negro.

a) Escriba una función lineal para representar la línea discontinua en rojo.

b) Suponiendo que esta tendencia continúe, utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar el porcentaje de adultos que leerán un periódico en 2012.

Porcentaje de adultos en Estados Unidos que leen un periódico

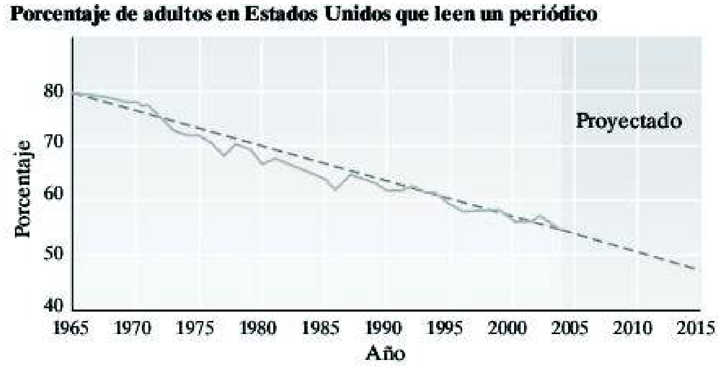


FIGURA 3.61 *Fuente*: NAA Market & Business Analysis; proyecciones de *Newsweek, The Washington Post* (20/2/05)

Solución

a) Para facilitar el trabajo con los números, seleccionaremos 1965 como un *año de referencia*. Entonces podemos reemplazar 1965 con 0, 1966 con 1, 1967 con 2, y así sucesivamente. Entonces 2004 sería 39 y 2005 sería 40 (vea la **figura 3.62**).

Porcentaje de adultos en Estados Unidos que leen un periódico

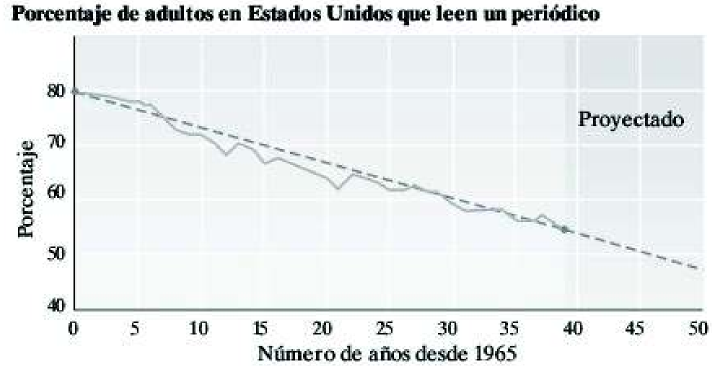


FIGURA 3.62 *Fuente*: NAA Market & Business Analysis; proyecciones de *Newsweek, The Washington Post* (20/2/05)

Seleccionaremos dos puntos en la gráfica que nos permitan determinar la pendiente de la gráfica. Si denominamos al eje vertical y y al eje horizontal x, entonces la intercepción y es 80. Así que, un punto en la gráfica es $(0, 80)$. En 2004, o año 39, en la **figura 3.62**, parece que alrededor de 55% de la población adulta lee un periódico diariamente. Seleccionamos $(39, 55)$ como un segundo punto en la gráfica de la línea recta que dibujamos en la **figura 3.62**. Designamos $(39, 55)$ como (x_2, y_2) y $(0, 80)$ como (x_1, y_1).

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en porcentaje}}{\text{cambio en años}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{55 - 80}{39 - 0} = \frac{-25}{39} \approx -0.641$$

Como la pendiente es aproximadamente -0.641 y la intercepción y es $(0, 80)$, la ecuación de la línea recta es $y = -0.641x + 80$. Esta ecuación en notación de función es

$f(x) = -0.641x + 80$. Para usar esta función recuerde que $x = 0$ representa a 1965, $x = 1$ representa a 1966, etcétera. Observe que $f(x)$, el porcentaje, es una función de x, el número de años a partir de 1965.

b) Para determinar el porcentaje aproximado de lectores en 2012, y como $2012 - 1965 = 47$, sustituimos 47 por x en la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.641x + 80 \\ f(47) &= -0.641(47) + 80 \\ &= -30.127 + 80 \\ &= 49.873 \end{aligned}$$

Así, si la tendencia actual continúa, alrededor de 49.9% de adultos leerán diariamente un periódico en 2012.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.4

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo determinar la pendiente de una línea a partir de su gráfica.
2. Explique qué significa cuando la pendiente de una recta es negativa.
3. Explique qué significa cuando la pendiente de una recta es positiva.
4. ¿Cuál es la pendiente de una recta horizontal? Explique.
5. ¿Por qué la pendiente de una recta vertical es indefinida?
6. **a)** Con la fórmula de pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, determine la pendiente de la recta que contiene a los puntos (3, 4) y (6, 10). Utilice (3, 4) como (x_1, y_1).
   b) Calcule la pendiente nuevamente, pero esta vez utilice (6, 10) como (x_1, y_1).
   c) Al determinar la pendiente utilizando la fórmula, ¿su respuesta será la misma sin importar cuál de los puntos designe como (x_1, y_1)? Explique.
7. Explique cómo escribir una ecuación dada en forma general a su forma pendiente intercepción.
8. En la ecuación $y = mx + b$, ¿qué representa m? ¿Qué representa b?
9. **a)** ¿Qué se quiere decir cuando una gráfica es trasladada cuatro unidades hacia abajo?
   b) Si la intercepción y de una gráfica es $(0, -3)$ y la gráfica es trasladada cinco unidades hacia abajo, ¿cuál será su nueva intercepción y?
10. **a)** ¿Qué se quiere decir cuando una gráfica es trasladada seis unidades hacia arriba?
    b) Si la intercepción y de una gráfica es $(0, 2)$ y la gráfica es trasladada seis unidades hacia arriba, ¿cuál será la nueva intercepción y?
11. ¿Qué significa cuando la pendiente está dada como una razón de cambio?
12. Explique cómo graficar una ecuación lineal utilizando su pendiente y su intercepción y.

Práctica de habilidades

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Si la pendiente de la recta es indefinida, indíquelo.

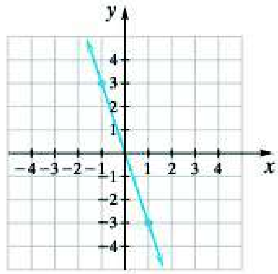
13. (3, 5) y (0, 11)
14. (3, 4) y (6, 5)
15. (5, 2) y (1, 4)
16. $(-3, 7)$ y $(7, -3)$
17. $(-3, 5)$ y $(1, 1)$
18. $(2, 6)$ y $(2, -3)$
19. $(4, 2)$ y $(4, -6)$
20. $(8, -4)$ y $(-1, -2)$
21. $(-3, 4)$ y $(-1, 4)$
22. $(2, 8)$ y $(-5, 8)$
23. $(0, 3)$ y $(9, -3)$
24. $(0, -6)$ y $(-5, -3)$

Si la recta que pasa por los dos puntos dados tiene la pendiente dada, resuelva para la variable que se indica.

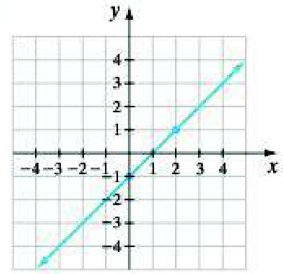
25. $(3, 2)$ y $(4, b)$, $m = 1$
26. $(-4, 3)$ y $(-2, b)$, $m = -3$
27. $(5, 0)$ y $(1, k)$, $m = \dfrac{1}{2}$
28. $(5, d)$ y $(9, 2)$, $m = -\dfrac{3}{4}$
29. $(x, 2)$ y $(3, -4)$, $m = 2$
30. $(-2, -3)$ y $(x, 5)$, $m = \dfrac{1}{2}$
31. $(12, -4)$ y $(r, 2)$, $m = -\dfrac{1}{2}$
32. $(-4, -4)$ y $(x, -1)$, $m = -\dfrac{3}{5}$

Determine la pendiente de la recta en cada una de las figuras. Si la pendiente de la recta es indefinida, indíquelo. Luego escriba una ecuación de la recta dada.

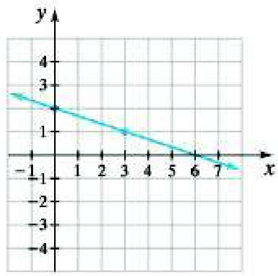
33.



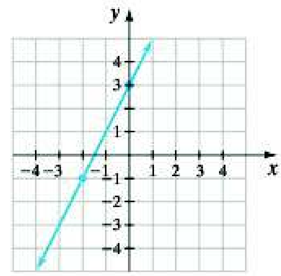
34.



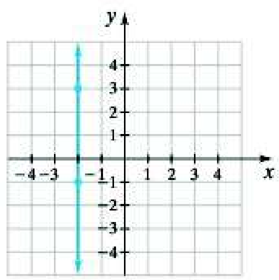
35.



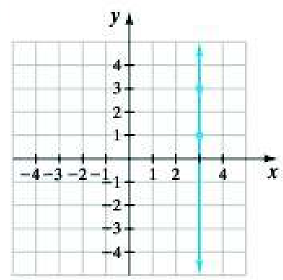
36.



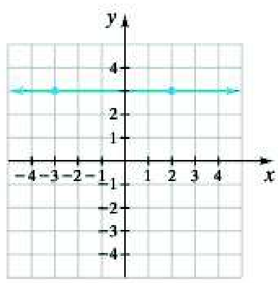
37.



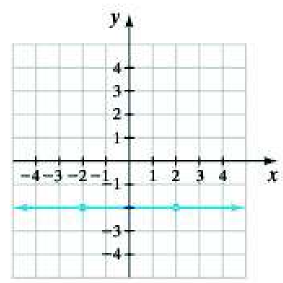
38.



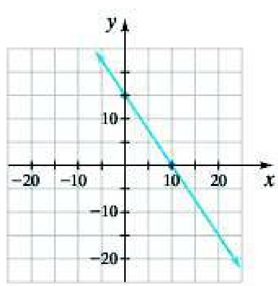
39.



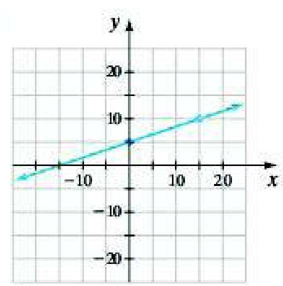
40.



41.



42.



Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción (si no está dada en esa forma). Determine la pendiente y la intercepción y, y utilícelas para dibujar la gráfica de la ecuación lineal.

43. $y = -x + 2$ **44.** $-2x + y = 6$ **45.** $5x + 15y = 30$

46. $-2x = 3y + 6$ **47.** $-50x + 20y = 40$ **48.** $60x = -30y + 60$

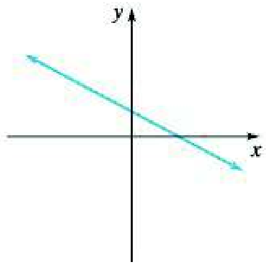
Utilice la pendiente y la intercepción y para graficar cada función.

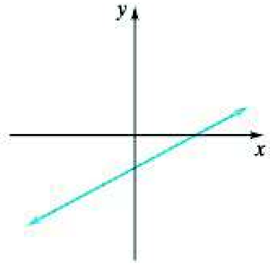
49. $f(x) = -2x + 1$ **50.** $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$ **51.** $h(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ **52.** $h(x) = -\frac{2}{5}x + 4$

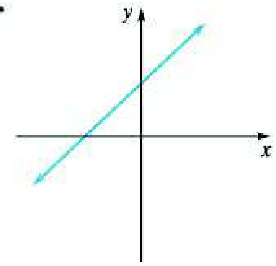
Resolución de problemas

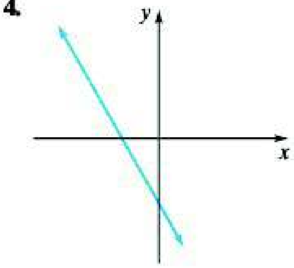
53. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relacione las partes **a)** a **d)** con las gráficas apropiadas etiquetadas del 1 al 4.

a) $m > 0, b < 0$ **b)** $m < 0, b < 0$ **c)** $m < 0, b > 0$ **d)** $m > 0, b > 0$

1.


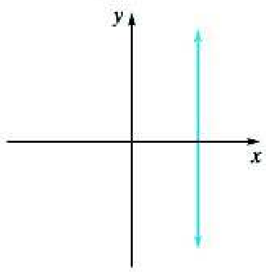
2.


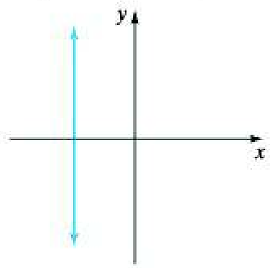
3.


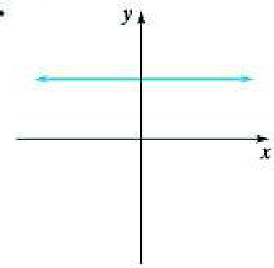
4.


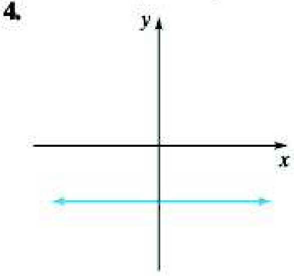
54. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relacione las partes **a)** a **d)** con las gráficas apropiadas etiquetadas del 1 al 4.

a) $m = 0, b > 0$ **b)** $m = 0, b < 0$ **c)** m es indefinida, intercepción $x < 0$ **d)** m es indefinida, intercepción $x > 0$

1.


2.


3.


4.


55. En la sección siguiente estudiaremos rectas paralelas. Con base en lo que ha leído en esta sección, explique cómo podría determinar (sin graficar) que las gráficas de dos ecuaciones son paralelas.

56. ¿Cómo podría determinar si dos rectas son paralelas?

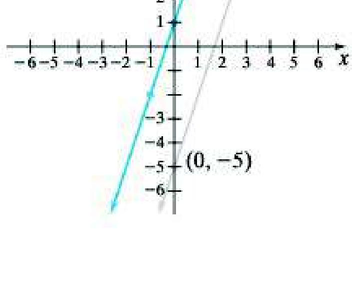
57. Si uno de los puntos de una gráfica es $(6, 3)$ y la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$, determine la intercepción y de la gráfica.

58. Si un punto de la gráfica es $(9, 2)$ y la pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$, determine la intercepción y de la gráfica.

59. En la gráfica siguiente, la doble flecha gris es una traslación de la doble flecha roja.

a) Determine la ecuación de la recta en color rojo.

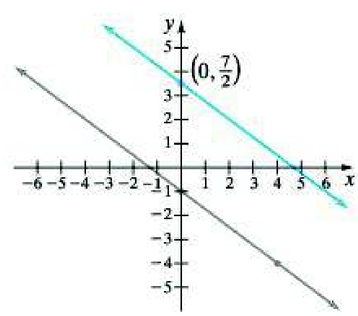
b) Utilice la ecuación de la recta en rojo para determinar la ecuación de la recta en color gris.



60. En la gráfica siguiente la recta en rojo es una traslación de la recta en gris.

a) Determine la ecuación de la recta en color gris.

b) Utilice la ecuación de la recta en gris para determinar la ecuación de la recta en rojo.



61. La gráfica de $y = x - 1$ es trasladada 5 unidades hacia arriba. Determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intercepción y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

62. La gráfica de $y = -\frac{3}{2}x + 3$ es trasladada 6 unidades hacia abajo. Determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intercepción y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

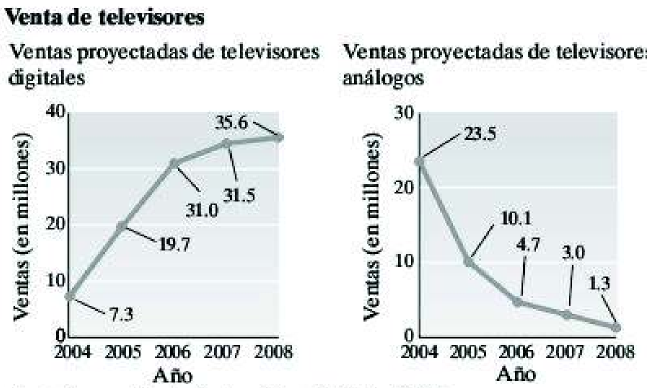
63. La gráfica de $3x - 2y = 6$ es trasladada 4 unidades hacia abajo. Determine la ecuación de la gráfica trasladada.

64. La gráfica de $-3x - 5y = 15$ es trasladada 3 unidades hacia arriba. Determine la ecuación de la gráfica trasladada.

65. Si una recta pasa por los puntos $(6, 4)$ y $(-4, 2)$, determine el cambio de y con respecto a un cambio de una unidad en x.

66. Si una recta pasa por los puntos $(-3, -4)$ y $(5, 2)$, determine el cambio de y con respecto a un cambio de una unidad en x.

Ventas de televisores *Para los ejercicios 67 y 68, utilice la gráfica siguiente. La gráfica de la izquierda muestra las ventas proyectadas de televisores digitales (en millones) y la gráfica de la derecha muestra las ventas proyectadas de televisores analógicos (en millones) para los años de 2004 a 2008.*



Fuente: Consumer Electronics Association, *USA Today* (1/5/05)

67. **a)** Para la gráfica de ventas de TV digitales, determine la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.
b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?
c) Determine la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

68. **a)** Para la gráfica de ventas de TV analógicos, determine la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.
b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?
c) Determine la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

69. **Gastos de Amtrak** La National Railroad and Passenger Corporation, mejor conocida en Estados Unidos como Amtrak, continúa enfrentando problemas económicos. La tabla siguiente muestra los gastos, en millones de dólares, de Amtrak en años seleccionados.

Año	Gastos de Amtrak (en millones de dólares)
1995	\$ 2257
2000	\$ 2876
2004	\$ 3133
*2008	\$ 3260

Fuente: Amtrak año fiscal 2000 (*Reporte Anual*).
*Proyectado

a) Trace estos puntos en una gráfica.
b) Conecte estos puntos utilizando segmentos de recta.
c) Determine las pendientes de cada uno de los tres segmentos de recta.
d) ¿Durante qué periodo tuvo lugar la mayor razón de cambio promedio? Explique.

70. **Demanda de acero** En años recientes, la demanda mundial de acero se ha incrementado. La tabla siguiente proporciona la demanda mundial de acero, en millones de toneladas métricas, para los años de 2001 a 2004.

Demanda mundial de acero

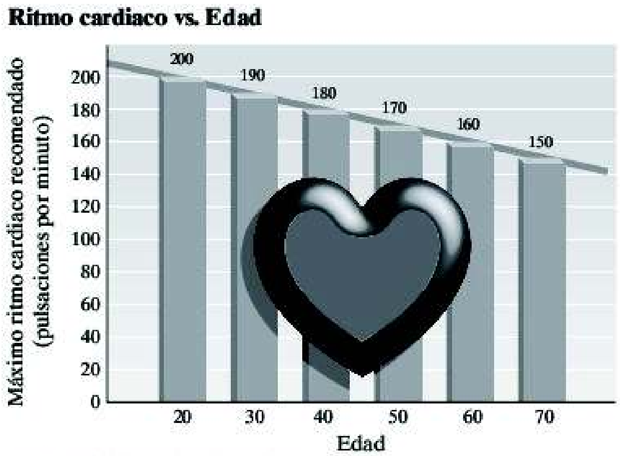
Año	Demanda (en millones de toneladas métricas)
2001	740
2002	810
2003	880
2004	950

Fuente: "World Steel Dynamics", *Wall Street Journal (12 de agosto de 2004)*

a) Grafique estos puntos en una gráfica.
b) Determine la pendiente de cada segmento de recta.
c) Esta gráfica, ¿es un ejemplo de función lineal? Explique.
d) Determine una función lineal que pueda utilizarse para estimar la demanda mundial de acero, d, desde 2001 a 2004. Represente con x el número de años a partir de 2001. (Esto es, 2001 corresponde a $t = 0$, 2002 corresponde a $t = 1$ y así sucesivamente).
e) Suponiendo que esta tendencia continúe para los siguientes 20 años, determine la demanda mundial de acero en 2016.
f) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿en qué año la demanda alcanzará 1230 toneladas métricas?

71. **Ritmo cardiaco** La siguiente gráfica de barras muestra el ritmo cardiaco máximo recomendado bajo presión, en latidos por minuto, para hombres de diferentes edades. Las barras están conectadas por medio de una línea recta.
a) Utilice la recta para determinar una función que pueda usarse para estimar el ritmo cardiaco máximo recomendado, h, para $0 \le x \le 50$, donde x es el número de años a partir de la edad de 20.

b) Usando la función de la parte a), determine el ritmo cardiaco máximo recomendado para un hombre de 34 años de edad.



Fuente: Sociedad Americana de Geriatría

72. Umbral de pobreza El gobierno de Estados Unidos define el umbral de pobreza como una estimación del ingreso familiar anual necesario para gozar lo que la sociedad define como estándar de vida mínimo aceptable. La siguiente gráfica de barras muestra el umbral de pobreza de 2000 a 2004 para una familia de cuatro integrantes.

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, www.census.gov/hhes/poverty

a) Determine una función lineal que pueda usarse para estimar el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes, P, de 2000 a 2004. Sea t el número de años desde 2000. (En otras palabras, 2000 corresponde a $t = 0$, 1996 corresponde a $t = 1$ y así sucesivamente).

b) Utilizando la función de la parte a), determine el umbral de pobreza en 2003. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, determine el umbral de pobreza para una familia con cuatro integrantes en el año 2010.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿en qué año el umbral de pobreza para una familia de cuatro será de $20,424.50?

73. Gasto en Seguro Médico La gráfica siguiente muestra la cantidad de dinero que se gastó en Seguro Médico de 1997 a 2004.

Fuente: Centros de Salud, USA Today (2/8/05)

a) Tomando 1997 como año de referencia, determine una función lineal que pueda emplearse para estimar el gasto en Seguro Médico (en miles de millones de dólares), M, para 1997 a 2004. En esta función, t representa el número de años a partir de 1997.

b) Con la función de la parte a), estime el gasto en Seguro Médico para 2003. Compare su respuesta con la gráfica y vea si la gráfica corresponde con su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el gasto en Seguro Médico en 2010?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿durante qué año el gasto en Seguro Médico alcanzará $340 mil millones?

74. Poder adquisitivo del dólar El poder adquisitivo del dólar se mide comparando el precio actual de artículos con los precios de esos mismos artículos en 1982. Con base en la gráfica siguiente verá que el poder adquisitivo del dólar ha disminuido de manera constante de 1990 a 2003. Esto significa que $1 compra menos cada año.

Fuente: Oficina de Análisis Económico de Estados Unidos

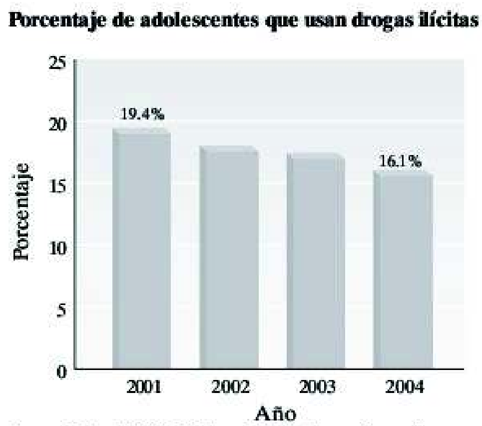
a) Con 1990 como año de referencia, determine una función lineal que pueda usarse para estimar el poder adquisitivo, P, de 1990 a 2003. En la función, haga que t represente el número de años desde 1990.

b) Utilizando la función de la parte a), estime el poder de compra del dólar en 1994. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el poder adquisitivo del dólar en 2006?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuándo será de $0.426 el poder de compra del dólar?

75. **Adolescentes que utilizan drogas ilegales** El porcentaje de adolescentes que afirman haber utilizado drogas ilegales (en los últimos 30 días) ha disminuido de 2001 a 2004. Con base en la gráfica siguiente, la disminución parece ser aproximadamente lineal.



Fuente: Universidad de Michigan, 2004 Monitoreo de estudio futuro. *The Washington Post* (22/12/04)

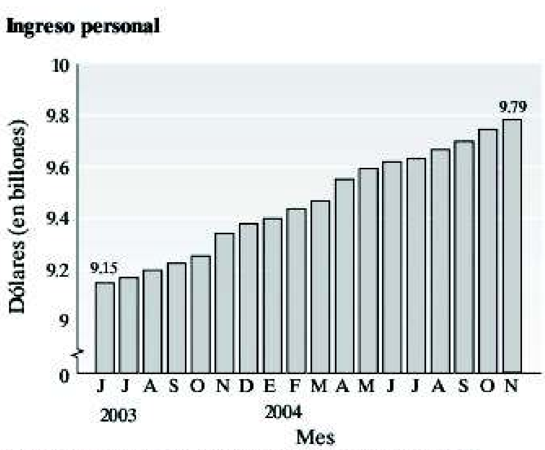
a) Usando 2001 como año de referencia, determine una función lineal que pueda emplearse para estimar el porcentaje, P, de adolescentes que utilizaron drogas ilegales de 2001 a 2004. En esta función, t representa el número de años a partir de 2001.

b) ¿La pendiente de la función lineal es positiva o negativa? Explique.

c) Con base en la función de la parte **a)**, estime el porcentaje de adolescentes que utilizaron drogas ilegales en 2003. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál sería el porcentaje de adolescentes que utilizarán drogas ilegales en 2010?

76. **Ingreso personal** El ingreso personal aumentó cada mes desde junio de 2003 hasta noviembre de 2004. Con base en la gráfica siguiente, parece que el aumento es aproximadamente lineal.



Fuente: Departamento de Comercio, *The New York Times* (24/12/04)

a) Tomando como base junio de 2003, determine una función lineal que pueda usarse para estimar el ingreso personal, I, (en billones de dólares), para los meses de junio de 2003 a noviembre de 2004. En esta función, t representa el número de meses a partir de junio de 2003 (esto es, $t = 0$ corresponde con junio de 2003, $t = 1$ corresponde con julio de 2003, $t = 6$ corresponde con diciembre de 2003, $t = 17$ corresponde con noviembre de 2004, etcétera).

b) ¿La pendiente de esta función lineal es positiva o negativa? Explique.

c) Usando la función de la parte **a)**, estime el ingreso personal (en billones de dólares) para febrero de 2004 ($t = 8$). Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica corresponde con su respuesta.

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál sería el ingreso personal en diciembre de 2005 ($t \approx 30$).

77. **Precios en bienes raíces** El precio de venta de casas de tipo medio en Estados Unidos se ha elevado de forma aproximadamente lineal desde 1995. El precio en 1995 fue de $110,500, mientras que en 2004 fue de $185,200. Sea P el precio de venta de casas de tipo medio y sea t el número de años desde 1995. *Fuente:* Asociación Nacional de Vendedores de Bienes Raíces.

a) Determine una función $P(t)$ que se ajuste a los datos.

b) Utilice la función de la parte **a)** para estimar el precio de venta de casas de tipo medio en 2000.

c) Si esta tendencia continúa, estime el precio de venta de casas de tipo medio en 2010.

d) Si esta tendencia continúa, ¿en qué año el precio de venta de casas de tipo medio será de $200,000?

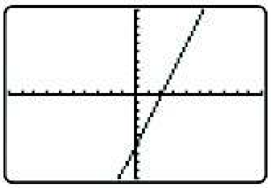
78. **Seguridad Social** El número de trabajadores por beneficiario de seguridad social ha disminuido de manera casi lineal desde 1970, cuando había 3.7 trabajadores por beneficiario. Se proyecta que para 2050 habrá 2.0 trabajadores por beneficiario. Sea W los trabajadores por beneficiarios de seguridad social y t el número de años desde 1970.

a) Determine la función $W(t)$ que se ajuste a los datos.

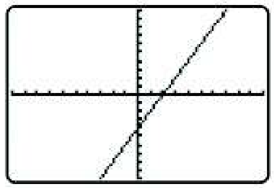
b) Estime el número de trabajadores por beneficiario en 2020.

Suponga que quiere graficar las ecuaciones que se dan y que obtiene las pantallas que se muestran. Explique cómo sabe que cometió un error al introducir cada ecuación. En cada gráfica se utilizó la ventana estándar.

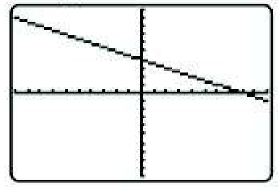
79. $y = 3x + 6$



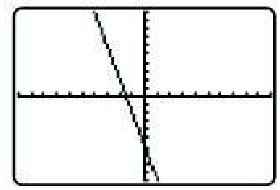
80. $y = -2x - 4$



81. $y = \frac{1}{2}x + 4$



82. $y = -4x - 1$



Retos

83. Castillo La foto siguiente es El castillo, en Chichén Itzá, México. Cada lado del castillo tiene una escalera que consta de 91 escalones, los cuales son muy estrechos y empinados por lo que son difíciles de subir. La distancia vertical total de los 91 escalones es de 1292.2 pulgadas. Si se tuviera que dibujar una línea recta que conectara los bordes de los escalones, el valor absoluto de la pendiente de esta recta sería 2.21875. Determine la altura promedio y ancho de un escalón.

84. Una **recta tangente** es una línea recta que toca una curva en un solo punto (si se prolonga, la recta tangente puede cruzar la curva en un punto diferente). La **figura 3.63** muestra tres rectas tangentes a la curva en los puntos a, b y c. Observe que la recta tangente del punto a tiene una pendiente positiva, la recta tangente del punto b tiene una pendiente de 0 y la recta tangente del punto c tiene una pendiente negativa. Ahora considere la curva en la **figura 3.64**. Imagine que las rectas tangentes se dibujan en todos los puntos de la curva excepto en los extremos a y e. ¿En dónde, en la curva de la **figura 3.64**, las rectas tangentes tendrían una pendiente positiva, una pendiente de 0 y una pendiente negativa?

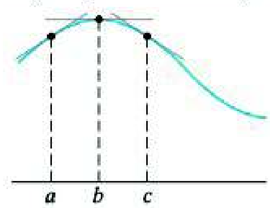


FIGURA 3.63

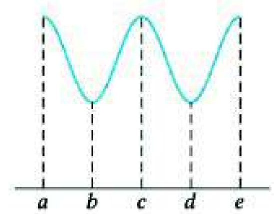


FIGURA 3.64

Actividad en grupo

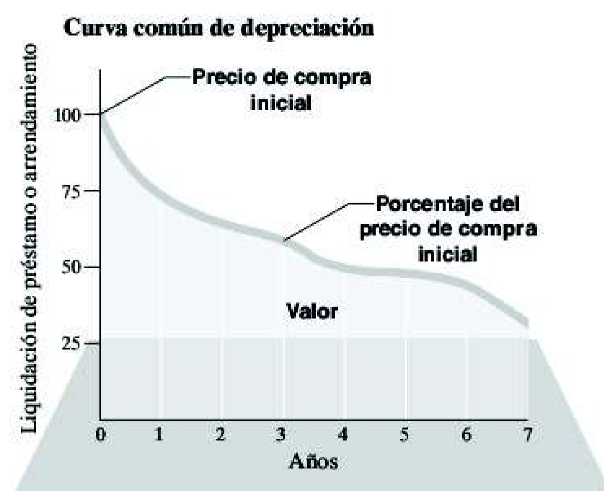
85. La gráfica siguiente de *Consumer Reports*, muestra la depreciación de un automóvil común. El precio de compra inicial se representa como 100%.

a) Miembro uno del grupo: Determine el periodo de un año en el cual un automóvil se deprecia más. Con base en la gráfica, estime el porcentaje que un automóvil se deprecia durante este periodo.

b) Miembro 2 del grupo: Determine entre cuáles años la depreciación parece ser lineal o casi lineal.

c) Miembro 3 del grupo: Determine entre cuáles dos años la depreciación es la más baja.

d) En grupo, estimen la pendiente del segmento de recta del año 0 al año 1. Explique qué significa esto en términos de la razón de cambio.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **86.** Evalúe $\dfrac{-6^2 - 32 \div 2 \div |-8|}{5 - 3 \cdot 2 - 4 \div 2^2}$.

Resuelva cada ecuación.

[2.1] **87.** $\frac{1}{4}(x + 3) + \frac{1}{5}x = \frac{2}{3}(x - 2) + 1$

88. $2.6x - (-1.4x + 3.4) = 6.2$

[2.4] **89. Trenes** Dos trenes parten de Chicago, Illinois, viajando en la misma dirección a lo largo de vías paralelas. El primer tren parte tres horas antes que el segundo, y su velocidad es de 15 millas por hora más rápido que el segundo. Determine la velocidad de cada tren, si tres horas después que el segundo tren sale de Chicago están a 270 millas uno del otro.

[2.6] **90.** Resuelva

a) $|2x + 1| > 5$. **b)** $|2x + 1| < 5$.

Examen de mitad de capítulo: 3.1-3.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en que se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Revise las preguntas que respondió de manera incorrecta.

1. ¿En cuál cuadrante se encuentra el punto $(-3.5, -4.2)$?

Grafique cada ecuación.

2. $y = 3x + 2$ **3.** $y = -x^2 + 3$

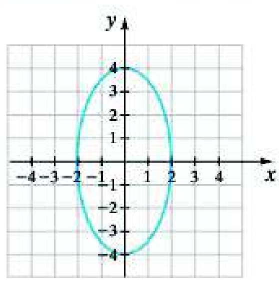
4. $y = |x| - 4$ **5.** $y = \sqrt{x - 4}$

6. **a)** ¿Qué es una relación?
b) ¿Qué es una función?
c) ¿Toda relación es una función? Explique.
d) ¿Toda función es una relación? Explique.

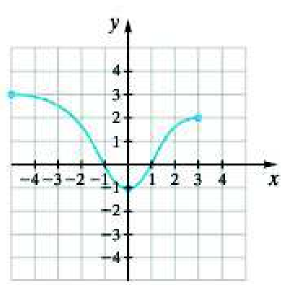
En los ejercicios del 7 al 9, determine cuáles de las relaciones siguientes también son funciones. Proporcione el dominio y el rango de cada relación o función.

7. $\{(1, 5), (2, -3), (7, -1), (-5, 6)\}$

8.



9.



10. Si $g(x) = 2x^2 + 8x - 13$, determine $g(-2)$.

11. La altura, h, en pies a que está una manzana lanzada desde lo alto de un edificio es

$$h(t) = -6t^2 + 3t + 150$$

donde t representa el tiempo en segundos. Determine la altura a que está la manzana 3 segundos después de que se le lanzó.

12. Escriba la ecuación $7(x + 3) + 2y = 3(y - 1) + 18$ en la forma general.

Grafique cada ecuación.

13. $x + 3y = -3$ **14.** $x = -4$

15. $y = 5$

16. Utilidad La utilidad diaria, en dólares, para una compañía de calzado es $p(x) = 30x - 660$, donde x es el número de pares de zapatos que se fabrican y venden.

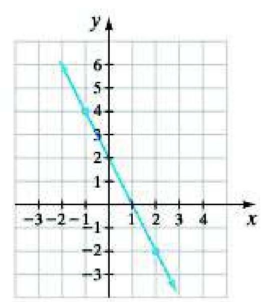
a) Dibuje una gráfica de la utilidad contra el número de zapatos que se venden (de 40 pares en adelante).

b) Determine el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía no gane ni pierda (esté en equilibrio).

c) Determine el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía tenga una utilidad diaria de \$360.

17. Determine la pendiente de la recta que pasa por $(9, -2)$ y $(-7, 8)$.

18. Escriba la ecuación de la recta dada en la gráfica siguiente.



19. Escriba la ecuación $-3x + 2y = 18$ en la forma pendiente intercepción. Determine la pendiente y la intercepción y.

20. Si la gráfica de $y = 5x - 3$ se traslada hacia arriba 4 unidades, determine,

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intercepción y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

3.5 La forma punto pendiente de una ecuación lineal

1 Entender la forma punto pendiente de una ecuación lineal.

2 Utilizar la forma punto pendiente para construir modelos a partir de gráficas.

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares.

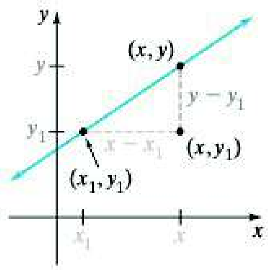


FIGURA 3.65

1 Entender la forma punto pendiente de una ecuación lineal

En la sección anterior aprendimos a utilizar la *forma pendiente intercepción* de una recta para determinar la ecuación de una recta cuando se conocen la pendiente y la intercepción y de la recta. En esta sección aprendemos a utilizar la **forma punto pendiente** de una recta para determinar la ecuación de una recta cuando se conocen la pendiente y un punto de la recta. La forma punto pendiente puede desarrollarse a partir de la expresión para la pendiente entre dos puntos cualesquiera (x, y) y (x_1, y_1) en la recta, como se muestra en la **figura 3.65**.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x - x_1$, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto pendiente

La **forma punto pendiente de una ecuación lineal** es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m **es la pendiente** de la recta y (x_1, y_1) es un punto en la recta.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba, en la forma pendiente intercepción, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 4)$ y tiene pendiente -3.

Solución Como se nos dio la pendiente de la recta y un punto en ella, podemos escribir la ecuación en la forma punto pendiente. Entonces podemos despejar a y de la ecuación para escribir la ecuación en la forma pendiente intercepción. La pendiente, m, es -3. El punto en la recta, (x_1, y_1), es $(1, 4)$. Sustituya -3 por m, 1 por x_1 y 4 por y_1 en la forma punto pendiente.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -3(x - 1) && \text{Forma punto pendiente} \\ y - 4 &= -3x + 3 \\ y &= -3x + 7 && \text{Forma pendiente intercepción} \end{aligned}$$

La gráfica de $y = -3x + 7$ tiene una pendiente de -3 y pasa por el punto $(1, 4)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 5

En el ejemplo 1 usamos la forma punto pendiente para obtener la ecuación de una recta cuando se nos dio un punto en la recta y la pendiente de la misma. La forma punto pendiente también puede usarse para encontrar la ecuación de una recta cuando se nos dan dos puntos en ella. En el ejemplo 2 mostramos cómo hacer esto.

EJEMPLO 2 ▸ Escriba, en la forma pendiente intercepción, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$.

Solución Aunque no se nos dio la pendiente de la recta, podemos usar los dos puntos dados para determinarla. Luego podemos proceder como lo hicimos en el ejemplo 1. Hacemos que $(2, 3)$ sea (x_1, y_1) y $(1, 4)$ sea (x_2, y_2).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

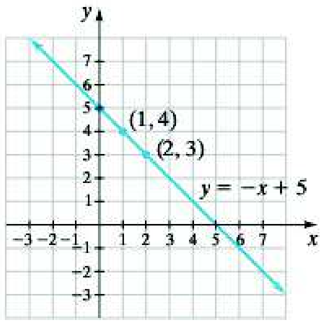


FIGURA 3.66

La pendiente, m, es -1. Ahora debemos elegir uno de los dos puntos dados para utilizar como (x_1, y_1) en la forma punto pendiente de la ecuación de una recta. Seleccionaremos $(2, 3)$. Sustituya -1 por m, 2 por x_1 y 3 por y_1 en la forma punto pendiente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = -1(x - 2)$$
$$y - 3 = -x + 2$$
$$y = -x + 5$$

La gráfica de $y = -x + 5$ se muestra en la **figura 3.66**. Observe que la intercepción y de esta recta está en 5, la pendiente es -1 y la recta pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$.

Observe que también podríamos haber seleccionado el punto $(1, 4)$ para sustituir en la forma punto pendiente. De haber hecho esto aún habríamos obtenido la ecuación $y = -x + 5$. Ahora debe verificar esto.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

2 Utilizar la forma punto pendiente para construir modelos a partir de gráficas

Ahora veamos una aplicación en la cual utilizamos la forma punto pendiente para determinar una función que modele una situación dada.

EJEMPLO 3 ▸ **Quema de calorías** El número de calorías quemadas en una hora de conducir una bicicleta, es una función lineal de la velocidad de la bicicleta. En promedio, una persona que conduce a 12 millas por hora quemará alrededor de 564 calorías en una hora y si conduce a 18 mph quemará alrededor de 846 calorías en una hora. Esta información se muestra en la **figura 3.67**.

FIGURA 3.67

a) Determine una función lineal que pueda utilizarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en una hora cuando una bicicleta se conduce a r mph, para $6 \leq r \leq 24$.

b) Utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar el número de calorías quemadas en una hora cuando se conduce una bicicleta a 20 mph.

c) Utilice la función determinada en la parte **a)** para estimar a qué velocidad debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en una hora.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca En este ejemplo, en lugar de utilizar las variables x y y que usamos en los ejemplos 1 y 2, utilizamos las variables r (para la velocidad) y C (para las calorías). Sin importar las variables que se utilicen, el procedimiento usado para determinar la ecuación de la recta sigue siendo el mismo. Para determinar la función necesaria usaremos los puntos $(12, 564)$ y $(18, 846)$ y procedemos, como en el ejemplo 2. Primero calcularemos la pendiente y después utilizaremos la forma punto pendiente para determinar la ecuación de la recta.

Realice los cálculos
$$m = \frac{C_2 - C_1}{r_2 - r_1} = \frac{846 - 564}{18 - 12} = \frac{282}{6} = 47$$

Ahora escribimos la ecuación por medio de la forma punto pendiente. Seleccionaremos el punto (12, 564) para (r_1, C_1).

$$\begin{aligned} C - C_1 &= m(r - r_1) \\ C - 564 &= 47(r - 12) && \text{Forma punto pendiente} \\ C - 564 &= 47r - 564 \\ C &= 47r && \text{Forma pendiente intercepción} \end{aligned}$$

Responda Como el número de calorías quemadas, C, es una función de la velocidad, r, la función que buscamos es

$$C(r) = 47r$$

b) Para estimar el número de calorías quemadas en una hora mientras se conduce a 20 mph, sustituimos 20 por r en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ C(20) &= 47(20) = 940 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando se conduce a 20 millas por hora durante una hora, se queman 940 calorías.

c) Para estimar la velocidad a la cual debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en una hora, sustituimos 800 por $C(r)$ en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ 800 &= 47r \\ \frac{800}{47} &= r \\ r &\approx 17.02 \end{aligned}$$

Así, para quemar 800 calorías en una hora se necesitaría conducir una bicicleta a casi 17.02 mph.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 53**

En el ejemplo 3, la función que se obtuvo fue $C(r) = 47r$. La gráfica de esta función tiene una pendiente de 47 y una intercepción y en (0, 0). Si la gráfica en la **figura 3.67**, de la página 200, se prolongase hacia la izquierda, intersecaría el origen. Esto tiene sentido ya que una velocidad de cero millas por hora tendría como resultado que se quemasen cero calorías en una hora.

Rectas paralelas

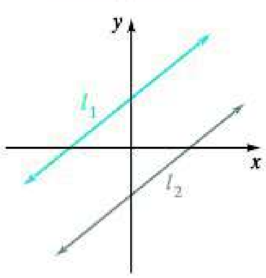


FIGURA 3.68

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares

La **figura 3.68** ilustra dos rectas *paralelas*.

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente.

Todas las rectas verticales son paralelas aunque su pendiente sea indefinida.

La **figura 3.69** ilustra rectas perpendiculares. Dos rectas son *perpendiculares* cuando se intersecan en ángulos rectos (o 90°).

Rectas perpendiculares

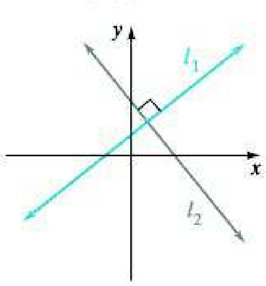


FIGURA 3.69

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son *recíprocos negativos*.

Para cualquier número distinto de cero, a, su **recíproco negativo** es $\frac{-1}{a}$ o $-\frac{1}{a}$. Por ejemplo, el recíproco negativo de 2 es $\frac{-1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. El producto de cualquier número distinto de cero y su recíproco negativo es -1.

$$a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

Observe que cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal aunque no se puede aplicar el recíproco negativo. (¿Por qué no?)

EJEMPLO 4 ▸ Dos puntos en l_1 son $(8, 5)$ y $(4, -1)$. Dos puntos en l_2 son $(0, 2)$ y $(6, -2)$. Determine si l_1 y l_2 son rectas paralelas, rectas perpendiculares o ninguna de ellas.

Solución Determine las pendientes de l_1 y l_2.

$$m_1 = \frac{5 - (-1)}{8 - 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad m_2 = \frac{2 - (-2)}{0 - 6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Como sus pendientes son diferentes, l_1 y l_2 no son paralelas. Para ver si las rectas son perpendiculares, necesitamos determinar si las pendientes son recíprocos negativos. Si $m_1m_2 = -1$, las pendientes son recíprocos negativos y las rectas son perpendiculares.

$$m_1m_2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

Como el producto de las pendientes es igual a -1, las rectas son perpendiculares.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 5 ▸ Considere la ecuación $2x + 4y = 8$. Determine la ecuación de la recta que tiene una intercepción y de 5 y es **a)** paralela a la recta dada y **b)** perpendicular a la recta dada.

Solución

a) Si conocemos la pendiente de una recta y su intercepción y, podemos utilizar la forma pendiente intercepción, $y = mx + b$, para escribir la ecuación. Iniciamos despejando a y de la ecuación dada.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 4y &= -2x + 8 \\ y &= \frac{-2x + 8}{4} \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Por lo tanto, la pendiente de la recta paralela a la línea dada debe ser $-\frac{1}{2}$. Como su pendiente es $-\frac{1}{2}$ y su intercepción y es 5, su ecuación debe ser

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Las gráficas de $2x + 4y = 8$ y $y = -\frac{1}{2}x + 5$ se muestran en la **figura 3.70**.

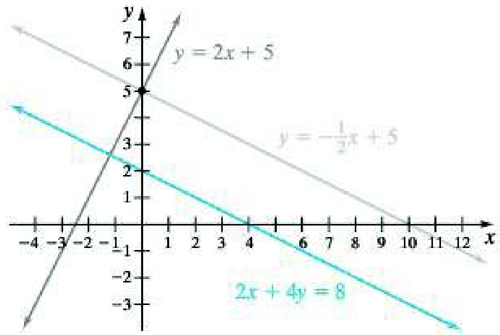


FIGURA 3.70

b) Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocos negativos. Sabemos que la pendiente de la recta dada es $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta perpendicular debe ser $-1\Big/\left(-\frac{1}{2}\right)$ o 2. La recta perpendicular a la línea dada tiene una intercepción y de 5. Así, la ecuación es

$$y = 2x + 5$$

La **figura 3.70** también muestra la gráfica de $y = 2x + 5$.

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Considere la ecuación $5y = -10x + 7$.

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ que es perpendicular a la gráfica de la ecuación dada. Escriba la ecuación en la forma general.

b) Escriba la ecuación que determinó en la parte **a)** por medio de la notación de función.

Solución

a) Determine la pendiente de la recta dada despejando y de la ecuación dada.

$$5y = -10x + 7$$
$$y = \frac{-10x + 7}{5}$$
$$y = -2x + \frac{7}{5}$$

Como la pendiente de la recta dada es -2, la pendiente de una recta perpendicular a ella debe ser el recíproco negativo de -2, que es $\frac{1}{2}$. La recta que buscamos debe pasar por el punto $\left(4, \frac{1}{3}\right)$. Por medio de la forma punto pendiente, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x - 4) \qquad \textit{Forma punto pendiente.}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 6, para eliminar las fracciones.

$$6\left(y - \frac{1}{3}\right) = 6\left[\frac{1}{2}(x - 4)\right]$$
$$6y - 2 = 3(x - 4)$$
$$6y - 2 = 3x - 12$$

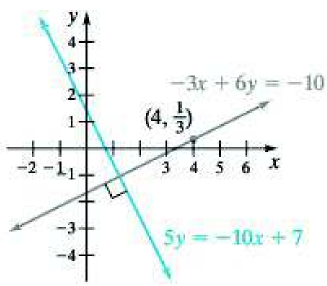


FIGURA 3.71

Ahora escribimos la ecuación en la forma general.

$$-3x + 6y - 2 = -12$$
$$-3x + 6y = -10 \qquad \text{Forma general}$$

Observe que $3x - 6y = 10$ también es una respuesta aceptable (vea la **figura 3.71**).

b) Para escribir la ecuación utilizando la notación de función, despejamos a y de la ecuación determinada en la parte **a)**, y luego reemplazamos a y con $f(x)$.

Le dejaremos demostrar que la función es $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 39

Sugerencia útil

La tabla siguiente resume las tres formas de una ecuación lineal que hemos estudiado y menciona cuándo puede ser útil cada una.

Forma general: $ax + by = c$	Útil cuando determinamos las intersecciones de una gráfica La usaremos en el capítulo 4, Sistemas de Ecuaciones y Desigualdades
Forma punto pendiente: $y = mx + b$	Usada para determinar la pendiente e intercepción y de una recta Usada para determinar la ecuación de una recta dada su pendiente y su intercepción y Usada para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares Usada para graficar una ecuación lineal
Forma punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$	Usada para determinar la ecuación de una recta cuando se da la pendiente de una recta y un punto en la recta Usada para determinar la ecuación de una recta cuando se dan dos puntos en una recta

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Proporcione la forma punto pendiente de una ecuación lineal.
2. ¿Cómo puede determinar si dos rectas son paralelas?
3. ¿Cómo puede determinar si dos rectas son perpendiculares?
4. ¿Por qué no puede utilizarse la prueba del recíproco negativo para determinar si una recta vertical es perpendicular a una recta horizontal?

Práctica de habilidades

Utilice la forma punto pendiente para determinar la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Luego escriba la ecuación en la forma pendiente intercepción.

5. Pendiente $= 2$, pasa por $(3, 1)$
6. Pendiente $= -3$, pasa por $(1, -2)$
7. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, pasa por $(4, -1)$
8. Pendiente $= -\frac{7}{8}$, pasa por $(-8, -2)$
9. Pendiente $= \frac{1}{2}$, pasa por $(-1, -5)$
10. Pendiente $= -\frac{3}{2}$, pasa por $(7, -4)$
11. Pasa por $(2, -3)$ y $(-6, 9)$.
12. Pasa por $(4, -2)$ y $(1, 9)$.
13. Pasa por $(4, -3)$ y $(6, -2)$.
14. Pasa por $(1, 0)$ y $(-4, -1)$.

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determine si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de ellas.

15. l_1: $(2, 0)$ y $(0, 2)$; l_2: $(3, 0)$ y $(0, 3)$
16. l_1: $(7, 6)$ y $(3, 9)$; l_2: $(5, -1)$ y $(9, -4)$
17. l_1: $(4, 6)$ y $(5, 7)$; l_2: $(-1, -1)$ y $(1, 4)$
18. l_1: $(-3, 4)$ y $(4, -3)$; l_2: $(-5, -6)$ y $(6, -5)$
19. l_1: $(3, 2)$ y $(-1, -2)$; l_2: $(2, 0)$ y $(3, -1)$
20. l_1: $(3, 5)$ y $(9, 1)$; l_2: $(4, 0)$ y $(6, 3)$

Determine si las dos ecuaciones representan líneas que son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

21. $y = \frac{1}{5}x + 9$
$y = -5x + 2$

22. $2x + 3y = 11$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$

23. $4x + 2y = 8$
$8x = 4 - 4y$

24. $2x - y = 4$
$3x + 6y = 18$

25. $2x - y = 4$
$-x + 4y = 4$

26. $6x + 2y = 8$
$4x - 5 = -y$

27. $y = \frac{1}{2}x - 6$
$-4y = 8x + 15$

28. $2y - 8 = -5x$
$y = -\frac{5}{2}x - 2$

29. $y = \frac{1}{2}x + 6$
$-2x + 4y = 8$

30. $-4x + 6y = 11$
$2x - 3y = 5$

31. $x - 2y = -9$
$y = x + 6$

32. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$
$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = -1$

Determine la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Escriba la ecuación en la forma indicada.

33. Pasa por $(2, 5)$ y es paralela a la gráfica de $y = 2x + 4$ (forma pendiente intercepción).

34. Pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a la gráfica de $4x - 2y = 6$ (forma pendiente intercepción).

35. Pasa por $(-3, -5)$ y es paralela a la gráfica de $2x - 5y = 7$ (forma general).

36. Pasa por $(-1, 4)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = -2x - 1$ (forma general).

37. Con intercepción x $(3, 0)$ e intercepción y $(0, 5)$ (forma pendiente intercepción).

38. Pasa por $(-2, -1)$ y es perpendicular a la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{5}x + 1$ (notación de función).

39. Pasa por $(5, -2)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = \frac{1}{3}x + 1$ (notación de función).

40. Pasa por $(-3, 5)$ y es perpendicular a la recta con intercepción x $(2, 0)$ e intercepción y $(0, 2)$ (forma general).

41. Pasa por $(6, 2)$ y es perpendicular a la recta con intercepción x $(2, 0)$ e intercepción y $(0, -3)$ (forma pendiente intercepción).

42. Pasa por el punto $(1, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3, 5)$ y $(-2, 3)$ (notación de función).

Resolución de problemas

43. Rutina en una caminadora El número de calorías quemadas en una hora en una caminadora es una función de la velocidad de la misma. Una persona promedio que utiliza una caminadora (con una inclinación de 0°) a una velocidad de 2.5 millas por hora quemará alrededor de 210 calorías. A 6 millas por hora, esta persona quemará alrededor de 370 calorías. Sea C las calorías quemadas en una hora y s la velocidad de la caminadora.

a) Determine una función lineal $C(s)$ que se ajuste a los datos.

b) Estime las calorías quemadas por una persona promedio en una caminadora en 1 hora a una velocidad de 5 millas por hora.

44. Caminadora inclinada El número de calorías quemadas por una hora en una caminadora que va a una velocidad constante, es una función de la inclinación de la misma. A 4 mph por hora y con una inclinación de 5°, una persona promedio quemará 525 calorías. A 4 mph y con una inclinación de 15° la persona promedio quemará 880 calorías. Sea C las calorías quemadas y d los grados de inclinación de la caminadora.

a) Determine una función lineal $C(d)$ que se ajuste a los datos.

b) Determine el número de calorías quemadas por la persona promedio durante una hora en una caminadora que va a 4 millas por hora y con una inclinación de 9°.

45. Demanda de reproductores de DVD La *demanda* para un producto es el número de artículos que el público está dispuesto a comprar a un precio dado. Suponga que la demanda, d, de reproductores de DVD vendidos en un mes es una función lineal del precio, p, para $\$150 \le p \le \$400$. Si el precio es \$200, entonces se venderán 50 DVD por mes. Si el precio es \$300, sólo se venderán 30 DVD.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, d), escriba una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la demanda cuando el precio de los reproductores de DVD es \$260.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se cobra, si la demanda de reproductores de DVD es 45.

46. Demanda de nuevos sándwiches El gerente de mercadotecnia del restaurante Arby determina que la demanda, d, de un nuevo sándwich de pollo es una función lineal del precio, p, para $\$0.80 \le p \le \$4.00$. Si el precio es \$1.00, entonces cada mes se venderán 530 sándwiches de pollo. Si el precio es \$2.00, sólo se venderán cada mes 400 sándwiches de pollo.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, d), escriba una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la demanda cuando el precio de los sándwiches de pollo es \$2.60.

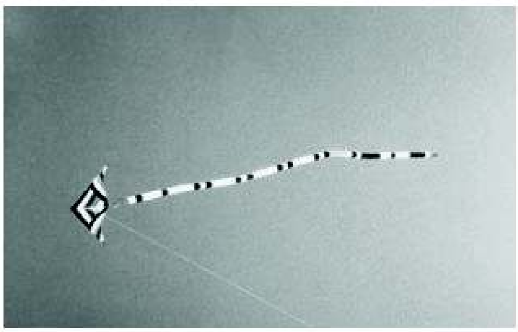
c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se cobra si la demanda de sándwiches de pollo es 244.

47. Oferta de cometas La *oferta* de un producto es el número de artículos que un vendedor está dispuesto a vender a un precio dado. La productora de una nueva cometa para niños determina que el número de cometas que está dispuesta a proveer, s, es una función lineal del precio de venta p, para $\$2.00 \le p \le \$4.00$. Si una cometa se vende a \$2.00, entonces se proveerán de 130 al mes. Si una cometa se vende a \$4.00, entonces se ofrecerán 320 al mes.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, s), escriba una ecuación para la oferta, s, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la oferta cuando el precio de las cometas es \$2.80.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se paga si la oferta es de 225 cometas.



48. Oferta de carriolas El fabricante de carriolas determina que la oferta, s, es una función lineal del precio de venta, p, para $\$200 \le p \le \$300$. Si una carriola se vende a \$210.00, entonces se proveerán 20 al mes. Si una carriola se vende a \$230.00, entonces al mes se proveerán 30.

a) Usando las parejas ordenadas de la forma (p, s), escriba una ecuación para la oferta, s, como una función del precio, p.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine la oferta cuando el precio de una carriola es \$220.00.

c) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el precio que se paga si la oferta es de 35 carritos.

49. Obra de teatro El ingreso, i, de una obra de teatro en una escuela es una función lineal del número de boletos vendidos, t. Cuando se venden 80 boletos el ingreso es \$1000. Cuando se venden 200 boletos el ingreso es \$2500.

a) Utilice estos datos para escribir el ingreso, i, como una función del número de boletos vendidos, t.

b) Con la función de la parte **a)**, determine el ingreso si se vendieron 120 boletos.

c) Si el ingreso es \$2200, ¿cuántos boletos se vendieron?

50. Consumo de gasolina de un automóvil El consumo de gasolina, m, de un automóvil específico es una función lineal de la velocidad, s, a la cual se conduce el automóvil para $30 \le s \le 60$. Si se conduce el automóvil a 30 mph el rendimiento de gasolina del automóvil es 35 millas por galón. Si es conducido a 60 mph, el automóvil rinde 20 millas por galón.

a) Utilice esta información para escribir el consumo de gasolina, m, como una función de la velocidad, s.

b) Con la función de la parte **a)**, si se conduce el automóvil a una velocidad de 48 mph, determine el consumo de gasolina.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, determine la velocidad a la cual el automóvil debe ser conducido para obtener un consumo de gasolina de 40 millas por galón.

51. Registro de un automóvil El costo del registro, r, para un vehículo en cierta región es una función lineal del peso del vehículo, w, para $1000 \le w \le 6000$ libras. Cuando el peso es de 2000 libras, el costo del registro es \$30. Si el peso es 4000 libras, el costo del registro es \$50.

a) Utilice esta información para escribir el costo del registro, r, como una función del peso del vehículo, w.

b) Usando la función de la parte **a)**, determine el costo del registro para un Ford Mustang 2006, si el peso del vehículo es de 3613 libras.

c) Si el costo por registrar un vehículo es \$60, determine el peso del vehículo.

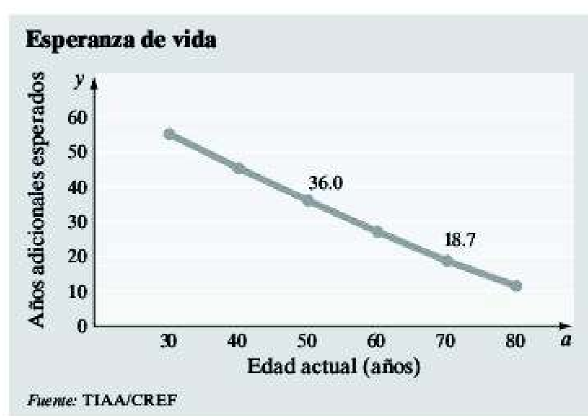
52. Salario de un profesor El salario anual de un profesor en la Universidad de Chaumont es una función lineal del número de años de experiencia en la docencia. Un profesor con nueve años de experiencia recibe \$41,350. Un profesor con 15 años de experiencia en la docencia recibe \$46,687.

a) Utilice estos datos para escribir el salario anual, s, de un profesor, como una función del número de años de experiencia en la enseñanza, n.

b) Con la función de la parte **a)**, determine el salario anual de un profesor con diez años de experiencia.

c) Utilizando la función de la parte **a)**, estime el número de años de experiencia que debe tener un profesor para obtener un salario anual de \$44,908.

53. Expectativa de vida Como se ve en la gráfica siguiente, el número esperado de años, y, de vida de una persona *se aproxima* a una función lineal. El número esperado de años de que sobreviva es una función de la edad actual, a, de la persona, para $30 \le a \le 80$. Por ejemplo, con base en la gráfica vemos que una persona de actualmente 50 años tiene una expectativa de vida de 36.0 años *más*.



a) Con los dos puntos en la gráfica, determine la función $y(a)$ que puede usarse para aproximar la gráfica.
b) Con la función de la parte **a)**, estime la esperanza de vida de una persona que actualmente tiene 37 años de edad.
c) Utilizando la función de la parte **a)**, estime la edad actual de una persona que tiene una expectativa de vida de 25 años.

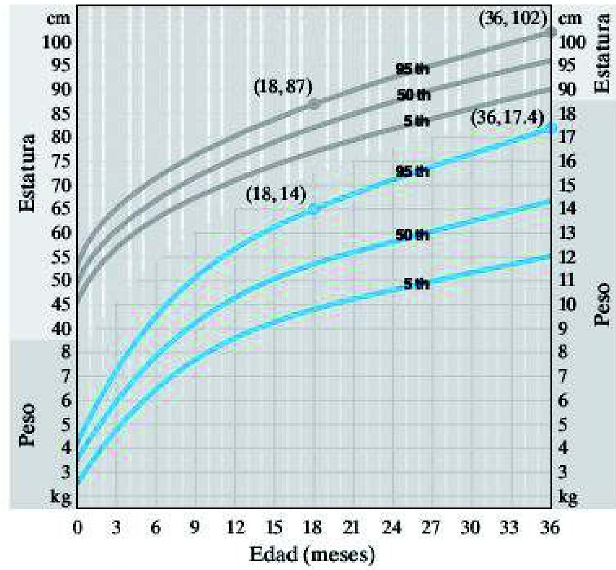
54. Violín Guarneri del Gesù Los violines Guarneri del Gesù fabricados a mano alrededor de 1735, son extremadamente raros y valiosos. La gráfica siguiente muestra que el valor proyectado, v, de un violín Guarneri del Gesù, es una función lineal de su antigüedad, a, en años del violín, para $261 \le a \le 290$.

a) Determine la función $v(a)$ representada por esta línea.
b) Con la función de la parte **a)**, determine el valor proyectado de un violín Guarneri del Gesù con 265 años de antigüedad.
c) Utilizando la función de la parte **a)**, determine la edad de un violín Guarneri del Gesù con un valor proyectado de $15 millones.

Guarneri del Gesù, "Sainton," 1741

55. Peso de niños Los padres pueden reconocer los diagramas siguientes por sus visitas al consultorio del pediatra. El diagrama muestra percentiles para alturas y pesos de niños desde el nacimiento hasta la edad de 36 meses. En general, las gráficas mostradas no son funciones lineales. Sin embargo, ciertas partes de las gráficas pueden aproximarse con una función lineal. Por ejemplo, la gráfica que representa el percentil 95 de pesos de niños (la línea superior en rojo) de la edad de 18 meses a la edad de 36 meses es aproximadamente lineal.

Niños: Recién nacidos a 36 meses
Percentiles de Estatura-Edad y Peso-Edad



Fuente: Centro Nacional para Estadísticas de Salud

a) Utilice los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir el peso, w, como una función lineal de edad, a, para niños entre 18 y 36 meses de edad.
b) Con la función de la parte **a)**, estime el peso de un niño de 22 meses, quien está en el percentil 95 para el peso. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

56. Estatura de niños El diagrama del ejercicio 55 muestra que la gráfica que representa el percentil 95 de estaturas de niños (la línea superior en gris) de la edad de 18 meses a la edad de 36 meses, es aproximadamente lineal.
a) Utilice los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir la estatura, l, como una función lineal de la edad, a, para niños entre 18 y 36 meses de edad.
b) Con la función de la parte **a)**, estime la estatura de un niño de 21 meses, quien está en el percentil 95. Compare su respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya su respuesta.

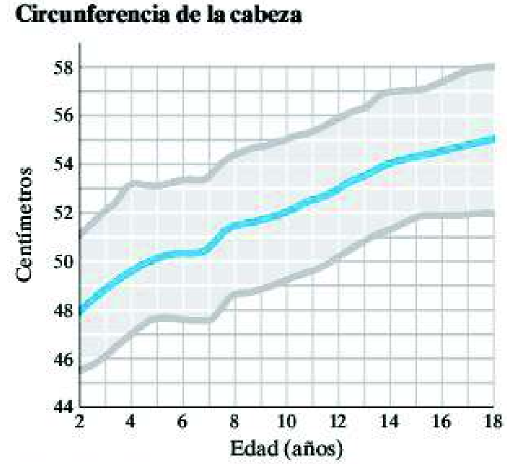
Actividad en grupo

57. La gráfica en la página 208, muestra el crecimiento de la circunferencia de la cabeza de las niñas. La línea en rojo es la circunferencia promedio de la cabeza de todas las niñas para la edad dada, mientras que las líneas en gris, representan los límites superior e inferior del rango normal. En grupo, analicen y respondan las preguntas siguientes.
a) Explique por qué la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza representa una función.
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?
c) ¿Cuál es el dominio de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza? ¿Cuál es el rango de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza?
d) ¿Cuál es el intervalo considerado como normal para niñas de 18 años?

e) Para esta gráfica, ¿la circunferencia de la cabeza es una función de la edad o es la edad una función de la circunferencia de la cabeza? Explique su respuesta.

f) Estime la circunferencia promedio de la cabeza de niñas a la edad de 10 y a la edad de 14 años.

g) Esta gráfica parece ser casi lineal. Determine una ecuación o función que pueda usarse para estimar la línea en rojo entre (2, 48) y (18, 55).



Fuente: Centro Nacional para Estadísticas de Salud

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **58.** Resuelva la desigualdad $6 - \frac{1}{2}x > 2x + 5$ e indique la solución en notación de intervalos.

59. Cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican por o se dividen entre un número negativo, ¿qué debe hacer?

[3.2] **60.** **a)** ¿Qué es una relación?

b) ¿Qué es una función?

c) Dibuje una gráfica que sea una relación pero que no sea función.

61. Determine el dominio y el rango de la función $\{(4, 7), (5, -4), (3, 2), (6, -1)\}$.

3.6 Álgebra de funciones

1 Determinar la suma, diferencia, producto y división de funciones.

2 Graficar la suma de funciones.

1 Determinar la suma, diferencia, producto y división de funciones

Ahora analizamos algunas formas de cómo se pueden combinar las funciones. Si hacemos $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 + 2x$, podemos encontrar $f(5)$ y $g(5)$ como sigue.

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = x^2 + 2x$$
$$f(5) = 5 - 3 = 2 \qquad g(5) = 5^2 + 2(5) = 35$$

Si sumamos $f(x) + g(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (x - 3) + (x^2 + 2x) \\ &= x^2 + 3x - 3 \end{aligned}$$

Esta nueva función formada por la suma de $f(x)$ y $g(x)$ se designa como $(f + g)(x)$. Por lo tanto podemos escribir

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x - 3$$

Determinamos $(f + g)(5)$ como sigue.

$$\begin{aligned} (f + g)(5) &= 5^2 + 3(5) - 3 \\ &= 25 + 15 - 3 = 37 \end{aligned}$$

Observe que

$$f(5) + g(5) = (f + g)(5)$$
$$2 + 35 = 37 \quad \text{Verdadero}$$

De hecho, para cualquier número real sustituido por x encontraremos que

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

Para la resta, multiplicación y división de funciones, existe una notación similar.

Operaciones sobre funciones

Si $f(x)$ representa una función, $g(x)$ representa una segunda función y x está en el dominio de ambas funciones, entonces pueden realizarse las operaciones siguientes sobre funciones.

Suma de funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia de funciones: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente de funciones: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 ▸ Si $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = x - 3$, determine

a) $(f+g)(x)$ **b)** $(f-g)(x)$

c) $(g-f)(x)$ **d)** ¿Es $(f-g)(x) = (g-f)(x)$?

Solución Para responder las partes de la **a)** a la **c)**, realizamos las operaciones indicadas

a) $$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2 + x - 6) + (x - 3)\\ &= x^2 + x - 6 + x - 3\\ &= x^2 + 2x - 9\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 + x - 6) - (x - 3)\\ &= x^2 + x - 6 - x + 3\\ &= x^2 - 3\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(g-f)(x) &= g(x) - f(x)\\ &= (x - 3) - (x^2 + x - 6)\\ &= x - 3 - x^2 - x + 6\\ &= -x^2 + 3\end{aligned}$$

d) Al comparar las respuestas de la parte **b)** y **c)**, vemos que

$$(f-g)(x) \neq (g-f)(x)$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 ▸ Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 2$, determinar

a) $(f-g)(6)$ **b)** $(f \cdot g)(5)$ **c)** $(f/g)(8)$

Solución

a) $$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 - 4) - (x - 2)\\ &= x^2 - x - 2\\ (f-g)(6) &= 6^2 - 6 - 2\\ &= 36 - 6 - 2\\ &= 28\end{aligned}$$

También podríamos haber encontrado la solución como sigue:

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(6) = 6^2 - 4 = 32 \qquad g(6) = 6 - 2 = 4$$
$$\begin{aligned}(f-g)(6) &= f(6) - g(6)\\ &= 32 - 4 = 28\end{aligned}$$

b) Encontraremos $(f \cdot g)(5)$ utilizando el hecho de que

$$(f \cdot g)(5) = f(5) \cdot g(5)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(5) = 5^2 - 4 = 21 \qquad g(5) = 5 - 2 = 3$$

Así $f(5) \cdot g(5) = 21 \cdot 3 = 63$. Por lo tanto, $(f \cdot g)(5) = 63$. También podríamos haber encontrado $(f \cdot g)(5)$, por medio de la multiplicación de $f(x) \cdot g(x)$ y luego sustituyendo 5 en el producto. En la sección 5.2 analizaremos cómo hacer esto.

c) Determinaremos $(f/g)(8)$ utilizando el hecho de que

$$(f/g)(8) = f(8)/g(8)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(8) = 8^2 - 4 = 60 \qquad g(8) = 8 - 2 = 6$$

Entonces $f(8)/g(8) = 60/6 = 10$. Por lo tanto, $(f/g)(8) = 10$. También podríamos haber encontrado $(f/g)(8)$ dividiendo $f(x)/g(x)$ y luego sustituyendo el 8 en el cociente. En el capítulo 5 analizaremos cómo hacer esto.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

Observe que, en el recuadro Operaciones sobre funciones, de la página 209, incluimos la frase "y x está en el dominio de ambas funciones". Como se mencionó anteriormente, el dominio de una función es el conjunto de valores que pueden ser usados por la variable independiente. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ es todos los números reales, ya que cuando x es cualquier número real, $f(x)$ también será un número real. El dominio de $g(x) = \dfrac{1}{x - 8}$ es todos los números reales excepto 8, ya que cuando x es cualquier número real excepto 8, la función $g(x)$ es un número real. Cuando x es 8, la función no es un número real ya que $\dfrac{1}{0}$ es indefinida. Estudiaremos el dominio de funciones con mayor detalle en la sección 6.1.

2 Graficar la suma de funciones

Ahora explicaremos cómo podemos graficar la suma, la diferencia, el producto o el cociente de dos funciones. La **figura 3.72** muestra dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$.

Para graficar la suma de $f(x)$ y $g(x)$, o $(f + g)(x)$, utilizamos $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. La tabla de la página siguiente proporciona los valores enteros de x desde -2 hasta 4, los valores de $f(-2)$ a $f(4)$ y los valores de $g(-2)$ a $g(4)$. Estos valores se toman directamente de la **figura 3.72**. Los valores de $(f + g)(-2)$ a $(f + g)(4)$ se determinaron sumando los valores de $f(x)$ y $g(x)$. La gráfica de $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ se ilustra en gris en la **figura 3.73**.

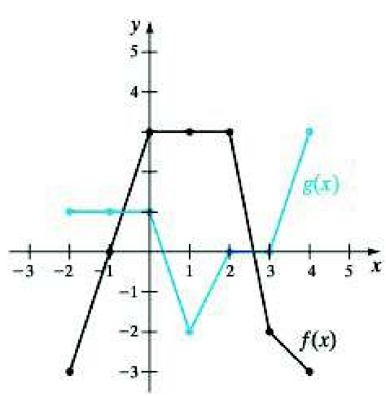


FIGURA 3.72

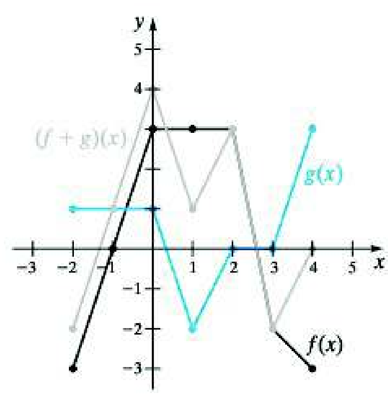


FIGURA 3.73

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f + g)(x)$
-2	-3	1	$-3 + 1 = -2$
-1	0	1	$0 + 1 = 1$
0	3	1	$3 + 1 = 4$
1	3	-2	$3 + (-2) = 1$
2	3	0	$3 + 0 = 3$
3	-2	0	$-2 + 0 = -2$
4	-3	3	$-3 + 3 = 0$

Podríamos graficar la diferencia, el producto o el cociente de dos funciones usando una técnica similar. Por ejemplo, para graficar la función producto $(f \cdot g)(x)$, podríamos evaluar $(f \cdot g)(-2)$ como sigue:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(-2) &= f(-2) \cdot g(-2)\\ &= (-3)(1) = -3\end{aligned}$$

Así, la gráfica de $(f \cdot g)(x)$ tendría un par ordenado en $(-2, -3)$. Otros pares ordenados se determinarían por el mismo procedimiento.

En periódicos, revistas e Internet, con frecuencia encontramos gráficas que muestran la suma de dos funciones. Por lo general las gráficas que muestran la suma de dos funciones se ilustra de una de tres formas: gráfica de líneas, gráfica de barras o gráfica lineal apilada (o acumulada). Los ejemplos 3 a 5 muestran los tres métodos generales. Cada uno de estos ejemplos utilizará la misma información respecto al colesterol.

EJEMPLO 3 ▸ **Gráfica de líneas** Jim Silverstone, desde 2002 a 2006, ha mantenido un registro de su colesterol malo (lipoproteínas de baja densidad, o LBD) y de su colesterol bueno (lipoproteínas de alta densidad, o LAD). La **tabla 3.2** muestra su LBD y su LAD, para estos años.

TABLA 3.2 Colesterol

	2002	2003	2004	2005	2006
LBD	220	240	140	235	130
LAD	30	40	70	35	40

a) Explique por qué los datos que consisten en los años y los valores de LBD son una función, y los datos que consisten en los años y los valores de LAD también son una función.

b) Dibuje una gráfica de líneas que muestre la LBD, LAD y el colesterol total de 2002 a 2006. El colesterol total es la suma de LBD y LAD.

c) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, muestre que $(L + H)(2006) = 170$.

d) Observando la gráfica que dibujó en la parte **b)**, determine los años en que la LBD fue menor que 180.

Solución

a) Los datos que consisten en los años y los valores de LBD son una función ya que para cada año existe un valor de LBD. Observe que el año es la variable independiente, y el valor de LBD es la variable dependiente. Por la misma razón, los datos que consisten en los años y los valores de LAD son una función.

b) Para cualquier año, el colesterol total es la suma de LBD y LAD, para ese año. Por ejemplo, para 2005, a fin de determinar el colesterol, sumamos $235 + 35 = 270$. La gráfica en la **figura 3.74** muestra LBD, LAD y el colesterol total para los años del 2002 a 2006.

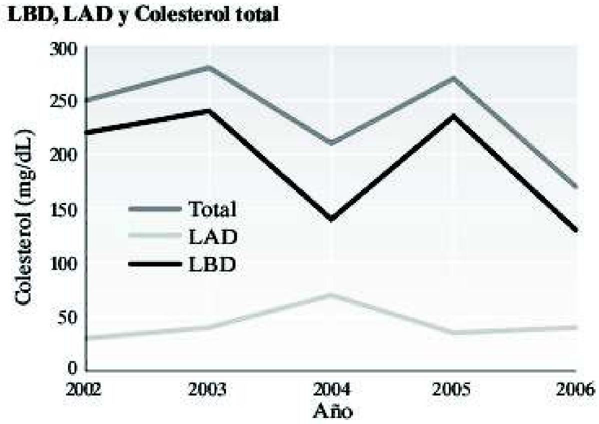


FIGURA 3.74

c) Para determinar LBD y LAD, o el total de colesterol, sumamos los dos valores para 2006.

$$\begin{aligned}(L + H)(2006) &= L(2006) + H(2006)\\ &= 130 + 40 = 170\end{aligned}$$

d) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **b)**, vemos que los años en que la LBD fue menor que 180 son 2004 y 2006.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 63a

EJEMPLO 4 ▸ Gráfica de barras

a) Con los datos de la **tabla 3.2**, en la página 211, dibuje una gráfica de barras que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años de 2002 a 2006.

b) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, utilice la gráfica que se dibujó en la parte **a)** para determinar $(L + H)(2003)$.

c) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, determine en cuáles años el colesterol total fue menor a 220.

d) Observando la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, estime la LAD en 2004.

Solución

a) Para obtener la gráfica de barras que muestre el colesterol total, para cada año dado sumamos la LAD a la LBD. Por ejemplo, para 2002 iniciamos dibujando una barra hasta 220, para representar la LBD. Directamente sobre esa barra agregamos una segunda barra de 30 unidades, para representar la LAD. Esto lleva la barra total a $220 + 30$ o 250 unidades. Utilizamos el mismo procedimiento para cada año desde 2002 hasta 2006. La gráfica de barras se muestra en la **figura 3.75**.

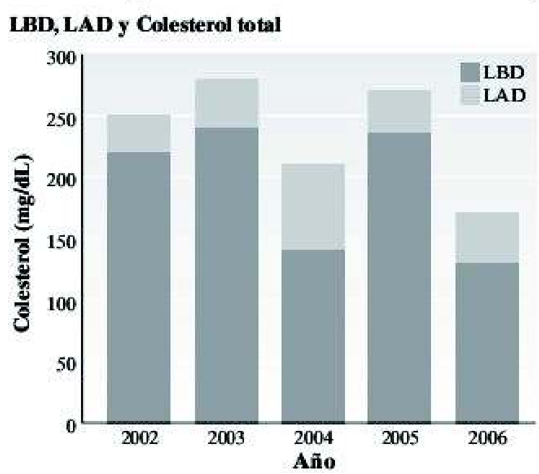


FIGURA 3.75

b) Observando la gráfica en la **figura 3.75**, vemos que $(L + H)(2003)$ o el total de colesterol para 2003 es alrededor de 280.

c) Observando la gráfica, vemos que el colesterol total fue menor que 220 en 2004 y 2006.

d) Para 2004, la barra de LAD inicia en alrededor de 140 y termina en casi 210. La diferencia de estas cantidades, $210 - 140 = 70$, representa la cantidad de LAD en 2004. Por tanto, la LAD en 2004 fue de alrededor de 70.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 63b

EJEMPLO 5 ▸ Gráfica de líneas apiladas

a) Con los datos de la **tabla 3.2** de la página 211, dibuje una gráfica de líneas apiladas (o acumuladas) que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años 2002-2006.

b) Con la gráfica que se dibujó en la parte **a)**, determine en cuáles años el colesterol total fue mayor o igual a 200.

c) Usando la gráfica de la parte **a)**, estime la cantidad de LAD en 2006.

d) Mediante la gráfica de la parte **a)**, determine los años en los que la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250.

Solución

a) Para obtener una gráfica de líneas apiladas, dibuje la línea que representa la LBD. Será la misma línea que dibujó para representar a la LBD en la **figura 3.74** en la página 212. Arriba de esta línea dibuje una línea para representar a la LAD. Una forma de obtenerla es trabajando año por año y luego conectando los puntos para cada año mediante segmentos de recta. Por ejemplo, en 2002, la LAD iniciaría en 220, la cantidad de LBD, y se aumentaría en 30, la cantidad de LAD, para obtener un total de 250. Utilice este procedimiento para cada año. La gráfica se muestra en la **figura 3.76**.

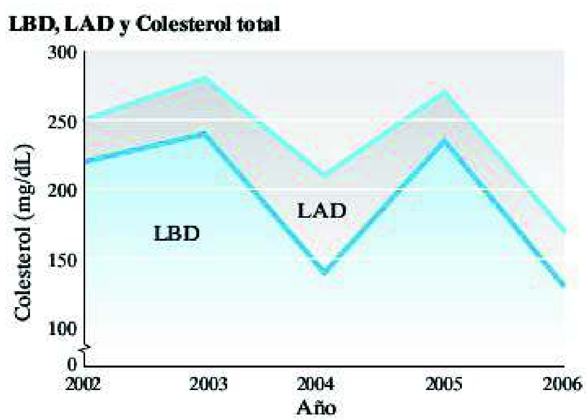


FIGURA 3.76

b) Observando la gráfica, vemos que el colesterol total, indicado por la línea rojo fue mayor o igual a 200 en 2002, 2003, 2004 y 2005.

c) Observando la gráfica en el área de LAD, podemos ver que en 2006 la LAD inicia en alrededor de 130 y termina casi en 170. Si restamos, obtenemos $170 - 130 = 40$. Por lo tanto, la LAD en 2006 fue casi 40. Si representamos con H la cantidad de LAD, entonces $H(2006) \approx 40$.

d) Observando la gráfica, podemos determinar que el único año en que la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250 fue 2002.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 63c

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las calculadoras graficadoras pueden graficar las sumas, diferencias, productos y divisiones de funciones. Una manera de hacer esto es introducir las funciones de forma individual. Luego, siguiendo las instrucciones que vienen con su calculadora, puede sumar, restar, multiplicar o dividir las funciones. Por ejemplo, la pantalla en la **figura 3.77** muestra una TI-84 Plus preparada para graficar $Y_1 = x - 3$, $Y_2 = 2x + 4$ y la suma de las funciones, $Y_3 = Y_1 + Y_2$. En la TI-84 Plus, para obtener $Y_3 = Y_1 + Y_2$, presione la tecla $\boxed{\text{VARS}}$. Luego mueva el cursor a Y-VARS y entonces seleccione 1:Function. Ahora presione $\boxed{1}$ para introducir Y_1. Luego presione $\boxed{+}$. Ahora presione $\boxed{\text{VARS}}$ y vaya a Y-VARS y seleccione 1:Function. Por último, presione $\boxed{2}$ para introducir Y_2. La **figura 3.78** muestra las gráficas de las dos funciones y la gráfica de la suma de las funciones.

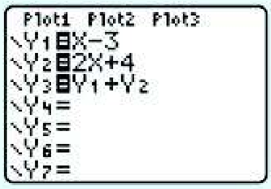


FIGURA 3.77

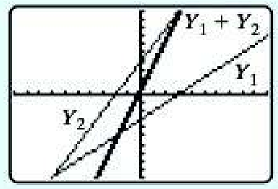


FIGURA 3.78

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Para todos los valores de x, ¿$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$?

2. Para todos los valores de x, ¿$f(x) - g(x) = (f - g)(x)$?

3. ¿Qué restricciones se imponen a la propiedad $f(x)/g(x) = (f/g)(x)$? Explique.

4. Para todos los valores de x, ¿$(f + g)(x) = (g + f)(x)$? Explique y proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

5. Para todos los valores de x, ¿$(f - g)(x) = (g - f)(x)$? Explique y proporcione un ejemplo para apoyar su respuesta.

6. Si $f(2) = 9$ y $g(2) = -3$, determine
   a) $(f + g)(2)$ b) $(f - g)(2)$
   c) $(f \cdot g)(2)$ d) $(f/g)(2)$

7. Si $f(-2) = -3$ y $g(-2) = 5$, determine
   a) $(f + g)(-2)$ b) $(f - g)(-2)$
   c) $(f \cdot g)(-2)$ d) $(f/g)(-2)$

8. Si $f(7) = 10$ y $g(7) = 0$, determine
   a) $(f + g)(7)$ b) $(f - g)(7)$
   c) $(f \cdot g)(7)$ d) $(f/g)(7)$

Práctica de habilidades

Para cada par de funciones, determine **a)** $(f + g)(x)$, **b)** $(f + g)(a)$ *y* **c)** $(f + g)(2)$.

9. $f(x) = x + 5$, $g(x) = x^2 + x$

10. $f(x) = x^2 - x - 8$, $g(x) = x^2 + 1$

11. $f(x) = -3x^2 + x - 4$, $g(x) = x^3 + 3x^2$

12. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 2x + 6$

13. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x$, $g(x) = 3x^2 + 4$

14. $f(x) = 3x^2 - x + 2$, $g(x) = 6 - 4x^2$

Sea $f(x) = x^2 - 4$ *y* $g(x) = -5x + 3$. *Determine lo siguiente.*

15. $f(2) + g(2)$

16. $f(5) + g(5)$

17. $f(4) - g(4)$

18. $f\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)$

19. $f(3) \cdot g(3)$

20. $f(-1) \cdot g(-1)$

21. $\dfrac{f\left(\frac{3}{5}\right)}{g\left(\frac{3}{5}\right)}$

22. $f(-1)/g(-1)$

23. $g(-3) - f(-3)$

24. $g(6) \cdot f(6)$

25. $g(0)/f(0)$

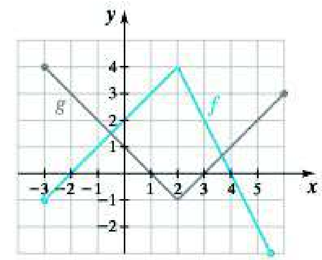
26. $f(2)/g(2)$

Sea $f(x) = 2x^2 - x$ y $g(x) = x - 6$. Determine lo siguiente.

27. $(f + g)(x)$
28. $(f + g)(a)$
29. $(f + g)(2)$
30. $(f + g)(-3)$
31. $(f - g)(-2)$
32. $(f - g)(1)$
33. $(f \cdot g)(0)$
34. $(f \cdot g)(3)$
35. $(f/g)(-1)$
36. $(f/g)(6)$
37. $(g/f)(5)$
38. $(g - f)(4)$
39. $(g - f)(x)$
40. $(g - f)(r)$

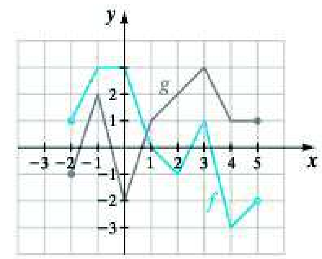
Resolución de problemas

Utilizando la gráfica de la derecha, determine el valor de lo siguiente.



41. $(f + g)(0)$
42. $(f - g)(0)$
43. $(f \cdot g)(2)$
44. $(f/g)(1)$
45. $(g - f)(-1)$
46. $(g + f)(-3)$
47. $(g/f)(4)$
48. $(g \cdot f)(-1)$

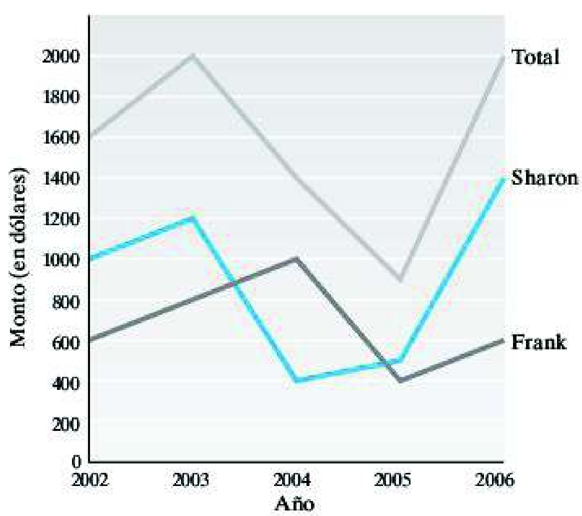
Utilizando la gráfica de la derecha, determine el valor de lo siguiente.



49. $(f + g)(-2)$
50. $(f - g)(-1)$
51. $(f \cdot g)(1)$
52. $(g - f)(3)$
53. $(f/g)(4)$
54. $(g/f)(5)$
55. $(g/f)(2)$
56. $(g \cdot f)(0)$

57. Cuenta de retiro La gráfica siguiente muestra el monto que Sharon y Frank Dangman han reunido para una cuenta conjunta para el retiro, de 2002 a 2006.

Cuenta de retiro



a) ¿En qué año Frank contribuyó con \$1000?

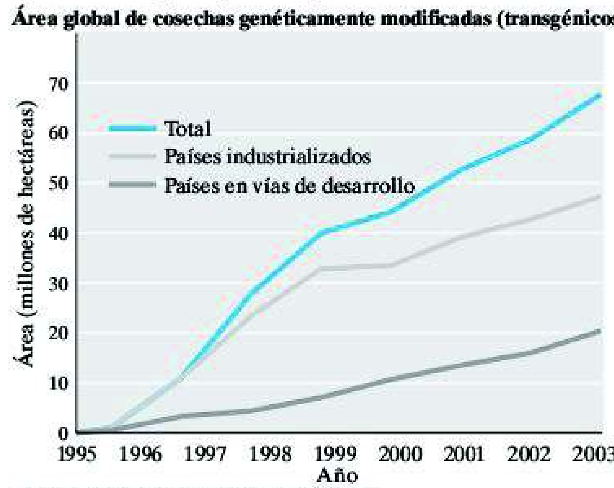
b) En 2006, estime ¿cuánto más contribuyó Sharon que Frank a la cuenta del retiro?

c) Para este periodo de cinco años, estime el monto total que Sharon y Frank contribuyeron a la cuenta conjunta de retiro.

d) Estime $(F + S)(2005)$

58. Cosechas genéticamente modificadas La producción mundial de cosechas genéticamente modificadas (transgénicas), tanto en países en vías de desarrollo como en países industrializados, ha crecido rápidamente. La gráfica siguiente muestra el área de cultivo dedicada a transgénicos en naciones en vías de desarrollo, en países industrializados y a nivel mundial de 1995 a 2003. El total se determinó sumando las cantidades de los dos tipos de países. El área de cultivo se da en millones de hectáreas. Una hectárea es una unidad del sistema métrico que equivale aproximadamente a 2.471 acres.

Área global de cosechas genéticamente modificadas (transgénicos)



Fuente: Crop Biotech Net y www.isaaa.org/ko/global

a) Estime, para 2002, el área que en países en vías de desarrollo está dedicada a cosechas genéticamente modificadas.

b) Estime, para 2002, el área que en países industrializados está dedicada a cosechas genéticamente modificadas.

c) ¿En qué años, de 1995 a 2003, el área dedicada a transgénicos fue menor a 23 millones de hectáreas?

d) ¿En qué años, de 1995 a 2003, el área dedicada a transgénicos fue mayor a 50 millones de hectáreas?

59. Consumo de petróleo de China La necesidad de China por petróleo crudo se ha incrementado en los últimos años. La gráfica de barras siguiente muestra el consumo total de China, C, en millones de barriles de petróleo crudo por día. Las barras en rojo representan el petróleo crudo que China importa diariamente, I. Las barras superiores (gris) representan el petróleo crudo producido diariamente en China para los años de 1995 a 2003.

Fuentes: Bloomberg Financial Markets: BP Statistical Review: Bloomberg News: Customs General Administration of China, *New York Times* (12/23/04)

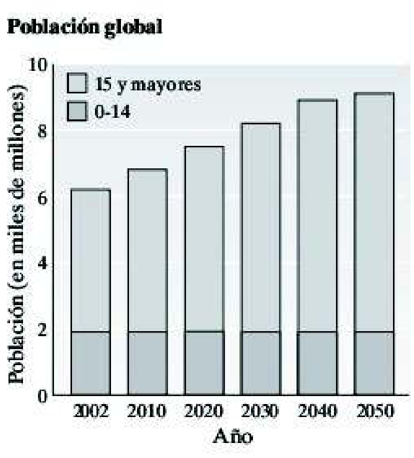
a) ¿En qué año fue mayor la importación de petróleo crudo a China? ¿Cuál fue la cantidad diaria de importación?

b) ¿En qué años la importación de petróleo crudo a China disminuyó, con respecto al año anterior?

c) Estime $I(2002)$.

d) Estime la cantidad de petróleo crudo producido diariamente en China en 2003.

60. Población global La gráfica siguiente muestra la población global proyectada y la población proyectada de niños de 0 a 14 años de edad de 2002 a 2004.



Fuente: U.S. Census Bureau, International Programs Center, International Data Base

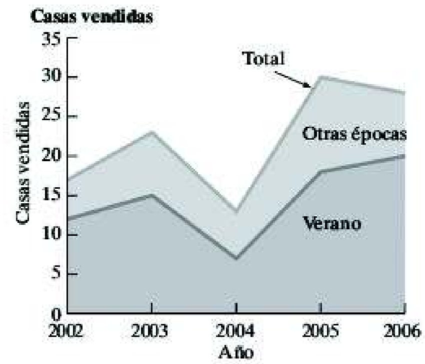
a) Estime la población global proyectada para 2050.

b) Estime el número proyectado de niños de 0 a 14 años de edad para 2050.

c) Estime el número proyectado de personas de 15 años y mayores para 2050.

d) Estime la diferencia proyectada en la población global total entre 2002 y 2050.

61. Bienes raíces En muchas regiones de Estados Unidos, las casas se venden mejor en verano que en otras épocas del año. La gráfica siguiente muestra el total de casas vendidas en el pueblo de Fuller de 2002 a 2006. Además, la gráfica muestra la venta de casas en el verano, S, y en otras épocas del año, Y.



a) Estime el número de casas vendidas en el verano de 2006.

b) Estime el número de casas vendidas en otras épocas en 2006.

c) Estime $Y(2005)$.

d) Estime $(S + Y)(2003)$.

62. Ingreso Mark Whitaker es propietario de un negocio en el que en verano arregla jardines y en invierno retira la nieve. La gráfica siguiente muestra el ingreso total, T, de 2002 a 2006 dividido en el ingreso por arreglar jardines, L, y el ingreso por retirar la nieve, S.

a) Estime el ingreso total para 2006.

b) Estime $L(2002)$.

c) Estime $S(2005)$.

d) Estime $(L + S)(2003)$.

63. Ingreso La tabla siguiente muestra los ingresos del señor y la señora Abrams durante 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Señor Abrams	\$15,500	\$17,000	\$8,000	\$25,000	\$20,000
Señora Abrams	\$4,500	\$18,000	\$28,000	\$7,000	\$22,500

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre el ingreso del señor Abrams, de la señora Abrams y el ingreso total de ellos de 2002 a 2006. Vea el ejemplo 3.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada. Vea el ejemplo 4.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada. Vea el ejemplo 5.

64. Factura telefónica La tabla siguiente muestra las facturaciones por teléfono residencial y por teléfono celular (redondeadas a los $10 más cercanos) de 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Residencial	$40	$50	$60	$50	$0
Celular	$80	$50	$20	$50	$60

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre las facturaciones de teléfono residencial, de teléfono celular y el total por ambos de 2002 a 2006.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

65. Impuestos María Cisneros paga impuestos a las percepciones, tanto federales como estatales. La tabla muestra el monto de impuestos a las percepciones que ella pagó al gobierno federal y al gobierno estatal (redondeado a los $100 más cercanos) de 2002 a 2006.

	2002	2003	2004	2005	2006
Federal	$4000	$5000	$3000	$6000	$6500
Estatal	$1600	$2000	$0	$1700	$1200

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre el monto destinado al pago de impuesto federal, el monto del impuesto estatal y el monto total en estos dos tipos de impuestos de 2002 a 2006.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

66. Costo de colegiaturas La familia Olmert tiene hijos gemelos, Justin y Nelly, quienes asisten a diferentes colegios. Las colegiaturas de Justin y de Nelly de 2004 a 2007 (a los $1000 más cercanos) se muestran en la tabla siguiente.

	2004	2005	2006	2007
Justin	$12,000	$6000	$8000	$9000
Nelly	$2000	$8000	$8000	$5000

a) Dibuje una gráfica de líneas que ilustre la información dada, incluyendo la cantidad total en colegiaturas para ambos durante los años de 2004 a 2007.

b) Dibuje una gráfica de barras que ilustre la información dada.

c) Dibuje una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada.

Para los ejercicios del 67 al 72, sean f y g dos funciones que se grafican en los mismos ejes.

67. Si, en a, $(f + g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

68. Si, en a, $(f \cdot g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

69. Si, en a, $(f - g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

70. Si, en a, $(f - g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

71. Si, en a, $(f/g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

72. Si, en a, $(f \cdot g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse con respecto a $f(a)$ y $g(a)$?

Grafique las funciones siguientes en su calculadora graficadora.

73. $y_1 = 2x + 3$
$y_2 = -x + 4$
$y_3 = y_1 + y_2$

74. $y_1 = x - 3$
$y_2 = 2x$
$y_3 = y_1 - y_2$

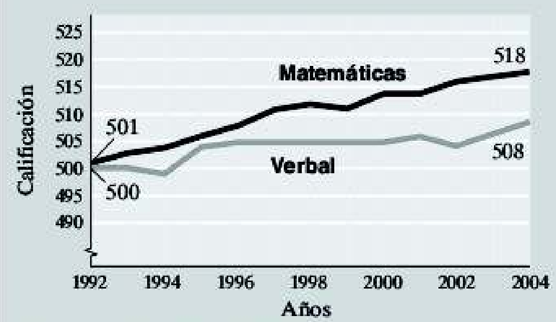
75. $y_1 = x$
$y_2 = x + 5$
$y_3 = y_1 \cdot y_2$

76. $y_1 = 2x^2 - 4$
$y_2 = x$
$y_3 = y_1/y_2$

Actividad en grupo

77. Calificaciones en el SAT La gráfica siguiente muestra las calificaciones promedio en matemáticas y en habilidades verbales de estudiantes que aplicaron el examen SAT de ingreso al colegio para 1992 a 2004. Suponga que f representa las calificaciones en matemáticas, g las calificaciones en habilidades verbales, y que t representa el año. En equipo, dibujen una gráfica que represente $(f + g)(t)$.

Tendencia de 12 años en las calificaciones de SAT



Fuente: USA Today, y otras investigaciones

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **78.** Evalúe $(-4)^{-3}$.

[1.6] **79.** Exprese 2,960,000 en notación científica.

[2.2] **80.** Despeje a h de $A = \frac{1}{2}bh$.

[2.3] **81. Lavadora** El costo de una lavadora, incluyendo 6% de impuesto a la venta, es \$477. Determine el costo antes del impuesto de la lavadora.

[3.1] **82.** Grafique $y = |x| - 2$.

[3.3] **83.** Grafique $3x - 4y = 12$.

3.7 Graficación de desigualdades lineales

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables.

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables

Una **desigualdad lineal** resulta cuando el signo de igual en una ecuación lineal se reemplaza con un signo de desigualdad.

Ejemplos de desigualdades lineales con dos variables

$$2x + 3y > 2 \qquad 3y < 4x - 9$$

$$-x - 2y \leq 3 \qquad 5x \geq 2y - 7$$

Una recta divide un plano en tres regiones: la recta misma y los dos **semiplanos**, uno a cada lado de la recta. La recta se denomina la **frontera**. Considere la ecuación lineal $2x + 3y = 6$, la gráfica de esta recta, la recta frontera, divide al plano en el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $2x + 3y < 6$ del conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $2x + 3y > 6$. Una desigualdad puede o no incluir a la recta frontera. Como la desigualdad $2x + 3y \leq 6$ significa $2x + 3y < 6$ o $2x + 3y = 6$, la desigualdad $2x + 3y \leq 6$ contiene a la recta frontera. De manera análoga, la desigualdad $2x + 3y \geq 6$ contiene a la recta frontera. La gráfica de las desigualdades $2x + 3y < 6$ y $2x + 3y > 6$ no contiene a la recta frontera. Ahora analizamos cómo graficar desigualdades lineales.

Para graficar una desigualdad lineal con dos variables

1. Reemplace el símbolo de desigualdad con un signo de igual.
2. Trace la gráfica de la ecuación en el paso 1. Si la desigualdad original contiene un símbolo $\geq$ o $\leq$ trace la gráfica utilizando una línea sólida. Si la desigualdad original contiene un símbolo $>$ o $<$, trace la gráfica utilizando una línea discontinua.
3. Seleccione un punto que no esté en la línea y determine si este punto es una solución de la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región del lado de la línea que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región del lado de la línea que no contiene al punto.

En el paso 3, estamos decidiendo cuál conjunto de puntos satisface la desigualdad dada.

EJEMPLO 1 Grafique la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$.

Solución Primero graficamos la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 3$. Como la desigualdad original contiene un signo menor que, $<$, utilizamos una línea discontinua al trazar la gráfica (vea la **figura 3.79**). La línea discontinua indica que los puntos de esta línea no son soluciones de la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$. Seleccione un punto que no esté en la línea y determine si éste satisface la desigualdad. Con frecuencia, el punto más sencillo de utilizar es el origen $(0, 0)$.

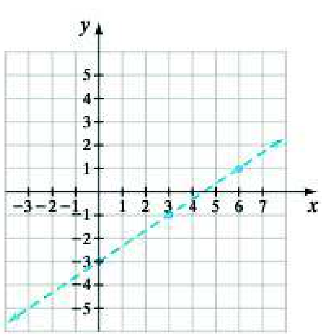


FIGURA 3.79

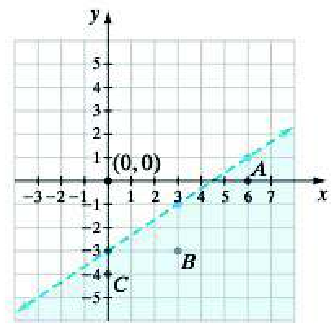


FIGURA 3.80

Punto de prueba (0, 0)

$$y < \frac{2}{3}x - 3$$

$$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$$

$$0 \overset{?}{<} 0 - 3$$

$$0 < -3 \qquad \textit{Falso}$$

Como 0 no es menor que -3, el punto $(0, 0)$ no satisface la desigualdad. La solución serán todos los puntos del lado de la línea opuesto al punto $(0, 0)$. Sombree esta región (**figura 3.80**). Cada punto que esté en el área sombreada satisface la desigualdad dada. Comprobemos con algunos puntos A, B y C.

Punto *A*	Punto *B*	Punto *C*
$(6, 0)$	$(3, -3)$	$(0, -4)$
$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$
$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(6) - 3$	$-3 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(3) - 3$	$-4 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$
$0 \overset{?}{<} 4 - 3$	$-3 \overset{?}{<} 2 - 3$	$-4 \overset{?}{<} 0 - 3$
$0 < 1$ *Verdadero*	$-3 < -1$ *Verdadero*	$-4 < -3$ *Verdadero*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 15**

EJEMPLO 2 ▸ Grafique la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$.

Solución Primero, graficamos la ecuación $y = -\frac{1}{2}x$. Como la desigualdad es $\geq$, utilizamos una línea sólida para indicar que los puntos de la línea son soluciones de la desigualdad (**figura 3.81**). Como el punto $(0, 0)$ está sobre la línea, no podemos elegir ese punto para determinar la solución. De forma arbitraria, elegimos el punto $(3, 1)$.

Punto de prueba (3, 1)

$$y \geq -\frac{1}{2}x$$

$$1 \overset{?}{\geq} -\frac{1}{2}(3)$$

$$1 \geq -\frac{3}{2} \qquad \textit{Verdadero}$$

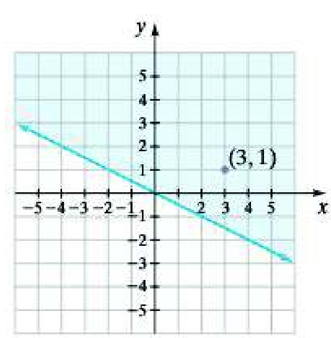


FIGURA 3.81

Como el punto $(3, 1)$ satisface la desigualdad, todo punto en el mismo lado de la línea $(3, 1)$ también satisfará la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$. Sombree esta región como se indica. Todo punto que se encuentre en la región sombreada, así como todo punto sobre la recta, satisface la desigualdad.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 9**

EJEMPLO 3 Grafique la desigualdad $3x - 2y < -6$.

Solución Primero, graficamos la ecuación $3x - 2y = -6$. Como la desigualdad es $<$, utilizamos una línea discontinua para dibujar la gráfica, **figura 3.82**. Al sustituir el punto de prueba (0, 0) en la desigualdad, obtenemos una proposición falsa.

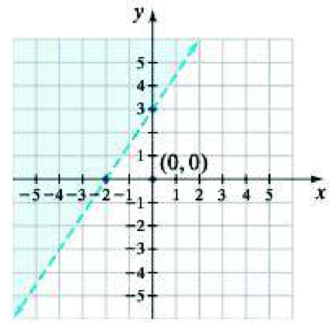


FIGURA 3.82

Punto de prueba (0, 0)

$$3x - 2y < -6$$

$$3(0) - 2(0) \overset{?}{<} -6$$

$$0 < -6 \quad \textit{Falso}$$

Por lo tanto, la solución es la parte del plano que no contiene al origen.

Ahora resuelva el ejercicio 23

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Una calculadora graficadora también puede mostrar gráficas de desigualdades. El procedimiento para mostrar las gráficas varía de calculadora a calculadora. En la **figura 3.83**, mostramos la gráfica de $y > 2x + 3$. Lea el manual de su calculadora graficadora y aprenda cómo mostrar gráficas de desigualdades.

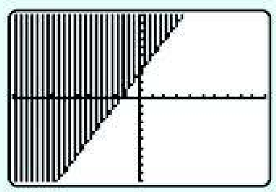


FIGURA 3.83

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.7

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Cuando grafica una desigualdad que tiene $>$ o $<$, ¿por qué los puntos de la línea no son soluciones de la desigualdad?
2. Cuando grafica una desigualdad que tiene $\geq$ o $\leq$, ¿por qué los puntos de la línea sí son soluciones de la desigualdad?
3. Cuando grafica una desigualdad lineal, ¿cuándo el punto (0, 0) no puede ser utilizado como un punto de prueba?
4. Cuando grafica una desigualdad lineal de la forma $y > ax + b$, en donde a y b son números reales, ¿la solución siempre estará por arriba de la recta? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada desigualdad.

5. $x > 1$	6. $x \geq 4$	7. $y < -2$	8. $y < x$
9. $y \geq -\frac{1}{2}x$	10. $y < \frac{1}{2}x$	11. $y < 2x + 1$	12. $y \geq 3x - 1$
13. $y > 2x - 1$	14. $y \leq -x + 4$	15. $y \geq \frac{1}{2}x - 3$	16. $y < 3x + 2$
17. $2x + 3y > 6$	18. $2x - 3y \geq 12$	19. $y \leq -3x + 5$	20. $y \leq \frac{2}{3}x + 3$
21. $2x + y < 4$	22. $3x - 4y \leq 12$	23. $10 \geq 5x - 2y$	24. $-x - 2y > 4$

Resolución de problemas

25. **Seguro de vida** Las tarifas mensuales por un seguro de vida de $100,000 para mujeres del grupo financiero general americano aumentan de forma casi lineal para las edades de 35 a 50. La tarifa para una mujer de 35 años de edad es de $10.15 al mes y para una mujer de 50 años es de $16.45 al mes.
   a) Trace una gráfica que se ajuste a estos datos.
   b) En la gráfica, marque la parte de la gráfica donde la tarifa es menor o igual a $15 al mes.
   c) Estime la edad a la cual la tarifa excede, por primera vez, $15 al mes.

26. **Índice de precios al consumidor** El índice de precios al consumidor (IPC) es una medida de la inflación. Desde 1990, el IPC ha estado creciendo de manera casi lineal. El IPC en 1990 fue 130.7 y en 2005 el IPC fue 190.7.

   Fuente: Oficina de censos de Estados Unidos.
   a) Trace una gráfica que se ajuste a estos datos.
   b) En la gráfica, marque la parte de la gráfica donde el IPC es mayor o igual a 171.
   c) Estime el primer año en que el IPC fue mayor o igual a 171.

27. **Disminución de fumadores** El porcentaje de estadounidenses de 18 y mayores que fuman ha disminuido de una forma aproximadamente lineal desde 1997. En 1997, alrededor del 29.7% de los estadounidenses de 18 y mayores fumaban. En 2004, el porcentaje descendió a 20.9%.

   Fuente: Centros para el Control y Prevención de Enfermedades.
   a) Dibuje una gráfica que se ajuste a estos datos.
   b) En la gráfica, marque la parte de la misma en la que el porcentaje de estadounidenses de 18 años y mayores que fumaban es menor o igual a 25%.
   c) Estime el primer año en que el porcentaje de estadounidenses de 18 años y mayores que fuman será menor a 23%.

28. **Viajes en China** El número de viajeros chinos ha crecido de forma casi lineal desde 1993 a 2005. En 1993 hubo alrededor de 3.7 millones viajeros chinos. En 2005, hubo alrededor de 17.9 viajeros chinos.

   Fuente: Asociación de la Industria de Viajes de Estados Unidos.
   a) Dibuje una gráfica que se ajuste a estos datos.
   b) En la gráfica, marque la parte de la misma en la que el número de viajeros chinos es mayor o igual a 10 millones.
   c) Estime el primer año en el que el número de viajeros chinos sea mayor o igual a 12 millones.

29. a) Grafique $f(x) = 2x - 4$.
   b) En la gráfica, sombree la región acotada por $f(x)$, $x = 2$, $x = 4$ y el eje x.

30. a) Grafique $g(x) = -x + 4$.
   b) En la gráfica sombree la región acotada por $g(x)$, $x = 1$ y los ejes x y y.

Retos

Grafique cada desigualdad.

31. $y < |x|$

32. $y \geq x^2$

33. $y < x^2 - 4$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 34. Resuelva la ecuación $9 - \frac{5x}{3} = -6$.

[2.2] 35. Si $C = \bar{x} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, determine C cuando $\bar{x} = 80$, $Z = 1.96$, $\sigma = 3$ y $n = 25$.

[2.3] 36. **Ofertas en tienda** La tienda Discos y Cosas de Olie está a punto de cerrar para siempre. La primera semana el precio de todos los artículos se ha reducido 10%. La segunda semana el precio de todos los artículos tiene un descuento adicional de $2. Si durante la segunda semana Bob Frieble compra un CD por $12.15, determine el precio original del CD.

[3.2] 37. $f(x) = -x^2 + 5$; determine $f(-3)$.

[3.3] 38. Escriba una ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, -2)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - y = 4$.

[3.4] 39. Determine la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 7)$ y $(2, -1)$.

Resumen del capítulo 3

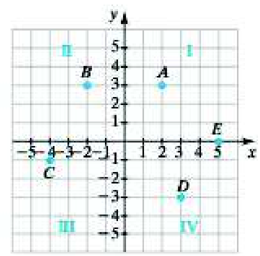
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.1

El sistema de **coordenadas cartesianas (o rectangulares)** consiste en dos ejes dibujados de forma perpendicular entre ellos. El **eje *x*** es el eje horizontal. El **eje *y*** es el eje vertical. El **origen** es el punto de intersección de los dos ejes. Los dos ejes dan lugar a cuatro **cuadrantes** (I, II, III y IV). Un **par ordenado (o pareja ordenada) (*x*, *y*)** se utiliza para dar las dos coordenadas de un punto.

Trace los puntos siguientes en el mismo conjunto de ejes.

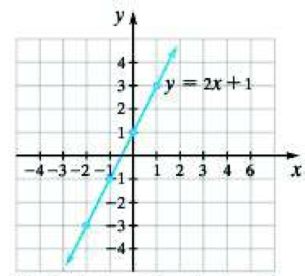
$$A(2, 3),\ B(-2, 3),\ C(-4, -1),\ D(3, -3),\ E(5, 0)$$



Una **gráfica** es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Puntos que están en una línea recta, se dice que son **colineales**.

Una **ecuación lineal** es una ecuación cuya gráfica es una recta. Una ecuación lineal también se conoce como **ecuación de primer grado**.

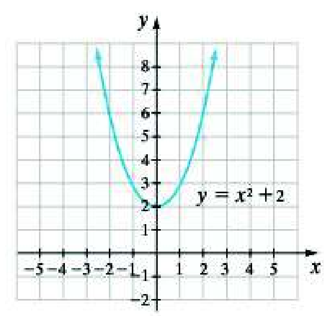
$y = 2x + 1$ es una ecuación lineal cuya gráfica se ilustra a continuación.



Los puntos $(1, 3)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$ y $(-2, -3)$ son colineales.

Una **ecuación no lineal** es una ecuación cuya gráfica no es una línea recta.

$y = x^2 + 2$ es una ecuación no lineal cuya gráfica se muestra enseguida.



Sección 3.2

Para una ecuación con las variables *x* y *y*, si el valor de *y* depende del valor de *x*, entonces *y* es la **variable dependiente** y *x* es la **variable independiente**.

En la ecuación $y = 2x^2 + 3x - 4$, *x* es la variable independiente y *y* es la variable dependiente.

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el **dominio**, y un segundo conjunto de elementos, el **rango**, tal que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

Definición alterna:

Una **función** es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna primera coordenada se repite.

$\{(1,2), (2,3), 1, 4)\}$ es una relación, pero no es una función.

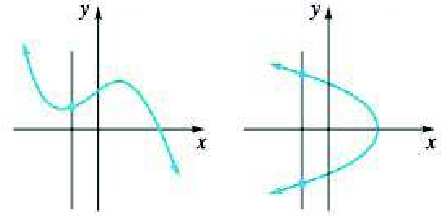
$\{(1, 6), (2, 7), (3, 10)\}$ es una relación. También es una función, ya que a cada elemento en el dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

Dominio: $\{1, 2, 3\}$, rango: $\{6, 7, 10\}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.2 (continuación)

La **prueba** (o criterio) **de la recta vertical** puede utilizase para determinar si una gráfica representa una función.
Si, en cualquier parte de la gráfica, se puede dibujar una recta vertical que interseque en dos o más lugares a la misma, la gráfica no representa una función. Si no puede dibujarse una recta vertical que interseque a la gráfica en más de un punto, la gráfica representa a una función.



La **notación de función** puede utilizarse cuando y es una función de x. Para la notación de función, reemplace y con $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etcétera.

$y = 7x - 9$ puede escribirse como $f(x) = 7x - 9$.

Dada $y = f(x)$, para determinar $f(a)$, reemplace cada x con a.

Sea $\quad f(x) = x^2 + 2x - 8.$

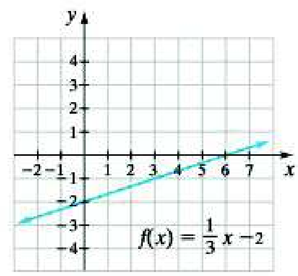
Entonces $\quad f(1) = 1^2 + 2(1) - 8 = -5$

$$f(a) = a^2 + 2a - 8.$$

Sección 3.3

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de una función lineal es una línea recta.

Grafique $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.



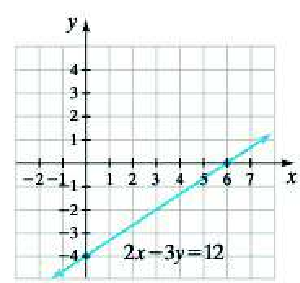
La **forma general de una ecuación lineal** es $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales y a y b no pueden ser cero simultáneamente.

$$3x + 5y = 7, \qquad -2x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{8}$$

La **intercepción x (o intersección con el eje x)** es el punto donde la gráfica cruza el eje x.
Para determinar la intersección con el eje x, haga $y = 0$ y resuelva para x.

La **intercepción y (o intersección con el eje y)** es el punto donde la gráfica corta al eje y.
Para determinar la intercepción y, haga $x = 0$ y resuelva para y.

Grafique $2x - 3y = 12$ mediante las intersecciones con el eje x y con el eje y.
Para la intersección con el eje x, haga $y = 0$



$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2x - 3(0) &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la intersección con el eje x es $(6, 0)$.
Para la intersección con el eje y, haga $x = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2(0) - 3y &= 12 \\ -3y &= 12 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

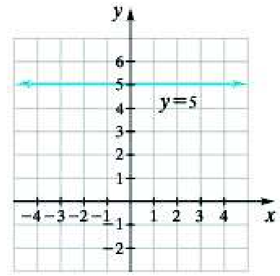
Así que la intersección con el eje y es $(0, -4)$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.3 (continuación)

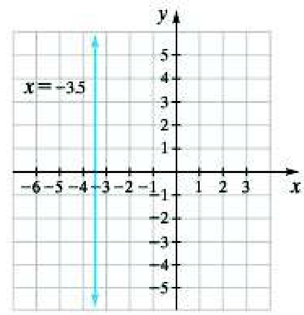
La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ (o función de la forma $f(x) = b$) siempre será una recta horizontal para cualquier número real b. La función $f(x) = b$ se denomina **función constante**.

Grafique $y = 5$ (o $f(x) = 5$).



La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Grafique $x = -3.5$.



Sección 3.4

La **pendiente de una recta** es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre que $x_1 \neq x_2$.

La pendiente de la recta que pasa por $(-1, 3)$ y $(7, 5)$ es

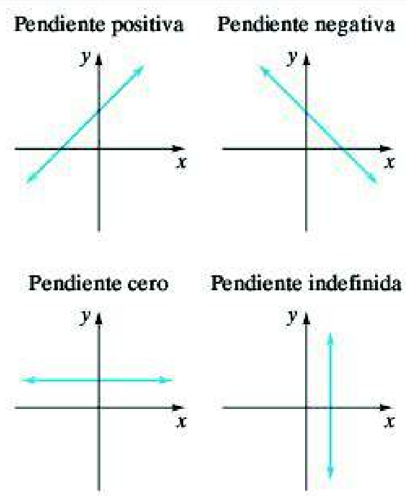
$$m = \frac{5 - 3}{7 - (-1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Una recta que sube de izquierda a derecha tiene **pendiente positiva**.

Una recta que baja de izquierda a derecha tiene **pendiente negativa**.

Una recta horizontal tiene **pendiente cero**.

La pendiente de una recta vertical es **indefinida**.

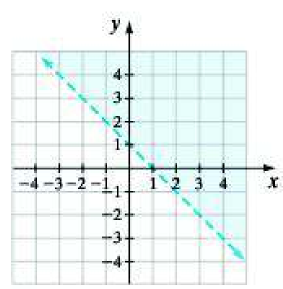


La **forma pendiente intersección de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

Donde m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es la intersección con y de la recta.

$$y = 7x - 1, \quad y = -3x + 10$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.5	
La **forma punto pendiente de una ecuación lineal** es $$y - y_1 = m(x - x_1)$$ donde m es la pendiente de la recta y (x_1, y_1) es un punto de la recta.	Si $m = 9$ y (x_1, y_1) es $(5, 2)$ entonces $$y - 2 = 9(x - 5)$$
Dos rectas son **paralelas**, si tienen la misma pendiente.	Las gráficas de $y = 2x + 4$ y $y = 2x + 7$ son paralelas, ya que ambas gráficas tienen la misma pendiente de 2, pero diferentes intersecciones con y.
Dos rectas son **perpendiculares**, si sus pendientes son recíprocos negativos. Para cualquier número real $a \neq 0$, su recíproco negativo es $-\frac{1}{a}$.	Las gráficas de $y = 3x - 5$ y $y = -\frac{1}{3}x + 8$ son perpendiculares, ya que una gráfica tiene pendiente de 3 y la otra gráfica tiene una pendiente de $-\frac{1}{3}$. El número $-\frac{1}{3}$ es el recíproco negativo de 3.
Sección 3.6	
Operaciones con funciones	Si $f(x) = x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = x - 3$, entonces
Suma de funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 2x - 5) + (x - 3)$ $= x^2 + 3x - 8$
Diferencia de funciones: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 2x - 5) - (x - 3)$ $= x^2 + x - 2$
Suma de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $= (x^2 + 2x - 5)(x - 3)$ $= x^3 - x^2 - 11x + 15$
Suma de funciones: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x - 3}, \quad x \neq 3$
Sección 3.7	
Una **desigualdad lineal** resulta cuando el signo de igual de una ecuación lineal se reemplaza con un signo de desigualdad.	$3x - 4y > 1, \quad 2x + 5y \leq -4$
Para graficar una desigualdad lineal con dos variables **1.** Reemplace el símbolo de desigualdad con un signo de igual. **2.** Dibuje la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original es $\geq$ o $\leq$, dibuje una línea sólida. Si la desigualdad es $>$ o $<$ dibuje una línea discontinua. **3.** Seleccione cualquier punto que no esté en la recta. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región en el lado de la recta que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región en el lado de la recta que no contiene este punto.	Grafique $y > -x + 1$. 

Ejercicios de repaso del capítulo 3

[3.1] **1.** Trace las parejas ordenadas en los mismos ejes.

a) $A(5, 3)$ **b)** $B(0, -3)$ **c)** $C\left(5, \frac{1}{2}\right)$ **d)** $D(-4, 2)$ **e)** $E(-6, -1)$ **f)** $F(-2, 0)$

Grafique cada ecuación.

2. $y = \frac{1}{2}x$ **3.** $y = -2x - 1$ **4.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **5.** $y = -\frac{3}{2}x + 1$ **6.** $y = x^2$

7. $y = x^2 - 1$ **8.** $y = |x|$ **9.** $y = |x| - 1$ **10.** $y = x^3$ **11.** $y = x^3 + 4$

[3.2]

12. Defina lo que es una función.

13. ¿Toda relación es una función? ¿Toda función es una relación? Explique.

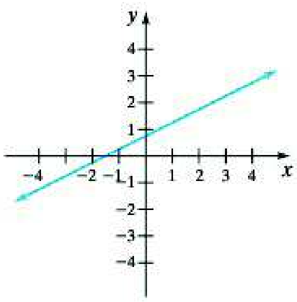
Determine si las relaciones siguientes son funciones, explique sus respuestas.

14.

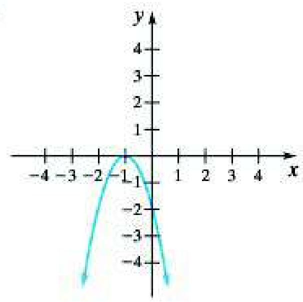
15. $\{(2, 5), (3, -4), (5, -9), (6, -1), (2, -2)\}$

Para los ejercicios del 16 al 19, **a)** *determine si las gráficas siguientes representan funciones;* **b)** *determine el dominio y el rango de cada una.*

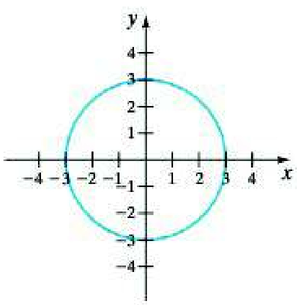
16.



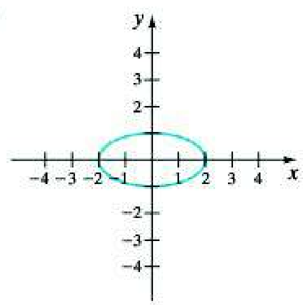
17.



18.



19.



20. Si $f(x) = -x^2 + 3x - 4$, determine
a) $f(2)$ y
b) $f(h)$.

21. Si $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 6$, determine
a) $g(-1)$ y
b) $g(a)$.

22. Velocidad de un automóvil Jane Covillion va por un camino en un automóvil. La gráfica siguiente muestra la velocidad del automóvil como una función del tiempo. Idee una historia que corresponda a esta gráfica.

23. Huerto de manzanos El número de canastas de manzanas, N, producidas por x árboles en un pequeño huerto ($x \leq 100$) está dado por la función $N(x) = 40x - 0.2x^2$. ¿Cuántas canastas de manzanas son producidas por

a) 30 árboles?

b) 50 árboles?

24. Pelota que cae Si una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 196 pies, su altura con respecto al piso, h, en cualquier tiempo, t, puede encontrarse por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 196, 0 \leq t \leq 3.5$. Determine la altura de la pelota en

a) 1 segundo.

b) 3 segundos.

[3.3] *Grafique cada ecuación usando las intersecciones con los ejes.*

25. $3x - 4y = 6$

26. $\frac{1}{3}x = \frac{1}{8}y + 10$

Grafique cada ecuación o función.

27. $f(x) = 4$

28. $x = -2$

29. Producción de rosquillas La utilidad al año, p, de una compañía que se dedica a producir rosquillas puede estimarse por medio de la función $p(x) = 0.1x - 5000$, donde x es el número de rosquillas que se vende al año.

a) Trace una gráfica de utilidades contra rosquillas vendidas hasta 250,000.

b) Estime el número de rosquillas que debe venderse para que la compañía esté en equilibrio.

c) Estime el número de rosquillas vendidas, si la compañía tiene una ganancia de $22,000.

30. Interés Trace una gráfica que ilustre el interés sobre un préstamo de $12,000 por un periodo de un año para diferentes tasas de interés hasta de 20%. Utilice interés = capital · tasa · tiempo.

[3.4] *Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica representada por la ecuación dada.*

31. $y = \frac{1}{2}x - 5$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $3x + 5y = 13$

34. $3x + 4y = 10$

35. $x = -7$

36. $f(x) = 8$

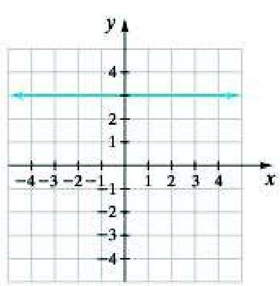
Determine la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

37. $(2, -5), (6, 7)$

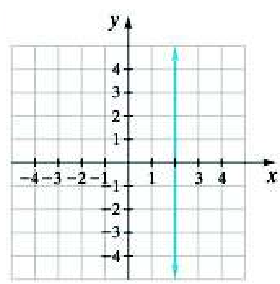
38. $(-2, 3)(4, 1)$

Determine la pendiente de cada recta. Si la pendiente no es definida, indíquelo. Luego escriba la ecuación de la recta.

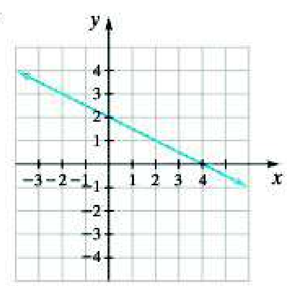
39.



40.



41.



42. Si la gráfica de $y = -2x + 5$ se traslada 4 unidades hacia abajo, determine

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje y de la gráfica trasladada

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

43. Si un punto en la gráfica es $(-6, -4)$ y la pendiente es $\frac{2}{3}$, determine la intersección con el eje y de la gráfica.

44. Fiebre tifoidea La tabla siguiente muestra el número de casos reportados de fiebre tifoidea en Estados Unidos para años seleccionados de 1970 a 2000.

a) Trace cada punto y dibuje segmentos de recta de punto a punto.

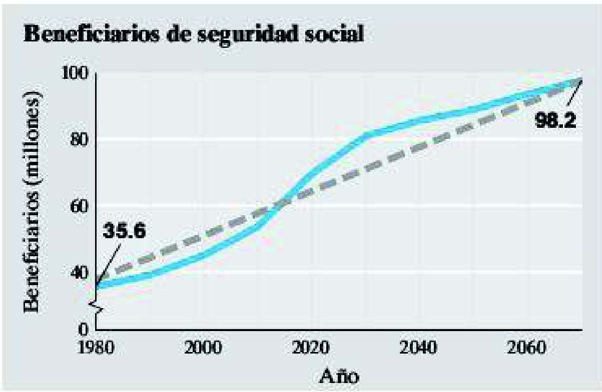
b) Calcule la pendiente de los segmentos de recta.

c) ¿Durante cuál periodo de diez años el número de casos reportados de fiebre tifoidea aumentó más?

Año	Número de casos de fiebre tifoidea reportados
1970	346
1980	510
1990	552
2000	317

Fuente: Departamento de Salud y Servicios de Estados Unidos.

45. Seguridad social La gráfica siguiente muestra el número de beneficiarios de seguridad social desde 1980 proyectados hasta 2070. Utilice la forma pendiente intercepción para determinar la función $n(t)$ (representada por la línea recta discontinua) que puede usarse para representar estos datos.



[3.5] *Determine si las dos rectas dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.*

46. $2x - 3y = 10$

$y = \frac{2}{3}x - 5$

47. $2x - 3y = 7$

$-3x - 2y = 8$

48. $4x - 2y = 13$

$-2x + 4y = -9$

Determine la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Escriba cada respuesta en la forma pendiente intercepción.

49. Pendiente $= \frac{1}{2}$, pasa por $(4, 9)$.

50. Pasa por $(-3, 1)$ y $(4, -6)$.

51. Pasa por $(0, 6)$ y es paralela a la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

52. Pasa por $(2, 8)$ y es paralela a la gráfica cuya ecuación es $5x - 2y = 7$.

53. Pasa por $(-3, 1)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $y = \frac{3}{5}x + 5$.

54. Pasa por $(4, 5)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $4x - 2y = 8$.

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determine si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de éstas.

55. l_1: $(5, 3)$ y $(0, -3)$; l_2: $(1, -1)$ y $(2, -2)$

56. l_1: $(3, 2)$ y $(2, 3)$; l_2: $(4, 1)$ y $(1, 4)$

57. l_1: $(7, 3)$ y $(4, 6)$; l_2: $(5, 2)$ y $(6, 3)$

58. l_1: $(-3, 5)$ y $(2, 3)$; l_2: $(-4, -2)$ y $(-1, 2)$

59. Tarifas de seguros Las tarifas mensuales por un seguro de vida de \$100,000 del Grupo Financiero General para hombres aumenta de manera casi lineal, a partir de 35 hasta 50 años. La tarifa para un hombre de 35 años es \$10.76 al mes y la tarifa para un hombre de 50 años de edad es \$19.91 al mes. Sea r la tarifa y a la edad de un hombre entre 35 y 50 años de edad.

a) Determine una función lineal $r(a)$ que se ajuste a estos datos.

b) Utilizando la función en la parte **a)**, estime la tarifa mensual para un hombre de 40 años de edad.

60. Quema de calorías El número de calorías quemadas en una hora de natación, cuando se nada a una velocidad entre 20 y 50 yardas por minuto, es una función lineal de la velocidad del nadador. Una persona que nada a 30 yardas por minuto quemará alrededor de 489 calorías en una hora. Mientras que nadando a 50 yardas por minuto, una persona quemará alrededor de 525 calorías en una hora. Esta información se muestra en la gráfica siguiente.

Fuente: Health Magazine Web sitio en la web www.health.com

a) Determine una función lineal que pueda usarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en una hora cuando una persona nada a r yardas por minuto.

b) Utilice la función determinada en la parte **a)**, para determinar el número de calorías quemadas en una hora, cuando una persona nada a 40 yardas por minuto.

c) Utilice la función determinada en la parte **a)**, para determinar la velocidad a la cual una persona necesita nadar para quemar 600 calorías en una hora.

[3.6] *Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$, determine lo siguiente.*

61. $(f + g)(x)$

62. $(f + g)(4)$

63. $(g - f)(x)$

64. $(g - f)(-1)$

65. $(f \cdot g)(-1)$

66. $(f \cdot g)(3)$

67. $(f/g)(1)$

68. $(f/g)(2)$

69. Población femenina De acuerdo con el censo de Estados Unidos, se espera que la población femenina crezca a nivel mundial. La gráfica siguiente muestra la población femenina mundial para años seleccionados de 2002 a 2050.

Fuente: Oficina de censos de Estados Unidos, International Program Center, International Data Base

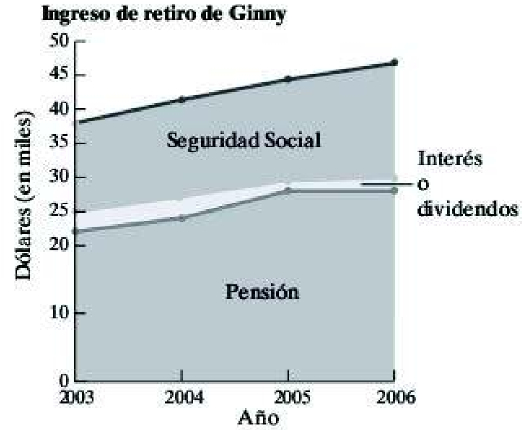
a) Estime la población mundial femenina proyectada para 2050.

b) Estime el número proyectado de mujeres entre 15 y 49 años de edad en 2050.

c) Estime el número de mujeres que se proyecta que haya para 2010 en el grupo de 50 años y mayores.

d) Estime el porcentaje de aumento proyectado de 2002 a 2010, en el número de mujeres de 50 años y mayores.

70. Monto de jubilación Hace poco, Ginny Jennings se jubiló de su trabajo de tiempo completo. La gráfica siguiente muestra el monto de su jubilación para los años de 2003 a 2006.



a) Estime el monto total de la jubilación de Ginny en 2006.

b) Estime el monto de la pensión de Ginny en 2005.

c) Estime el monto por interés y dividendos de Ginny en 2003.

[3.7] *Grafique cada desigualdad.*

71. $y \geq -5$

72. $x < 4$

73. $y \leq 4x - 3$

74. $y < \frac{1}{3}x - 2$

Examen de práctica del capítulo 3

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro**. *Revise el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Grafique $y = -2x + 1$.

2. Grafique $y = \sqrt{x}$.

3. Grafique $y = x^2 - 4$.

4. Grafique $y = |x|$.

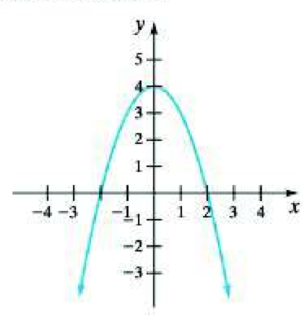
5. Defina *función*.

6. ¿El conjunto siguiente de parejas ordenadas es una función? Explique su respuesta.

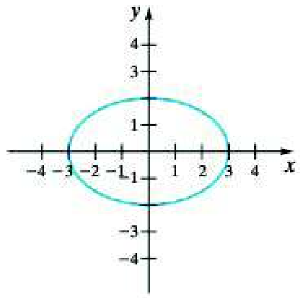
$$\{(3, 1), (-2, 6), (4, 6), (5, 2), (7, 3)\}$$

En los ejercicios 7 y 8, determine si las gráficas siguientes representan funciones. Proporcione el dominio y el rango de la relación o función.

7.



8.



9. Si $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$, determine $f(-2)$.

En los ejercicios 10 y 11, grafique la ecuación usando las intersecciones con los ejes x y y.

10. $-20x + 10y = 40$.

11. $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$.

12. Grafique $f(x) = -3$.

13. Grafique $x = 4$.

14. Gráfica de utilidad La utilidad anual, p, para la compañía editorial Zico en las ventas de un libro en particular, puede estimarse por medio de la función $p(x) = 10.2x - 50{,}000$, donde x es el número de libros producidos y vendidos.

a) Trace una gráfica de utilidad contra libros vendidos hasta 30,000 libros.

b) Utilice la función $p(x)$ para estimar el número de libros que debe venderse para que la compañía no gane ni pierda.

c) Utilice la función $p(x)$ para estimar el número de libros que la compañía debe vender para obtener $100,000 de ganancia.

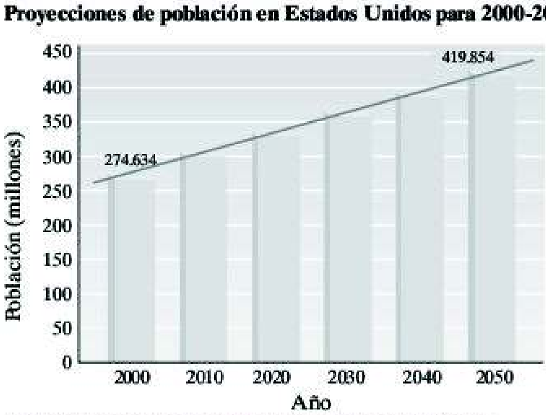
15. Determine la pendiente e intersección con el eje y de la gráfica de la ecuación $4x - 3y = 15$.

16. Escriba la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (4, 5).

17. Determine la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por el punto (6, −5) y es perpendicular a la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 1$.

18. Población de Estados Unidos Determine la función representada por la recta roja en la gráfica, que pueda utilizarse para estimar la población proyectada de Estados Unidos, p, de 2000 a 2050. Sea 2000 el año de referencia, de modo que 2000 está representado por $t = 0$.

Proyecciones de población en Estados Unidos para 2000-2050



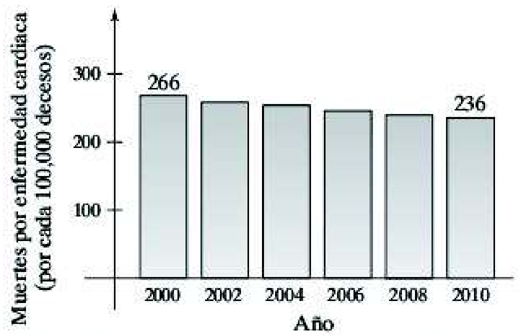
Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, Resumen estadístico de Estados Unidos 2004-2005

19. Determine si las gráficas de las dos ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna. Explique su respuesta.

$$2x - 3y = 12$$
$$4x + 10 = 6y$$

20. Enfermedad cardiaca Los decesos por enfermedades cardiacas ha disminuido de forma aproximadamente lineal. La gráfica de barras siguiente indica el número de muertes debidas a enfermedades cardiacas, por cada 100,000 decesos, en años seleccionados proyectados para 2006 a 2010.

Tasa de muertes por enfermedades cardiacas



Fuente: Departamento de Salud y Servicios Humanos de Estados Unidos

a) Sea r el número de muertes debidas a enfermedades cardiacas por cada 100,000 decesos y sea t los años desde 2000. Escriba una función lineal $r(t)$ que pueda utilizarse para aproximar los datos.

b) Por medio de la función de la parte **a)**, determine el índice de muertes debidas a enfermedades cardiacas en 2006.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe hasta 2020, estime la tasa de muertes debidas a enfermedades cardiacas en 2020.

En los ejercicios del 21 al 23, si $f(x) = 2x^2 - x$ y $g(x) = x - 6$, determine

21. $(f + g)(3)$ **22.** $(f/g)(-1)$

23. $f(a)$

24. Uso de papel La gráfica siguiente muestra el uso de papel en 1995 y el uso de papel proyectado de 1995 a 2015.

a) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en 2010.

b) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en negocios en 2010.

c) Estime el número total de toneladas de papel que se usarán en 2010 en informes, impresión en medios y en el hogar.

25. Grafique $y < 3x - 2$.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del texto. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Para $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 14\}$, determine

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

2. Considere el conjunto $\{-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}\}$. Liste los elementos del conjunto que están en

a) los números naturales.

b) los números reales.

3. Evalúe $10 - \{3[6 - 4(6^2 \div 4)]\}$.

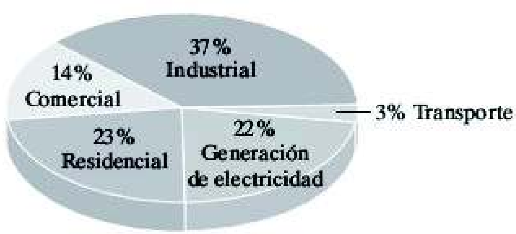
Simplifique.

4. $\left(\dfrac{5x^2}{y^{-3}}\right)^2$

5. $\left(\dfrac{3x^4y^{-2}}{6xy^3}\right)^3$

6. Consumo de gas natural El consumo total de gas natural en 2003 fue 21.8 billones de pies cúbicos (2.18×10^{13}). El diagrama de pastel siguiente muestra el desglose de consumo por sector.

Consumo de gas natural por sector
(2.18×10^{13} pies cúbicos)



(El total es 99% debido a redondeos)

Fuente: Administración de Información Energética

Responda las preguntas siguientes utilizando la notación científica.

a) ¿Cuál fue la cantidad de consumo de gas natural por el sector comercial en 2003?

b) ¿Cuánto más gas natural consumió el sector industrial que el sector de transporte en 2003?

c) Si se espera que el consumo de gas natural crezca en 10% de 2003 a 2006, ¿cuál será la cantidad de consumo de gas natural en 2006?

En los ejercicios 7 y 8, resuelva las ecuaciones.

7. $2(x + 4) - 5 = -3[x - (2x + 1)]$

8. $\dfrac{4}{5} - \dfrac{x}{3} = 10$

9. Simplifique $7x - \{4 - [2(x - 4)] - 5\}$.

10. Despeje $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ de b_1.

11. Soluciones de peróxido de hidrógeno ¿Cuántos galones de solución de peróxido de hidrógeno al 15% deben mezclarse con 10 galones de una solución al 4% de peróxido de hidrógeno para obtener una solución al 10% de peróxido de hidrógeno?

12. Resuelva la desigualdad $4(x - 4) < 8(2x + 3)$.

13. Resuelva la desigualdad $-1 < 3x - 7 < 11$.

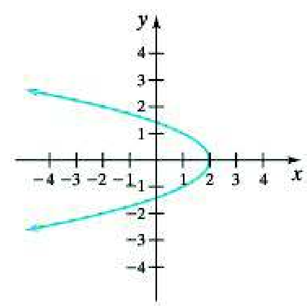
14. Determine el conjunto solución de $|3x + 5| = |2x - 10|$.

15. Determine el conjunto solución de $|2x - 1| \le 3$.

16. Grafique $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

17. a) Determine si la gráfica siguiente representa una función.

b) Determine el dominio y el rango de la gráfica.



18. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(4, -1)$.

19. Determine si las gráficas de las dos ecuaciones dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$2x - 5y = 8$$
$$5x - 2y = 12$$

20. Si $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = 4x - 9$, determine $(f + g)(x)$.