Sistemas de ecuaciones y desigualdades

4

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En este capítulo resolvemos sistemas de ecuaciones lineales mediante los métodos siguientes: graficación, sustitución, método de la suma, usando matrices, determinantes y la regla de Cramer. También resolvemos sistemas de *desigualdades* lineales. A lo largo del capítulo, en especial en la sección 4.3, hay muchas aplicaciones del mundo real. El capítulo trata temas esenciales usados en negocios para considerar las relaciones entre variables implicadas en las operaciones diarias de una empresa.

CON FRECUENCIA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES se utilizan para resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el ejemplo 6 de la página 255 utilizamos un sistema de ecuaciones para determinar cuánto de dos soluciones debe mezclar un químico para obtener una tercera solución con la composición química deseada.

4.1 Resolución de sistemas de ecuaciones con dos variables

1 Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por sustitución.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la suma.

En ocasiones es necesario determinar una solución común a dos o más ecuaciones lineales. Nos referimos a estas ecuaciones como un **sistema de ecuaciones lineales** (también se les denomina ecuaciones lineales simultáneas). Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned}(1)\ y &= x + 5\\ (2)\ y &= 2x + 4\end{aligned}\right\}\quad \text{Sistema de ecuaciones lineales.}$$

Una **solución de un sistema de ecuaciones** es un par ordenado o pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. La única solución del sistema anterior es $(1,6)$.

Verificación en la ecuación (1)		Verificación en la ecuación (2)	
$(1,6)$		$(1,6)$	
$y = x + 5$		$y = 2x + 4$	
$6 \stackrel{?}{=} 1 + 5$		$6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4$	
$6 = 6$	Verdadero	$6 = 6$	Verdadero

El par ordenado $(1,6)$ satisface *ambas* ecuaciones y es la solución del sistema de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones puede tener más de dos ecuaciones. Si un sistema consta de tres ecuaciones con tres variables, como x, y y z, la solución será una **terna ordenada** de la forma (x, y, z). Si la terna ordenada (x, y, z) es una solución del sistema, debe satisfacer las tres ecuaciones del sistema. Los sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas se estudian en la sección 4.2. Los sistemas de ecuaciones pueden tener más de tres variables, pero no los analizaremos en este libro.

1 Resolver gráficamente sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver de manera gráfica un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, grafique ambas ecuaciones del sistema en los mismos ejes. La solución del sistema será el par o pares ordenados comunes a ambas rectas, o el punto de intersección de las rectas del sistema.

Cuando graficamos dos rectas, hay tres situaciones posibles, como se ilustra en la **figura 4.1** siguiente. En la **figura 4.1a**, las rectas 1 y 2 se intersecan exactamente en un punto. Este sistema de ecuaciones tiene *exactamente una solución*. Éste es un ejemplo de un sistema de ecuaciones *consistente*. Un **sistema consistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene una solución.

Las rectas 1 y 2 de la **figura 4.1b** son diferentes pero paralelas. Las rectas no se intersecan, y este sistema de ecuaciones *no tiene solución*. Éste es un ejemplo de un sistema *inconsistente* de ecuaciones. Un **sistema inconsistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

En la **figura 4.1c**, las rectas 1 y 2 en realidad son la misma. En este caso, todo punto de la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución del sistema de ecuaciones. Este sistema tiene *un número infinito de soluciones*. Éste es un ejemplo de un sistema *dependiente* de ecuaciones. En un sistema dependiente de ecuaciones lineales, ambas ecuaciones representan la misma recta. Un **sistema dependiente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones. *Observe que un sistema dependiente también es un sistema consistente, ya que tiene soluciones.*

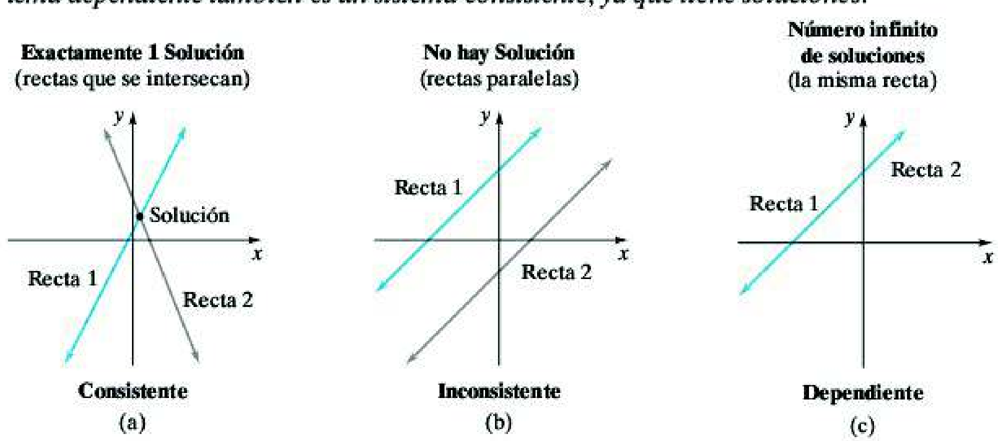


FIGURA 4.1

Podemos determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente, escribiendo cada ecuación en forma pendiente ordenada al origen y comparando las pendientes y las intersecciones con el eje y. Si las pendientes de las rectas son diferentes (**figura 4.1a**), el sistema es consistente. Si las pendientes son las mismas pero las ordenadas al origen y son diferentes (**figura 4.1b**), el sistema es inconsistente, y si las dos pendientes y las dos ordenadas al origen y son las mismas (**figura 4.1c**), el sistema es dependiente.

EJEMPLO 1 ▸ Sin graficar las ecuaciones, determine si el siguiente sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente.

$$3x - 4y = 8$$
$$-9x + 12y = -24$$

Solución Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 8 \\ -4y &= -3x + 8 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -9x + 12y &= -24 \\ 12y &= 9x - 24 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned}$$

Como ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, $\frac{3}{4}$, y la misma ordenada al origen y $(0, -2)$, las ecuaciones representan a la misma recta. Por lo tanto, el sistema es dependiente y existe un número infinito de soluciones.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva en forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = x + 2$$
$$y = -x + 4$$

Solución Grafique ambas ecuaciones en los mismos ejes (**figura 4.2**). La solución es el punto de intersección de las dos rectas $(1, 3)$.

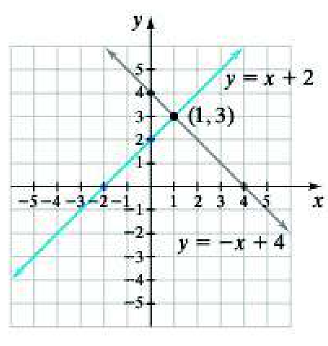


FIGURA 4.2

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

El sistema de ecuaciones del ejemplo 2 podría presentarse en notación de funciones como

$$f(x) = x + 2$$
$$g(x) = -x + 4$$

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el recuadro Cómo utilizar su calculadora graficadora de la página 181, sección 3.3, analizamos el uso de una calculadora graficadora para determinar la intersección de dos gráficas. Ahora utilizamos la información de ese recuadro para resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo Utilice su calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones. Redondee la solución al centésimo más cercano.

$$-2.6x - 5.2y = -15.3$$
$$-8.6x + 3.7y = -12.5$$

Solución Primero despeje a y de cada ecuación.

$$-2.6x - 5.2y = -15.3$$
$$-2.6x = 5.2y - 15.3$$
$$-2.6x + 15.3 = 5.2y$$
$$\frac{-2.6x + 15.3}{5.2} = y$$

$$-8.6x + 3.7y = -12.5$$
$$3.7y = 8.6x - 12.5$$
$$y = \frac{8.6x - 12.5}{3.7}$$

Ahora, haga $Y_1 = \dfrac{-2.6x + 15.3}{5.2}$ y $Y_2 = \dfrac{8.6x - 12.5}{3.7}$. Las gráficas de Y_1 y Y_2 se ilustran en la **figura 4.3**.

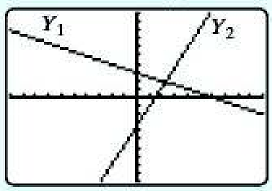


FIGURA 4.3

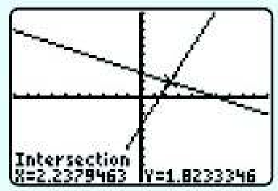


FIGURA 4.4

La **figura 4.4** muestra que la intersección de las dos gráficas ocurre en (2.24, 1.82), redondeado al centésimo más cercano.

EJERCICIOS

Utilice su calculadora graficadora para determinar la solución de cada sistema. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

1. $2x + 3y = 8$
   $-3x + 4y = -5$
2. $5x - 6y = 9$
   $-3x + 5y = 8$
3. $3.4x - 5.6y = 10.2$
   $5.8x + 1.4y = -33.6$
4. $-2.3x + 7.9y = 88.3$
   $-5.3x - 2.7y = -16.5$

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por sustitución

Con frecuencia es difícil determinar una solución exacta del sistema de ecuaciones a partir de su gráfica; una calculadora graficadora podría no dar una respuesta exacta. Cuando se requiere una respuesta exacta, el sistema debe resolverse de manera algebraica, ya sea por el método de sustitución o por el de suma (eliminación) de ecuaciones. Primero analizamos el **método de sustitución**.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución

1. Despeje una variable en cualquier ecuación. (Si es posible, despeje una variable con un coeficiente numérico igual a 1 para no trabajar con fracciones).
2. Sustituya la expresión hallada para la variable del paso 1 *en la otra ecuación*. Con esto obtendrá una ecuación con una sola variable.
3. Resuelva la ecuación obtenida en el paso 2 para determinar el valor de esta variable.
4. Sustituya el valor encontrado en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelva la ecuación para determinar la variable restante.
5. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones mediante sustitución.

$$y = 3x - 5$$
$$y = -4x + 9$$

Solución Como en ambas ya está despejada y, podemos sustituir $3x - 5$ por y en la segunda ecuación y después despejar la variable restante, x.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= -4x + 9 \\ 7x - 5 &= 9 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ahora determinamos y sustituyendo $x = 2$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Utilizaremos la primera ecuación.

$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= 3(2) - 5 \\ y &= 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución del sistema de ecuaciones es $(2, 1)$.

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 4 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$2x + y = 11$$
$$x + 3y = 18$$

Solución Comience por despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones. Puede despejar cualquiera de las variables; sin embargo, si despeja una variable con coeficiente numérico 1, puede evitar trabajar con fracciones. En este sistema, el término y en $2x + y = 11$ y el término x en $x + 3y = 18$ tienen coeficientes numéricos 1.

Despejamos y en $2x + y = 11$.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ y &= -2x + 11 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $-2x + 11$ en vez de y en la *otra ecuación*, $x + 3y = 18$, y despejamos la variable restante, x.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 18 \\ x + 3(\overbrace{-2x + 11}) &= 18 \qquad \text{Sustituya } -2x + 11 \text{ por } y. \\ x - 6x + 33 &= 18 \\ -5x + 33 &= 18 \\ -5x &= -15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Por último, sustituimos $x = 3$ en la ecuación $y = -2x + 11$ y despejamos y.

$$\begin{aligned} y &= -2x + 11 \\ y &= -2(3) + 11 = 5 \end{aligned}$$

La solución es el par ordenado $(3, 5)$. Compruebe esta solución.

Ahora resuelva el ejercicio 41

Si, al resolver un sistema de ecuaciones ya sea por sustitución o por el método de suma, llega a una ecuación falsa, como $5 = 6$ o $0 = 3$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Si obtiene una ecuación que siempre es verdadera, como $6 = 6$ o $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Sugerencia útil

Es frecuente que los estudiantes obtengan bien el valor de una de las variables y se olviden de obtener el valor de la otra. Recuerde que una solución debe tener un valor numérico para cada variable del sistema.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la suma

Un tercer método, y con frecuencia el más sencillo, para resolver un sistema de ecuaciones es el **método de la suma** (o de eliminación). El objetivo de este proceso es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. Tenga presente que su meta inmediata es obtener una ecuación con una sola incógnita.

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con el método de la suma.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 3x - 5y &= 17 \end{aligned}$$

Solución Observe que una ecuación tiene $+5y$ y la otra tiene $-5y$. Sumando las ecuaciones podemos eliminar la variable y y obtener una ecuación con una sola incógnita, x.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 3 \\ \underline{3x - 5y = 17} \\ 5x = 20 \end{array}$$

Ahora obtenemos el valor para la variable que queda, x.

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

Por último, despejamos y sustituyendo 2 en vez de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 2(4) + 5y &= 3 \\ 8 + 5y &= 3 \\ 5y &= -5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que la solución es $(4, -1)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de la suma (o eliminación)

1. En caso necesario, reescriba cada ecuación en la forma general, es decir, de modo que los términos con variables queden del lado izquierdo del signo igual y la constante del lado derecho del signo igual.
2. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante (o constantes) para que al sumar las ecuaciones, la suma contenga sólo una variable.
3. Sume los lados respectivos de las ecuaciones. Con esto se obtiene una sola ecuación con una variable.
4. Despeje la variable en la ecuación obtenida en el paso 3.
5. Sustituya el valor determinado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar el valor de la variable restante.
6. Compruebe su solución en todas las ecuaciones en el sistema.

En el paso 2 del procedimiento, indicamos que puede ser necesario multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante. Para evitar confusión, numeraremos nuestras ecuaciones mediante paréntesis, como (*ec.* 1) o (*ec.* 2).

En el ejemplo 6, resolveremos el mismo sistema resuelto en el ejemplo 4, pero esta vez usaremos el método de la suma.

EJEMPLO 6 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución El objetivo del proceso de suma es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. Para eliminar la variable x, multiplicamos la (ec. 2) por -2 y sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ -2x - 6y &= -36 \quad (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } -2 \end{aligned}$$

Ahora sumamos,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ \underline{-2x - 6y} &= \underline{-36} \\ -5y &= -25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Ahora despejamos x sustituyendo 5 en lugar de y en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 2x + 5 &= 11 \quad \text{Sustituir 5 en lugar de } y. \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución es (3, 5). Observe que podríamos haber eliminado la variable y multiplicando la (ec. 1) por -3 y después sumando.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

A veces ambas ecuaciones deben multiplicarse por números diferentes para eliminar una de las variables. El ejemplo 7 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 7 \quad (ec.\ 1) \\ 3x - 7y &= -3 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Podemos eliminar la variable x multiplicando la (ec. 1) por -3 y la (ec. 2) por 4.

$$\begin{aligned} -12x - 9y &= -21 \quad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -3 \\ \underline{12x - 28y} &= \underline{-12} \quad (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } 4 \\ -37y &= -33 \quad \text{Suma de las ecuaciones.} \\ y &= \frac{33}{37} \end{aligned}$$

Ahora podemos determinar x sustituyendo $\frac{33}{37}$ en lugar de y en una de las ecuaciones originales y resolviendo para x. Si usted realiza esto, verá que, aunque puede hacerlo, resulta ser complicado. Un método más sencillo para obtener el valor de x es regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable y.

$$\begin{aligned} 28x + 21y &= 49 \quad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } 7 \\ \underline{9x - 21y} &= \underline{-9} \quad (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } 3 \\ 37x &= 40 \quad \text{Suma de las ecuaciones.} \\ x &= \frac{40}{37} \end{aligned}$$

La solución es $\left(\frac{40}{37}, \frac{33}{37}\right)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 67

En el ejemplo 7, podría obtenerse la misma solución multiplicando la (ec. 1) por 3 y la (ec. 2) por -4 y después sumando. Inténtelo ahora y verá.

EJEMPLO 8 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente utilizando el método de la suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad &(ec.\ 1) \\ \frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y &= 1 \quad &(ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones tiene fracciones o números decimales, por lo común es mejor *quitar*, o eliminar, las fracciones o decimales. En la (ec. 2), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 18 obtenemos

$$\begin{aligned} 18\left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y\right) &= 18\,(1) \\ 18\left(\frac{1}{18}x\right) + 18\left(\frac{1}{6}y\right) &= 18\,(1) \\ x + 3y &= 18 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Ahora, el sistema de ecuaciones se ha simplificado a

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad &(ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \quad &(ec.\ 3) \end{aligned}$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos en el ejemplo 6. Así, la solución para este sistema es $(3, 5)$, el mismo que se obtuvo en el ejemplo 6.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 9 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente mediante el método de la suma.

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.1y &= 1.1 \quad &(ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \quad &(ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones tiene números decimales, por lo general es mejor *quitar* o eliminar los números decimales. En la (ec. 1), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 10 obtenemos

$$\begin{aligned} 10\,(0.2x) + 10\,(0.1y) &= 10\,(1.1) \\ 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Ahora, el sistema de ecuaciones se ha simplificado a

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad &(ec.\ 3) \\ x + 3y &= 18 \quad &(ec.\ 2) \end{aligned}$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos en el ejemplo 6. Así que la solución es $(3, 5)$, el mismo que se obtuvo en el ejemplo 6.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 10 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de la suma.

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \quad &(ec.\ 1) \\ -2x + 6y &= 1 \quad &(ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Comenzamos multiplicando (ec. 1) por 2.

$$\begin{array}{rcll} 2x - 6y &=& 8 & \text{(ec. 1) Multiplicada por 2} \\ -2x + 6y &=& 1 & \text{(ec. 2)} \\ \hline 0 &=& 9 & \text{Falso} \end{array}$$

Como 0 = 9 es una proposición falsa, este sistema no tiene solución. El sistema es inconsistente y las gráficas de estas ecuaciones son rectas paralelas.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 11 ▶ Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente utilizando el método de la suma.

$$x - \frac{1}{2}y = 2$$
$$y = 2x - 4$$

Solución Primero alineamos los términos x y y del lado izquierdo de la ecuación.

$$x - \frac{1}{2}y = 2 \quad \text{(ec. 1)}$$
$$-2x + y = -4 \quad \text{(ec. 2)}$$

Ahora procedemos como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{array}{rcll} 2x - y &=& 4 & \text{(ec. 1) Multiplicada por 2} \\ -2x + y &=& -4 & \text{(ec. 2)} \\ \hline 0 &=& 0 & \text{Verdadero} \end{array}$$

Como 0 = 0 es verdadero, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Ambas ecuaciones representan la misma recta. Observe que si multiplica ambos lados de la (ec. 1) por 2 obtendrá la (ec. 2).

▶ Ahora resuelva el ejercicio 63

Hemos ilustrado tres métodos que pueden utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales; graficación, sustitución y el método de la suma. Cuando le den un sistema de ecuaciones, ¿cuál método debe utilizar para resolver el sistema? Cuando necesite una solución exacta no es conveniente que utilice la graficación. De los dos métodos algebraicos, el método de la suma puede ser el más sencillo de utilizar si no hay coeficientes numéricos 1 en el sistema. Si una o más de las variables tienen un coeficiente igual a 1, puede utilizar cualquier método. En la sección 4.4, presentaremos un cuarto método, con matrices; y un quinto método, con determinantes, en la sección 4.5.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una solución para un sistema de ecuaciones lineales?
2. ¿Cómo se llama a la solución para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables?
3. ¿Qué es un sistema dependiente de ecuaciones?
4. ¿Qué es un sistema inconsistente de ecuaciones?
5. ¿Qué es un sistema consistente de ecuaciones?
6. Explique cómo determinar, de manera gráfica, la solución de un sistema de ecuaciones.
7. Explique cómo puede determinar, sin graficar o resolver, si el sistema de dos ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente.
8. Cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de la suma (o eliminación), ¿cuál es el objetivo del proceso?
9. Cuando resuelve un sistema lineal por suma, ¿cómo puede decidir si el sistema es dependiente?
10. Cuando resuelve un sistema lineal por suma, ¿cómo puede decidir si el sistema es inconsistente?

Práctica de habilidades

Determine cuáles, si los hay, de los pares ordenados o ternas ordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales.

11. $y = 2x + 4$
$y = 2x - 1$
a) $(0, 4)$
b) $(3, 10)$

12. $3x - 5y = 12$
$y = \frac{3}{4}x - 3$
a) $(4, 0)$ **b)** $(7, 2)$

13. $x + y = 25$
$0.25x + 0.45y = 7.50$
a) $(5, 20)$
b) $(18.75, 6.25)$

14. $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$
$5x - 35 = 15y$
a) $(1, -2)$
b) $(7, 0)$

15. $x + 2y - z = -5$
$2x - y + 2z = 8$
$3x + 3y + 4z = 5$
a) $(3, 1, -2)$
b) $(1, -2, 2)$

16. $4x + y - 3z = 1$
$2x - 2y + 6z = 11$
$-6x + 3y + 12z = -4$
a) $(2, -1, -2)$
b) $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

Escriba cada ecuación en forma pendiente ordenada al origen. Sin graficar las ecuaciones, diga si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. También indique si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

17. $-7x + 3y = 1$
$3y + 12 = -6x$

18. $x - \frac{1}{2}y = 4$
$2x - y = 7$

19. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$4x + 3y = 12$

20. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$2x - 3y = 12$

21. $3x - 3y = 9$
$2x - 2y = -4$

22. $2x = 3y + 4$
$6x - 9y = 12$

23. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
$3x - 2y = -\frac{5}{2}$

24. $x - y = 3$
$\frac{1}{4}x - 2y = -6$

Determine de forma gráfica la solución de cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es inconsistente o dependiente, dígalo.

25. $y = x + 5$
$y = -x + 3$

26. $y = 2x + 8$
$y = -3x - 12$

27. $y = 4x - 1$
$3y = 12x + 9$

28. $x + y = 1$
$3x - y = -5$

29. $2x + 3y = 6$
$4x = -6y + 12$

30. $y = -2x - 1$
$x + 2y = 4$

31. $5x + 3y = 13$
$x = 2$

32. $2x - 5y = 10$
$y = \frac{2}{5}x - 2$

33. $y = -5x + 5$
$y = 2x - 2$

34. $4x - y = 9$
$x - 3y = 16$

35. $x - \frac{1}{2}y = -2$
$2y = 4x - 6$

36. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
$3y = 4x - 18$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones por sustitución.

37. $x + 3y = -1$
$y = x + 1$

38. $3x - 2y = -7$
$y = 2x + 6$

39. $x = 2y + 3$
$y = x$

40. $y = 3x - 16$
$x = y$

41. $a + 3b = 5$
$2a - b = 3$

42. $m + 2n = 4$
$m + \frac{1}{2}n = 4$

43. $5x + 6y = 6.7$
$3x - 2y = 0.1$

44. $x = 0.5y + 1.7$
$10x - y = 1$

45. $a - \frac{1}{2}b = 2$
$b = 2a - 4$

46. $x + 3y = -2$
$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

47. $5x - 2y = -7$
$y = \frac{5}{2}x + 1$

48. $y = \frac{2}{3}x - 1$
$2x - 3y = 5$

49. $5x - 4y = -7$
$x - \frac{3}{5}y = -2$

50. $6s + 3t = 4$
$s = \frac{1}{2}t$

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$
$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$

52. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

53. $x + y = 9$
$x - y = -3$

54. $-x + y = 4$
$x - 2y = 6$

55. $4x - 3y = 1$
$5x + 3y = -10$

56. $2x - 5y = 6$
$-4x + 10y = -1$

57. $10m - 2n = 6$
$-5m + n = -8$

58. $4r - 3s = 2$
$2r + s = 6$

59. $2c - 5d = 1$
$-4c + 10d = 6$

60. $2v - 3w = 8$
$3v - 6w = 1$

61. $7p - 3q = 4$
$2p + 5q = 7$

62. $5s - 3t = 7$
$t = s + 1$

63. $5a - 10b = 15$
$a = 2b + 3$

64. $2x - 7y = 3$
$-5x + 3y = 7$

65. $2x - y = 8$
$3x + y = 6$

66. $5x + 4y = 6$
$2x = -5y - 1$

67. $3x - 4y = 5$
$2x = 5y - 3$

68. $4x + 5y = 3$
$2x - 3y = 4$

69. $0.2x - 0.5y = -0.4$
$-0.3x + 0.4y = -0.1$

70. $0.15x - 0.40y = 0.65$
$0.60x + 0.25y = -1.1$

71. $2.1m - 0.6n = 8.4$
$-1.5m - 0.3n = -6.0$

72. $-0.25x + 0.10y = 1.05$
$-0.40x - 0.625y = -0.675$

73. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}$

74. $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$

75. $\frac{1}{3}x = 4 - \frac{1}{4}y$
$3x = 4y$

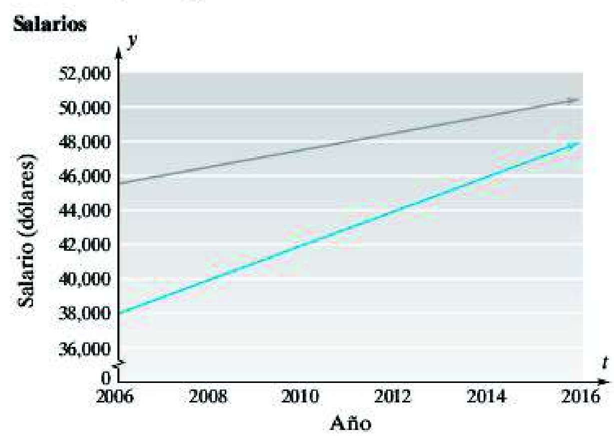
76. $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{2}y$
$x - 3y = \frac{1}{3}$

Resolución de problemas

77. **a)** Escriba un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por sustitución.
b) Explique por qué la sustitución sería el método más fácil de usar.
c) Por sustitución resuelva el sistema.

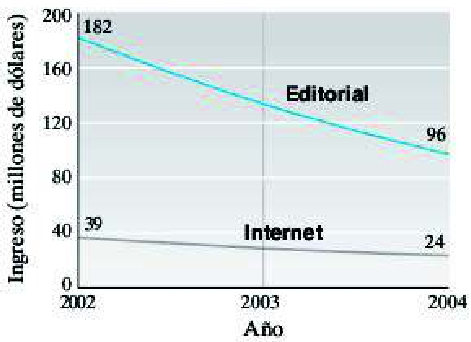
78. **a)** Escriba un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por el método de suma.
b) Explique por qué el método de la suma sería el método más fácil de usar.
c) Resuelva el sistema por el método de la suma.

79. **Salarios** En enero 2006, Mary Jones inició un trabajo nuevo con un salario anual de \$38,000. Su jefe aceptó incrementar su salario en \$1000 cada enero de los años por venir. Su salario está determinado mediante la ecuación $y = 1000t + 38{,}000$, donde t es el número de años desde 2006. (Vea la línea roja en la gráfica). También en enero de 2006, Wynn Nguyen inició un nuevo empleo con un salario anual de \$45,500. Su jefe convino en aumentar su salario en \$500 cada enero en los años siguientes. Su salario está determinado mediante la ecuación $y = 45{,}500 + 500t$, donde t es el número de años desde 2006. (Vea la línea gris en la gráfica). Resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que ambos salarios serán iguales. ¿Cuál será el salario en ese año?



80. **Ingresos de Martha Stewart** La gráfica de la parte superior de la página siguiente muestra el ingreso, en millones de dólares, de las ventas editoriales y de Internet en la compañía Martha Stewart Living Omnimedia para 2002 a 2004.

Ventas de Martha Stewart



Fuente: CSI, Martha Stewart Living Omnimedia Company, *USA Today (3/4/2005)*

La gráfica muestra que las ventas editoriales y las ventas por Internet han descendido aproximadamente en forma lineal. El ingreso, en millones de dólares por ventas editoriales (línea roja) puede aproximarse por $p(t) = -43t + 182$ y las ventas por Internet (línea gris) pueden aproximarse mediante la función $I(t) = -7.5t + 39$, donde t es el número de años desde 2002. Suponiendo que esta tendencia continúe, resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que el ingreso por ventas editoriales y ventas por Internet sean iguales. ¿Cuál será el ingreso en ese año?

81. Explique cómo puede decir por medio de observación que el sistema siguiente es dependiente.

$$2x + 3y = 1$$
$$4x + 6y = 2$$

82. Explique cómo puede decir por medio de observación que el sistema siguiente es inconsistente.

$$-x + 3y = 5$$
$$2x - 6y = -13$$

83. Las soluciones del sistema de ecuaciones lineales incluyen a $(-4, 3)$ y $(-6, 11)$.

a) ¿Cuántas soluciones más tiene el sistema? Explique.

b) Determine la pendiente de la recta que contiene a $(-4, 3)$ y $(-6, 11)$. Obtenga una ecuación de la recta que contenga estos puntos. Luego determine la intersección con el eje y.

c) ¿Esta recta representa una función?

84. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen a $(-5, 1)$ y $(-5, -4)$.

a) ¿Cuántas soluciones más tiene el sistema? Explique.

b) Determine la pendiente de la recta que contiene a $(-5, 1)$ y $(-5, -4)$. Obtenga una ecuación de la recta que contenga estos puntos. ¿Esta gráfica tiene una intersección con el eje y? Explique.

c) ¿Esta recta representa una función?

85. Construya un sistema de ecuaciones que sea dependiente. Explique cómo creó su sistema.

86. Construya un sistema de ecuaciones que sea inconsistente. Explique cómo creó su sistema.

En los ejercicios 87 y 88, **a)** *cree un sistema de ecuaciones lineales que tenga la solución indicada y* **b)** *explique cómo determinó su solución.*

87. $(2, 5)$

88. $(-3, 4)$

89. La solución para el siguiente sistema de ecuaciones es $(2, -3)$. Determine A y B.

$$Ax + 4y = -8$$
$$3x - By = 21$$

90. La solución para el siguiente sistema de ecuaciones es $(-5, 3)$. Determine A y B.

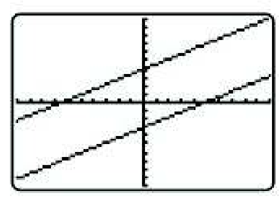
$$3x + Ay = -3$$
$$Bx - 2y = -16$$

91. Si $(2, 6)$ y $(-1, -6)$ son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determine m y b.

92. Si $(3, -5)$ y $(-2, 10)$ son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determine m y b.

93. Suponga que grafica un sistema de dos ecuaciones lineales en su calculadora graficadora, pero sólo una recta se ve en la ventana. ¿Cuáles son dos posibles explicaciones para esto?

94. Suponga que grafica un sistema de ecuaciones lineales en su calculadora graficadora y obtiene lo siguiente.



a) Observando la ventana, ¿puede asegurar que este sistema es inconsistente? Explique.

b) ¿Qué puede hacer en su calculadora graficadora para determinar si el sistema es inconsistente?

Retos

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

95. $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y+4}{3} = 4$

$\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-y}{3}$

96. $\dfrac{5x}{2} + 3y = \dfrac{9}{2} + y$

$\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}y = 6x + 12$

Resuelva cada sistema de ecuaciones. (Sugerencia: $\frac{3}{a} = 3 \cdot \frac{1}{a} = 3x$ *si* $x = \frac{1}{a}$.)

97. $\dfrac{3}{a} + \dfrac{4}{b} = -1$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{6}{b} = 2$

98. $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$

$\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = -3$

Resolviendo para x y y, determine la solución para cada sistema de ecuaciones. En todas las ecuaciones $a \neq 0$ y $b \neq 0$. La solución tendrá las literales a, b o ambas.

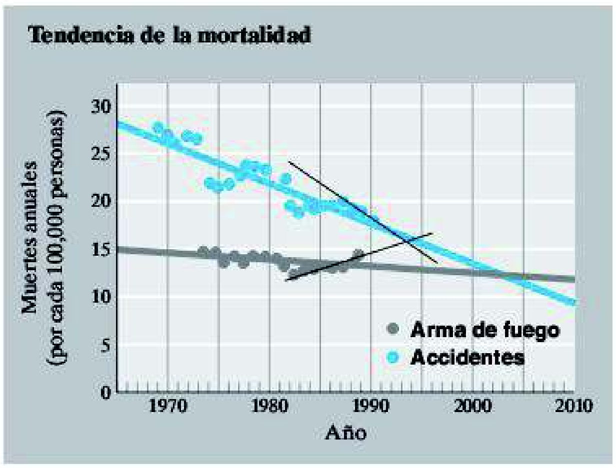
99. $4ax + 3y = 19$
$-ax + y = 4$

100. $ax = 2 - by$
$-ax + 2by - 1 = 0$

Actividad en grupo

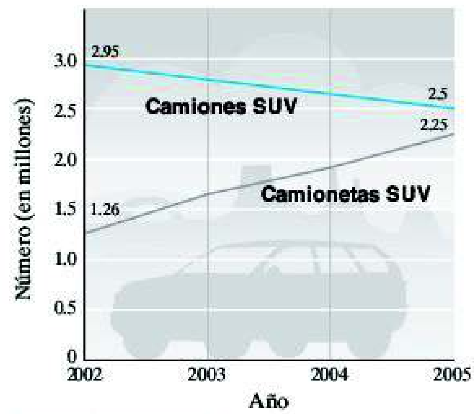
En grupo, analicen y respondan los ejercicios 101 y 102.

101. Tendencia La gráfica siguiente apareció en el *Journal of the American Medical Association* y en *Scientific American*. La línea gris indica la tendencia a largo plazo de las muertes por causa de armas de fuego y la línea en rojo indica la tendencia a largo plazo de las muertes por accidente automovilístico. Las líneas negras delgadas indican las tendencias a corto plazo de las muertes por armas de fuego y por accidentes automovilísticos.



a) Analice la tendencia a largo plazo de las muertes por accidentes automovilísticos.
b) Analice la tendencia a largo plazo de las muertes por causa de arma de fuego.
c) Analice la tendencia a corto plazo de las muertes ocasionadas por accidentes automovilísticos, comparada con la tendencia a largo plazo de las muertes por accidentes automovilísticos.
d) Analice la tendencia a corto plazo de las muertes por armas de fuego comparada con la tendencia a largo plazo en las muertes por armas de fuego.
e) Utilice las tendencias a largo plazo, y estime el momento en que el número de muertes por armas de fuego igualará al número de muertes por accidentes automovilísticos.
f) Repita la parte **e)** utilizando las tendencias a corto plazo.
g) Determine una función, $M(t)$, que puede usarse para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por accidentes automovilísticos de 1965 a 2010.
h) Determine una función, $F(t)$, que pueda usarse para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por armas de fuego de 1965 a 2010.
i) Resuelva el sistema de ecuaciones formado de las partes **g)** y **h)**. ¿La solución coincide con la solución de la parte **e)**? Si no, explique por qué.

102. Ventas de SUV Como lo muestra la gráfica, desde 2002 las ventas de camiones SUV han disminuido de forma casi lineal, mientras que las ventas de camionetas SUV se ha incrementado de forma casi lineal.



Fuente: Ford Motor Company

Utilizaremos la información del capítulo 3 para determinar las ecuaciones lineales que aproximen a ambas curvas de la gráfica.

a) Mediante los valores de 2002 y 2005, determine la ecuación de una línea recta que pueda utilizarse para aproximar las ventas de camiones SUV (curva roja). Utilice el formato de la ecuación $s(t) = mt + b$, donde s es las ventas, en millones, t es el año desde 2002, y b es la venta de 2002.
b) Con los valores de 2002 y 2005, determine la ecuación de la línea recta que pueda utilizarse para aproximar las ventas de camionetas SUV (curva en gris).
c) Resuelva el sistema de ecuaciones, utilizando las ecuaciones que obtuvo en las partes **a)** y **b)**. Redondee los valores al centésimo más cercano.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **103.** Explique la diferencia entre un número racional y uno irracional.

[1.2] **104. a)** ¿Todos los números racionales son números reales?
b) ¿Todos los números irracionales son números reales?

[2.1] **105.** Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}(x - 7) = \frac{3}{4}(2x + 1)$.

[2.2] **106.** Encuentre todos los números tales que $|x - 6| = |6 - x|$.

[2.2] **107.** Evalúe $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando $p = 500$, $r = 0.04$, $n = 2$ y $t = 1$.

[3.5] **108.** ¿La siguiente relación es una función? Explique su respuesta. $\{(-3, 4), (7, 2), (-4, 5), (5, 0), (-3, -1)\}$

[3.6] **109.** Sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 9$. Determine $(f/g)(3)$.

4.2 Resolución de sistemas de ecuaciones con tres variables

1. Resolver sistemas de ecuaciones con tres variables.
2. Aprender la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con tres variables.
3. Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes.

1 Resolver sistemas de ecuaciones con tres variables

La ecuación $2x - 3y + 4z = 8$ es un ejemplo de una ecuación lineal con tres variables. La solución para una ecuación lineal con tres variables es una *terna ordenada* de la forma (x, y, z). Una solución para la ecuación dada es $(1, 2, 3)$. Ahora verifique que $(1, 2, 3)$ es una solución para la ecuación.

Para resolver sistemas ecuaciones lineales con tres variables, podemos usar ya sea el método de sustitución o bien el método de la suma; ambos se analizaron en la sección 4.1.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva el siguiente sistema por sustitución.

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ 3x + 4y &= 7 \\ -2x - 3y + 5z &= 19 \end{aligned}$$

Solución Como sabemos que $x = -3$, sustituimos -3 por x en la ecuación $3x + 4y = 7$ y despejamos a y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3(-3) + 4y &= 7 \\ -9 + 4y &= 7 \\ 4y &= 16 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $x = -3$ y $y = 4$ en la última ecuación y resolvemos para z.

$$\begin{aligned} -2x - 3y + 5z &= 19 \\ -2(-3) - 3(4) + 5z &= 19 \\ 6 - 12 + 5z &= 19 \\ -6 + 5z &= 19 \\ 5z &= 25 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación $x = -3, y = 4, z = 5$. La solución se debe verificar en *las tres* ecuaciones originales.

$x = -3$	$3x + 4y = 7$	$-2x - 3y + 5z = 19$
$-3 = -3$ Verdadero	$3(-3) + 4(4) \stackrel{?}{=} 7$	$-2(-3) - 3(4) + 5(5) \stackrel{?}{=} 19$
	$7 = 7$ Verdadero	$19 = 19$ Verdadero

La solución es la terna ordenada $(-3, 4, 5)$. Recuerde que la terna ordenada enlista primero el valor x, después el valor y y por último el valor z.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 3**

No todo sistema lineal con tres variables puede resolverse por sustitución, de forma tan directa como en el ejemplo 1. Cuando tal sistema no puede resolverse tan fácilmente por sustitución, podemos encontrar la solución por el método de la suma, como ilustra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de la suma.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 && (ec. 1) \\ 2x - 3y + 2z &= -7 && (ec. 2) \\ x + 4y - z &= 10 && (ec. 3) \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema de ecuaciones, debemos obtener primero dos ecuaciones con las mismas dos variables. Hacemos esto eligiendo dos ecuaciones y utilizando el método de la suma para eliminar una de las variables. Por ejemplo, sumando la (ec. 1) y la (ec. 3) eliminamos la variable z. Después utilizamos un par diferente de ecuaciones [ya sea (ec. 1) y (ec. 2) o (ec. 2) y (ec. 3)] y utilizamos el método de la suma para eliminar la *misma* variable que fue eliminada con anterioridad. Si multiplicamos la (ec. 1) por -2 y la sumamos a la (ec. 2), la variable z será eliminada de nuevo. Entonces tendremos dos ecuaciones con sólo dos incógnitas. Comenzamos sumando la (ec. 1) y la (ec. 3).

$$\begin{array}{rll} 3x + 2y + z = & 4 & \text{(ec. 1)} \\ x + 4y - z = & 10 & \text{(ec. 3)} \\ \hline 4x + 6y \quad = & 14 & \text{Suma de las ecuaciones (ec. 4)} \end{array}$$

Ahora utilizamos un conjunto diferente de ecuaciones y eliminamos de nuevo la variable z.

$$\begin{array}{rll} -6x - 4y - 2z = & -8 & \text{(ec. 1) Multiplicada por } -2 \\ 2x - 3y + 2z = & -7 & \text{(ec. 2)} \\ \hline -4x - 7y \quad = & -15 & \text{Suma de las ecuaciones, (ec. 5)} \end{array}$$

Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la (ec. 4) y la (ec. 5). Si sumamos estas dos ecuaciones, eliminaremos la variable x.

$$\begin{array}{rll} 4x + 6y = & 14 & \text{(ec. 4)} \\ -4x - 7y = & -15 & \text{(ec. 5)} \\ \hline -y = & -1 & \text{Suma de las ecuaciones} \\ y = & 1 & \end{array}$$

Luego sustituimos $y = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones con sólo dos variables [(ec. 4) o (ec. 5)] y despejamos x.

$$\begin{array}{rl} 4x + 6y = 14 & \text{(ec. 4)} \\ 4x + 6(1) = 14 & \text{Sustituya 1 por } y \text{ en la (ec. 4).} \\ 4x + 6 = 14 & \\ 4x = 8 & \\ x = 2 & \end{array}$$

Por último, sustituimos $x = 2$ y $y = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales y despejamos z.

$$\begin{array}{rll} 3x + 2y + z = & 4 & \text{(ec. 1)} \\ 3(2) + 2(1) + z = & 4 & \text{Sustituya 2 por } x \text{ y 1 por } y \text{ en la (ec. 1).} \\ 6 + 2 + z = & 4 & \\ 8 + z = & 4 & \\ z = & -4 & \end{array}$$

La solución es la terna ordenada, $(2, 1, -4)$. Compruebe esta solución en *las tres* ecuaciones originales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

En el ejemplo dos elegimos eliminar primero la variable z utilizando las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 3) y después las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 2). Podríamos haber optado por eliminar primero la variable x o la variable y. Por ejemplo, podríamos haber eliminado la variable x multiplicando la (ec. 3) por -2 y después sumándola a la (ec. 2). También podríamos eliminar la variable x multiplicando la (ec. 3) por -3 y después sumándola a la (ec. 1). Resuelva el sistema del ejemplo 2 eliminando primero la variable x.

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \quad &(ec.\ 1)\\ x + 2y &= 14 \quad &(ec.\ 2)\\ x - 5z &= -11 \quad &(ec.\ 3)\end{aligned}$$

Solución La tercera ecuación no contiene a y. Por lo tanto, trabajaremos para obtener otra ecuación que no contenga a y. Para hacerlo, utilizaremos la (ec. 1) y la (ec. 2).

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 4z &= -2 \quad &(ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2}\\ 3x + 6y &= 42 \quad &(ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por 3}\\ \hline 7x + 4z &= 40 \quad &\text{Suma de las ecuaciones, (ec. 4)}\end{aligned}$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con sólo las variables x y z.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad &(ec.\ 4)\\ x - 5z &= -11 \quad &(ec.\ 3)\end{aligned}$$

Eliminemos la variable x.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad &(ec.\ 4)\\ -7x + 35z &= 77 \quad &(ec.\ 3)\ \text{Multiplicada por } -7\\ \hline 39z &= 117 \quad &\text{Suma de las ecuaciones}\\ z &= 3 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para x, utilizando una de las ecuaciones que tienen sólo las variables x y z. Sustituimos 3 por z en la (ec. 3).

$$\begin{aligned} x - 5z &= -11 \quad &(ec.\ 3)\\ x - 5(3) &= -11 \quad &\text{Sustituya 3 por } z \text{ en la (ec. 3).}\\ x - 15 &= -11\\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por último, despejamos y utilizando cualquiera de las ecuaciones originales que tienen a y.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 14 \quad &(ec.\ 2)\\ 4 + 2y &= 14 \quad &\text{Sustituya 4 por } x \text{ en la (ec. 2)}\\ 2y &= 10\\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución es la terna ordenada (4, 5, 3).

Comprobación

(ec. 1)	(ec. 2)	(ec. 3)
$2x - 3y + 2z = -1$	$x + 2y = 14$	$x - 5z = -11$
$2(4) - 3(5) + 2(3) \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 2(5) \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 5(3) \stackrel{?}{=} -11$
$8 - 15 + 6 \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 10 \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 15 \stackrel{?}{=} -11$
$-1 = -1$	$14 = 14$	$-11 = -11$
Verdadero	Verdadero	Verdadero

Ahora resuelva el ejercicio 11

Sugerencia útil

Si una ecuación de un sistema contiene fracciones, elimine las fracciones multiplicando cada término de la ecuación por el mínimo común denominador. Después continúe resolviendo el sistema. Por ejemplo, si una ecuación del sistema es $\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}y + z = \frac{1}{2}$, multiplique ambos lados de la ecuación por 8 para obtener la ecuación equivalente $6x - 5y + 8z = 4$.

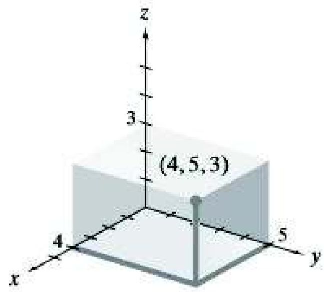


FIGURA 4.5

2 Aprender la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con tres variables

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, podemos determinar su solución de manera gráfica utilizando el sistema de coordenadas cartesianas. Una ecuación lineal con tres variables, x, y y z, puede graficarse en un sistema de coordenadas con tres ejes perpendiculares entre sí (vea la **figura 4.5**).

Un punto trazado en este sistema de tres dimensiones aparecería como un punto en el espacio. Si graficásemos una ecuación como $x + 2y + 3z = 4$, encontraríamos que su gráfica sería un plano, y no una recta. En el ejemplo 3 indicamos que la solución era la terna ordenada (4, 5, 3). Esto significa que los tres planos, uno por cada una de las ecuaciones dadas, se intersecan en el punto (4, 5, 3). En general, la terna ordenada que es la solución para un sistema de ecuaciones con tres variables es el punto en el que los tres planos se intersecan. La **figura 4.5** muestra la localización de este punto de intersección de los tres planos. El dibujo del ejercicio 39 ilustra tres planos que se intersecan en un punto.

3 Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes

En la sección 4.1 analizamos los sistemas de ecuaciones inconsistentes y dependientes. Los sistemas de ecuaciones lineales con tres variables también pueden ser inconsistentes o dependientes. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, si se obtiene una proposición falsa como $3 = 0$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Esto significa que al menos dos de los planos son paralelos, de modo que los tres planos no se pueden intersecar.* (Vea los ejercicios 37 y 38).

Al resolver un sistema lineal con tres variables, si obtiene una proposición verdadera, $0 = 0$, indica que el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Esto puede suceder cuando las tres ecuaciones representan al mismo plano o cuando la intersección de los planos es una recta, como en el dibujo del ejercicio 40. Los ejemplos 4 y 5 ilustran un sistema inconsistente y uno dependiente, respectivamente.

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -3x + 5y + z &= -3 && (ec.\ 1)\\ 6x - 10y - 2z &= 1 && (ec.\ 2)\\ 7x - 4y + 11z &= -6 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos por eliminar la variable x de la (ec. 1) y de la (ec. 2).

$$\begin{aligned} -6x + 10y + 2z &= -6 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2}\\ 6x - 10y - 2z &= 1 && (ec.\ 2)\\ \hline 0 &= -5 && \text{Falso} \end{aligned}$$

Como hemos obtenido la proposición falsa $0 = -5$, este sistema es inconsistente y no tiene solución.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 && (ec.\ 1)\\ x + 2y - z &= 1 && (ec.\ 2)\\ x - 4y + 3z &= 1 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos eliminando la variable x de la (ec. 1) y de la (ec. 2) y después de la (ec. 1) y de la (ec. 3).

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 && (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -1\\ x + 2y - z &= 1 && (ec.\ 2)\\ \hline 3y - 2z &= 0 && \text{Suma de las ecuaciones, (ec. 4)} \end{aligned}$$

* Esto significa que los planos no *son concurrentes* es decir, no existe punto en que coincidan los tres planos, por lo que éstos no se pueden intersecar. (N. del traductor.)

$$\begin{array}{rl} x - y + z = 1 & \text{(ec. 1)} \\ -x + 4y - 3z = -1 & \text{(ec. 3) Multiplicada por } -1 \\ \hline 3y - 2z = 0 & \text{Suma de las ecuaciones (ec. 5)} \end{array}$$

Ahora eliminamos la variable y utilizando la (ec. 4) y la (ec. 5).

$$\begin{array}{rl} -3y + 2z = 0 & \text{(ec. 4) Multiplicada por } -1 \\ 3y - 2z = 0 & \text{(ec. 5)} \\ \hline 0 = 0 & \text{Verdadero} \end{array}$$

Como obtuvimos la proposición verdadera $0 = 0$, este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

De la sección 4.1, recuerde que los sistemas de ecuaciones que son dependientes también son consistentes, ya que tienen una solución.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál será la gráfica de una ecuación tal como $3x - 4y + 2z = 1$?

2. Suponga que la solución para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables es $(1, 3, 5)$. Geométricamente, ¿qué significa esto?

Práctica de habilidades

Resuelva por sustitución.

3. $x = 1$; $2x - y = 4$; $-3x + 2y - 2z = 1$

4. $-x + 3y - 5z = -7$; $2y - z = -1$; $z = 3$

5. $5x - 6z = -17$; $3x - 4y + 5z = -1$; $2z = -6$

6. $2x - 5y = 12$; $-3y = -9$; $2x - 3y + 4z = 8$

7. $x + 2y = 6$; $3y = 9$; $x + 2z = 12$

8. $x - y + 5z = -4$; $3x - 2z = 6$; $4z = 2$

Resuelva utilizando el método de la suma.

9. $x - 2y = -3$; $3x + 2y = 7$; $2x - 4y + z = -6$

10. $x - y + 2z = 1$; $y - 4z = 2$; $-2x + 2y - 5z = 2$

11. $2y + 4z = 2$; $x + y + 2z = -2$; $2x + y + z = 2$

12. $2x + y - 8 = 0$; $3x - 4z = -3$; $2x - 3z = 1$

13. $3p + 2q = 11$; $4q - r = 6$; $6p + 7r = 4$

14. $3s + 5t = -12$; $2t - 2u = 2$; $-s + 6u = -2$

15. $p + q + r = 4$; $p - 2q - r = 1$; $2p - q - 2r = -1$

16. $x - 2y + 3z = -7$; $2x - y - z = 7$; $-4x + 3y + 2z = -14$

17. $2x - 2y + 3z = 5$; $2x + y - 2z = -1$; $4x - y - 3z = 0$

18. $2x - y - 2z = 3$; $x - 3y - 4z = 2$; $x + y + 2z = -1$

19. $r - 2s + t = 2$; $2r + 3s - t = -3$; $2r - s - 2t = 1$

20. $3a - 3b + 4c = -1$; $a - 2b + 2c = 2$; $2a - 2b - c = 3$

21. $2a + 2b - c = 2$
$3a + 4b + c = -4$
$5a - 2b - 3c = 5$

22. $x - 2y + 2z = 3$
$2x - 3y + 2z = 5$
$x + y + 6z = -2$

23. $-x + 3y + z = 0$
$-2x + 4y - z = 0$
$3x - y + 2z = 0$

24. $x + y + z = 0$
$-x - y + z = 0$
$-x + y + z = 0$

25. $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -2$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1$

26. $\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}x + y + z = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{3}{2}$

27. $x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = -2$
$\frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}x + y - \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}$

28. $\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + z = 2$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = \frac{17}{6}$
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z = -\frac{5}{6}$

29. $0.2x + 0.3y + 0.3z = 1.1$
$0.4x - 0.2y + 0.1z = 0.4$
$-0.1x - 0.1y + 0.3z = 0.4$

30. $0.6x - 0.4y + 0.2z = 2.2$
$-0.1x - 0.2y + 0.3z = 0.9$
$-0.2x - 0.1y - 0.3z = -1.2$

Determine si los siguientes sistemas son inconsistentes, dependientes o ninguno de éstos.

31. $2x + y + 2z = 1$
$x - 2y - z = 0$
$3x - y + z = 2$

32. $2p - 4q + 6r = 8$
$-p + 2q - 3r = 6$
$3p + 4q + 5r = 8$

33. $x - 4y - 3z = -1$
$-3x + 12y + 9z = 3$
$2x - 10y - 7z = 5$

34. $5a - 4b + 2c = 5$
$-10a + 8b - 4c = -10$
$-7a - 4b + c = 7$

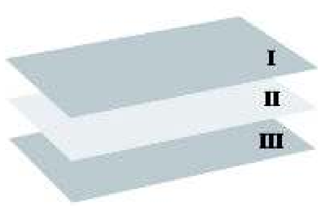
35. $x + 3y + 2z = 6$
$x - 2y - z = 8$
$-3x - 9y - 6z = -7$

36. $2x - 2y + 4z = 2$
$-3x + y = -9$
$2x - y + z = 5$

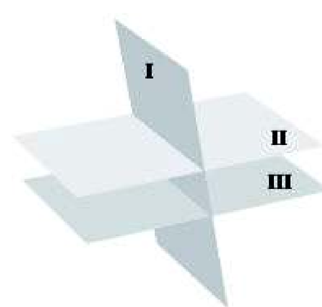
Resolución de problemas

Una ecuación de tres variables, x, y y z, representa un plano. Considere un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres variables. Responda las preguntas siguientes.

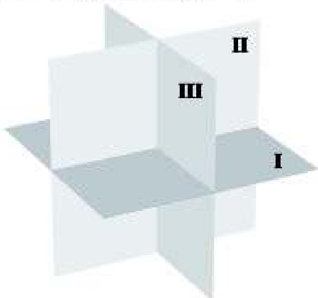
37. Si los tres planos son paralelos entre sí, como lo ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



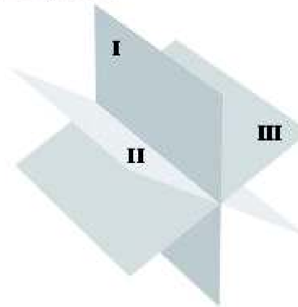
38. Si dos de los planos son paralelos entre sí y el tercer plano interseca cada uno de los otros dos planos, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



39. Si los tres planos son como ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explique su respuesta.



40. Si los tres planos son como ilustra la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común los tres planos? ¿El sistema es dependiente? Explique su respuesta.



41. ¿Es posible para un sistema de ecuaciones lineales con tres variables tener exactamente

a) cero soluciones,

b) una solución,

c) dos soluciones? Explique su respuesta.

42. En un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, si las gráficas de dos ecuaciones son planos paralelos, es posible que el sistema sea

a) consistente,

b) dependiente,

c) inconsistente? Explique su respuesta.

43. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 1$ son $(-1, 2, -1)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, -2, 2)$. Determine los valores de A, B y C y escriba la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

44. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 14$ son $(3, -1, 2)$, $(2, -2, 1)$ y $(-5, 3, -24)$. Determine los valores de A, B y C y escriba la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

En los ejercicios 45 y 46, escriba un sistema de ecuaciones lineales con tres variables que tenga la solución dada. Explique cómo determinó su respuesta.

45. $(3, 1, 6)$

46. $(-2, 5, 3)$

47. a) Determine los valores de a, b y c tales que los puntos $(1, -1)$, $(-1, -5)$ y $(3, 11)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determine la ecuación cuadrática cuya gráfica pasa por los tres puntos indicados. Explique cómo determinó su respuesta.

48. a) Determine los valores de a, b y c tales que los puntos $(1, 7)$, $(-2, -5)$ y $(3, 5)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determine la ecuación cuadrática cuya gráfica pasa a través de los tres puntos indicados. Explique cómo determinó su respuesta.

Retos

Determine la solución para los sistemas de ecuaciones siguientes.

49.
$$\begin{aligned} 3p + 4q &= 11 \\ 2p + r + s &= 9 \\ q - s &= -2 \\ p + 2q - r &= 2 \end{aligned}$$

50.
$$\begin{aligned} 3a + 2b - c &= 0 \\ 2a + 2c + d &= 5 \\ a + 2b - d &= -2 \\ 2a - b + c + d &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **51. Esquí a campo traviesa** Margie Steiner empieza a esquiar por un camino a tres millas por hora. Diez minutos después $\left(\frac{1}{6}\text{horas}\right)$, su esposo, David, comienza a esquiar por el mismo camino a cinco millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después de que David comienza a esquiar alcanzará a Margie?

b) ¿A qué distancia desde el punto inicial se encontrarán?

[2.6] *Determine cada conjunto solución.*

52. $\left|4 - \frac{2x}{3}\right| > 5$

53. $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| + 1 < 7$

54. $\left|3x + \frac{1}{5}\right| = -5$

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación.

2 Utilizar sistemas con tres variables para resolver aplicaciones.

FIGURA 4.6

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

Muchas de las aplicaciones que se resolvieron en capítulos anteriores usando una sola variable pueden resolverse ahora usando dos variables. A continuación se presentan algunos ejemplos que muestran cómo pueden describirse las aplicaciones mediante sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 1 ▸ **Cambio en la fuerza laboral** La gráfica en la **figura 4.6**, indica que el porcentaje de hombres en la fuerza laboral está disminuyendo de manera constante mientras que el porcentaje de mujeres está aumentando. La función $m(t) = -0.25t + 85.4$, donde t = años desde 1955, puede usarse para estimar el porcentaje de hombres en la fuerza laboral, y la función $w(t) = 0.52t + 35.7$ puede usarse para estimar el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral. Si esta tendencia continúa, determine cuándo el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral será igual al porcentaje de hombres.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Considere las dos funciones dadas anteriormente como el sistema de ecuaciones. Para determinar cuándo el porcentaje de mujeres será igual al porcentaje de hombres, podemos establecer las dos funciones iguales una a la otra y resolver para el tiempo, t.

Realice los cálculos porcentaje de mujeres = porcentaje de hombres

$$\begin{aligned} 0.52t + 35.7 &= -0.25t + 85.4 \\ 0.77t &= 49.7 \\ t &\approx 64.5 \end{aligned}$$

Responda Si esta tendencia continúa, el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral será igual al porcentaje de hombres aproximadamente 64.5 años a partir de 1955. Como $1955 + 64.5 = 2019.5$, los porcentajes serán iguales en 2019.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 2 ▸ **Área territorial** El área territorial combinada de Grenada y Guam es de 890 kilómetros cuadrados. El área de Guam es 200 km^2 mayor que el área de Grenada. Determine el área territorial de Guam y la de Grenada.

Solución **Entienda el problema** Necesitamos determinar el área territorial de Guam y la de Grenada.

Traduzca Sea a = área territorial de Guam
b = área territorial de Grenada.

Uruano Beach, Guam

Como el área total de Grenada y Guam es de 890 km^2, la primera ecuación es

$$a + b = 890$$

Como el área de Guam es 200 km^2 mayor que el área de Grenada, la segunda ecuación es

$$a = b + 200$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} a + b &= 890 \quad \text{(ec. 1)} \\ a &= b + 200 \quad \text{(ec. 2)} \end{aligned}$$

Realice los cálculos Utilizaremos el método de sustitución, analizado en la sección 4.1, para resolver el sistema de ecuaciones.

Mediante la (ec. 2), sustituimos $b + 200$ en lugar de a en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} a + b &= 890 && \text{Primera ecuación} \\ (b + 200) + b &= 890 && \text{Sustituya } b + 200 \text{ en lugar de } a. \\ 2b + 200 &= 890 && \text{Simplifique.} \\ 2b &= 690 && \text{Reste 200 de ambos lados.} \\ b &= 345 && \text{Divida ambos lados entre 2.} \end{aligned}$$

Así, $b = 345$. Para determinar el valor de a, sustituya 345 por b en la (ec. 2).

$$\begin{aligned} a &= b + 200 \\ a &= 345 + 200 \\ &= 545 \end{aligned}$$

Responda El área territorial de Guam es de 545 km^2 y el área territorial de Grenada es de 345 km^2.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 1

EJEMPLO 3 ▸ Velocidad de una canoa Los Burnhams viajan en canoa en el río Suwannee. Viajan a una velocidad promedio de 4.75 millas por hora cuando reman con la corriente y 2.25 millas por hora cuando reman en contra de la corriente. Determine la velocidad de la canoa en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

Solución **Entienda el problema** Cuando viajan a favor de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *más* la velocidad de la corriente. Cuando viajan en contra de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *menos* la velocidad de la corriente.

Traduzca Sea s = velocidad de la canoa en aguas tranquilas.
c = velocidad de la corriente.

El sistema de ecuaciones es:

velocidad de la canoa viajando con la corriente: $s + c = 4.75$
velocidad de la canoa viajando en contra de la corriente: $s - c = 2.25$

Realice los cálculos Usaremos el método de suma, como se analizó en la sección 4.1, para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ \underline{s - c} &\underline{= 2.25} \\ 2s \qquad &= 7.00 \\ s &= 3.5 \end{aligned}$$

La velocidad de la canoa en aguas tranquilas es 3.5 millas por hora. Ahora determinamos la velocidad de la corriente.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ 3.5 + c &= 4.75 \\ c &= 1.25 \end{aligned}$$

Responda La velocidad de la corriente es de 1.25 millas por hora y la velocidad de la canoa en aguas tranquilas es de 3.5 millas por hora.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 4 ▸ Salario Yamil Bermudez, un vendedor de aparatos Hancock, recibe un salario semanal más una comisión, que es un porcentaje de sus ventas. Una semana, por ventas de \$3000, su paga total fue de \$850. La semana siguiente, por ventas de \$4000, su pago total fue de \$1000. Determine su salario semanal y su porcentaje de comisión.

Solución **Entienda el problema** El sueldo de Yamil consiste en su salario semanal más la comisión. Se nos da información acerca de dos semanas específicas que podemos usar para determinar su salario semanal y su porcentaje de comisión.

Traduzca Sea s = su salario semanal
r = su porcentaje de comisión.

En la semana uno, su comisión sobre \$3000 es $3000r$ y en la semana 2 su comisión sobre \$4000 es $4000r$. Por lo tanto el sistema de ecuaciones es

salario + comisión = sueldo

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Primera semana} & s + 3000r = 850 \\ \text{Segunda semana} & s + 4000r = 1000 \end{array}\right\} \text{Sistema de ecuaciones}$$

Realice los cálculos

$$\begin{array}{rcll} -s - 3000r &=& -850 & \text{Primera semana multiplicada por } -1 \\ s + 4000r &=& 1000 & \text{Segunda semana} \\ \hline 1000r &=& 150 & \text{Suma de ecuaciones} \end{array}$$

$$r = \frac{150}{1000}$$
$$r = 0.15$$

La comisión de Yamil es 15% de sus ventas. Ahora determinaremos su salario semanal, sustituyendo **0.15** por r en cualquier ecuación.

$$s + 3000r = 850$$
$$s + 3000(0.15) = 850 \quad \text{Sustituya 0.15 por } r \text{ en la ecuación de la primera semana.}$$
$$s + 450 = 850$$
$$s = 400$$

Responda El sueldo semanal de Yamil de \$400 y su porcentaje de comisión es de 15%.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 5 ▸ **Paseo a caballo** Ben Campbell sale de su rancho montando su caballo a 5 millas por hora. Media hora más tarde, Joe Campbell sale del mismo rancho y se dirige por la misma ruta en su caballo a ocho millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo tardará, desde que sale Joe, en alcanzar a Ben?
b) Cuando Joe alcanza a Ben, ¿a qué distancia del rancho estarán?

Solución **a) Entienda el problema** Cuando Joe alcanza a Ben, ambos habrán recorrido la misma distancia. Joe habrá cubierto la distancia en $\frac{1}{2}$ hora menos, ya que él partió $\frac{1}{2}$ hora después que Ben. Para resolver este problema, usaremos la fórmula distancia = velocidad · tiempo.

Traduzca Sea b = tiempo recorrido por Ben
j = tiempo recorrido por Joe

Construiremos una tabla para organizar la información dada.

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Ben	5	b	$5b$
Joe	8	j	$8j$

Tanto Ben como Joe cubren la misma distancia, escribimos

distancia de Ben = distancia de Joe

$$5b = 8j$$

Nuestra segunda ecuación proviene del hecho que Joe está viajando $\frac{1}{2}$ hora menos que Ben. Por lo tanto, $j = b - \frac{1}{2}$. Así, nuestro sistema de ecuaciones es:

$$5b = 8j$$
$$j = b - \frac{1}{2}$$

Realice los cálculos Resolveremos este sistema de ecuaciones usando sustitución. Como $j = b - \frac{1}{2}$, sustituimos $b - \frac{1}{2}$ por j en la primera ecuación y resolvemos para b.

$$\begin{aligned} 5b &= 8j \\ 5b &= 8\left(b - \frac{1}{2}\right) \\ 5b &= 8b - 4 \\ -3b &= -4 \\ b &= \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por consiguiente, el tiempo que Ben ha estado viajando es $1\frac{1}{3}$ horas. Para obtener el tiempo que Joe ha viajado, restaremos $\frac{1}{2}$ hora del tiempo de Ben.

$$\begin{aligned} j &= b - \frac{1}{2} \\ j &= 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ j &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Responda Joe alcanzará a Ben $\frac{5}{6}$ de una hora (o 50 minutos) después de que Joe salga del rancho.

b) Puede utilizar ya sea la distancia de Ben o la de Joe para determinar la distancia recorrida desde el rancho. Utilizaremos la distancia de Joe.

$$d = 8j = 8\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{1} \cdot \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Así, Joe alcanzará a Ben cuando estén a $6\frac{2}{3}$ millas del rancho.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 6 ▸ Mezcla de soluciones Chung Song, un químico de Johnson and Johnson, desea crear un nuevo limpiador doméstico que contenga 30% de fosfato trisódico (TSP). Chung necesita mezclar una solución al 16% de TSP con una solución al 72% de TSP para obtener 6 litros de una solución al 30% de TSP. ¿Cuántos litros de la solución al 16% y de la solución al 72% necesita mezclar?

Solución **Entienda el problema** Para resolver este problema usamos el hecho de que la cantidad de TSP en una solución se determina multiplicando el porcentaje de concentración de la solución por el número de litros (el volumen) de la solución. Chung necesita mezclar una solución al 16% con una solución al 72% para obtener 6 litros de una solución cuya concentración, 30%, esté entre las concentraciones de las dos soluciones que serán mezcladas.

Traduzca Sea x = número de litros de la solución al 16%
y = número de litros de la solución al 72%

Dibujaremos un diagrama (**figura 4.7** de la página 256) y después haremos una tabla que nos ayude a analizar el problema.

FIGURA 4.7

Solución	Concentración de la solución	Número de litros	Cantidad de TSP
solución al 16%	0.16	x	$0.16x$
solución al 72%	0.72	y	$0.72y$
Mezcla	0.30	6	0.30(6)

Como la suma de los volúmenes de la solución al 16% y la solución al 72% es de 6 litros, nuestra primera ecuación es

$$x + y = 6$$

La segunda ecuación viene del hecho de que se mezclan las soluciones.

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en la}\\ \text{solución al 16\%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en la}\\ \text{solución al 72\%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.16x \qquad + \qquad 0.72y \qquad = \qquad 0.30(6)$$

Por lo que, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 0.16x + 0.72y &= 0.30(6) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Al despejar y en $x + y = 6$, obtenemos $\mathbf{y = -x + 6}$. Al sustituir $-x + 6$ en vez de y en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 0.16x + 0.72y &= 0.30(6) \\ 0.16x + 0.72(-x + 6) &= 0.30(6) \\ 0.16x - 0.72x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x &= -2.52 \\ x &= \frac{-2.52}{-0.56} = 4.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Chung debe utilizar 4.5 litros de la solución al 16%. Como las dos soluciones deben sumar 6 litros, debe utilizar $6 - 4.5$ o 1.5 litros de solución al 72%.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

En el ejemplo 6, la ecuación $0.16x + 0.72y = 0.30(6)$ podría simplificarse multiplicando ambos lados de la ecuación por 100. Esto daría la ecuación $16x + 72y = 30(6)$ o $16x + 72y = 180$. Entonces el sistema de ecuaciones sería $x + y = 6$ y $16x + 72y = 180$. Si resuelve este sistema, debe obtener la misma solución. Inténtelo y verá.

2 Utilizar sistemas con tres variables para resolver aplicaciones

Ahora veamos algunas aplicaciones que implican el uso de ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 7 ▶ **Préstamos bancarios** Tiny Tots Toys debe pedir prestados $25,000 para costear una ampliación. No puede obtener todo el dinero prestado de un único banco, así que pide tres préstamos a tres bancos diferentes. El primero cobra el 8% de interés. En el segundo banco pide prestados $2000 más que la mitad de la cantidad solicitada al primer banco. La tasa de interés del segundo banco es del 10%. El resto de los $25,000 lo presta un tercer banco, donde Tiny Tots paga 9% de interés. El interés anual total que paga Tiny Tots Toys por el préstamo de los tres bancos es de $2220. ¿Cuánto dinero pidió prestado a cada tasa?

Solución **Entienda el problema** Nos piden determinar cuánto se pide prestado a cada una de las tres tasas diferentes. Por lo que este problema tendrá tres variables, una para cada monto que se pidió prestado. Como el problema tendrá tres variables, necesitaremos determinar tres ecuaciones para usar en nuestro sistema de ecuaciones.

Traduzca Sea x = cantidad prestada por el primer banco
y = cantidad prestada por el segundo banco
z = cantidad prestada por el tercer banco

Como la cantidad total prestada es de $25,000, sabemos que

$$x + y + z = 25{,}000 \quad \text{La cantidad total prestada es \$25,000}$$

En el segundo banco, Tiny Tots Toys pidió prestado $2000 más que la mitad del dinero solicitado al primer banco. Por lo tanto, la segunda ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x + 2000 \quad \text{El segundo, } y\text{, es \$2000 más que } \frac{1}{2} \text{ del primero, } x.$$

Nuestra última ecuación proviene del hecho de que el interés anual total cobrado por los tres bancos es de $2220. El interés por cada banco se determina multiplicando la tasa de interés por la cantidad prestada.

$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2220 \quad \text{El interés total es \$2220.}$$

Así, nuestro sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (1)\\ y &= \frac{1}{2}x + 2000 && (2)\\ 0.08x + 0.10y + 0.09z &= 2220 && (3) \end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación (2) pueden multiplicarse por 2 para eliminar las fracciones.

$$\begin{aligned} 2(y) &= 2\left(\frac{1}{2}x + 2000\right) \\ 2y &= x + 4000 && \text{Propiedad distributiva} \\ -x + 2y &= 4000 && \text{Restar } x \text{ de ambos lados.} \end{aligned}$$

Podemos eliminar los decimales de la ecuación (3) multiplicando ambos lados de la ecuación por 100 para obtener

$$8x + 10y + 9z = 222{,}000$$

Así que, nuestro sistema de ecuaciones simplificado es

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (\text{ec. } 1)\\ -x + 2y &= 4000 && (\text{ec. } 2)\\ 8x + 10y + 9z &= 222{,}000 && (\text{ec. } 3) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Existen varias formas de resolver este sistema. Utilizamos la (ec. 1) y la (ec. 3) para eliminar la variable z.

$$\begin{array}{rcll} -9x - 9y - 9z &=& -225{,}000 & \text{(ec. 1) Multiplicada por } -9 \\ 8x + 10y + 9z &=& 222{,}000 & \text{(ec. 3)} \\ \hline -x + y &=& -3{,}000 & \text{Suma de las ecuaciones (ec. 4)} \end{array}$$

Ahora usamos la (ec. 2) y la (ec. 4) para eliminar la variable x y despejar y.

$$\begin{array}{rcll} x - 2y &=& -4000 & \text{(ec. 2) Multiplicada por } -1 \\ -x + y &=& -3000 & \text{(ec. 4)} \\ \hline -y &=& -7000 & \text{Suma de las ecuaciones} \\ y &=& 7000 & \end{array}$$

Ahora que sabemos el valor de y, podemos obtener el valor para x.

$$\begin{array}{rcll} -x + 2y &=& 4000 & \text{(ec. 2)} \\ -x + 2(7000) &=& 4000 & \text{Sustituya 7000 por } y \text{ en la (ec. 2).} \\ -x + 14{,}000 &=& 4000 & \\ -x &=& -10{,}000 & \\ x &=& 10{,}000 & \end{array}$$

Por último, despejamos z.

$$\begin{array}{rcll} x + y + z &=& 25{,}000 & \text{(ec. 1)} \\ 10{,}000 + 7000 + z &=& 25{,}000 & \\ 17{,}000 + z &=& 25{,}000 & \\ z &=& 8000 & \end{array}$$

Responda Tiny Tots Toys pidió prestados \$10,000 al 8%, \$7000 al 10% y \$8000 al 9% de interés.

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 8 **Botes inflables** Hobson, Inc., tiene una pequeña planta que fabrica tres tipos de botes inflables: para una, dos y cuatro personas. Cada bote requiere el servicio de tres departamentos: corte, ensamblaje y empaque. Los departamentos de corte, ensamblaje y empaque pueden utilizar un total de 380, 330 y 120 horas-persona por semana, respectivamente. El tiempo requerido para cada bote y departamento aparece en la tabla siguiente. Determine cuántos botes de cada tipo deben producirse cada semana para que la planta opere a toda su capacidad.

	Tiempo (hora-persona) por bote		
Departamento	**Bote para una persona**	**Bote para dos personas**	**Bote para tres personas**
Corte	0.6	1.0	1.5
Ensamblaje	0.6	0.9	1.2
Empaque	0.2	0.3	0.5

Solución Entienda el problema Nos dicen que se producen tres tipos diferentes de botes y nos piden determinar el número de cada uno de los tipos producidos. Como este problema incluye tres cantidades por determinar, el sistema tendrá tres ecuaciones con tres variables.

Traduzca Usaremos la información dada en la tabla.

Sea x = el número de botes para una persona

y = número de botes para dos personas

z = número de botes para cuatro personas

El número total de horas de corte para los tres tipos de botes debe ser igual a 380 horas-persona.

$$0.6x + 1.0y + 1.5z = 380$$

El número total de horas de ensamblaje debe ser igual a 330 horas-persona.

$$0.6x + 0.9y + 1.2z = 330$$

El número total de horas de empaque debe ser igual a 120 horas-persona.

$$0.2x + 0.3y + 0.5z = 120$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 0.6x + 1.0y + 1.5z &= 380 \\ 0.6x + 0.9y + 1.2z &= 330 \\ 0.2x + 0.3y + 0.5z &= 120 \end{aligned}$$

Al multiplicar cada ecuación del sistema por 10 se eliminarán los números decimales y tenemos un sistema simplificado de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 \quad &(ec.\ 1) \\ 6x + 9y + 12z &= 3300 \quad &(ec.\ 2) \\ 2x + 3y + 5z &= 1200 \quad &(ec.\ 3) \end{aligned}$$

Realice los cálculos Primero eliminamos la variable x utilizando las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 2) y después las ecuaciones (ec. 1) y (ec. 3).

$$\begin{array}{rcll} 6x + 10y + 15z &=& 3800 & (ec.\ 1) \\ -6x - 9y - 12z &=& -3300 & (ec.\ 2) \quad \text{Multiplicada por } -1 \\ \hline y + 3z &=& 500 & \text{Suma de las ecuaciones } (ec.\ 4) \\ 6x + 10y + 15z &=& 3800 & (ec.\ 1) \\ -6x - 9y - 15z &=& -3600 & (ec.\ 3) \quad \text{No aplicada por } -3 \\ \hline y &=& 200 & \text{Suma de las ecuaciones } (ec.\ 5) \end{array}$$

Observe que al sumar las dos últimas ecuaciones, las variables x y z se eliminaron al mismo tiempo. Ahora despejamos z.

$$\begin{aligned} y + 3z &= 500 \quad &(ec.\ 4) \\ 200 + 3z &= 500 \quad &\text{Sustituya 200 por } y. \\ 3z &= 300 \\ z &= 100 \end{aligned}$$

Por último, determinamos x.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 \quad (ec.\ 1) \\ 6x + 10(200) + 15(100) &= 3800 \\ 6x + 2000 + 1500 &= 3800 \\ 6x + 3500 &= 3800 \\ 6x &= 300 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Responda Hobson debe producir 50 botes para una persona, 200 botes para dos personas y 100 botes para cuatro personas por semana.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.3

MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades/Resolución de problemas

1. **Área territorial** El área territorial combinada de los países Georgia y de Irlanda es de 39,973 km^2. Irlanda es 573 km^2 mayor. Determine el área territorial de cada país.

Acantilados de Moher, Irlanda

2. **Triunfos en Daytona** Al escribir estas líneas, Richard Petty había ganado la carrera de 500 millas de Daytona el mayor número de veces y Dale Yarborough era el segundo mayor ganador de esa carrera. El número de triunfos de Petry es uno menos que el doble del número de triunfos de Yarborough. El número total de triunfos de los dos pilotos es 11. Determine el número de triunfos de cada uno de ellos.

3. **Contenido de grasa** Un nutriólogo determinó que una orden grande de papas fritas en McDonald's tiene más grasa que su hamburguesa de un cuarto de libra (quarter-pound). Las papas fritas tienen cuatro gramos más que tres veces la cantidad de grasa en la hamburguesa. La diferencia de la grasa que contienen las papas fritas y la hamburguesa es de 46 gramos. Determine el contenido de grasa de la hamburguesa y de las papas fritas.

4. **Parques temáticos** Los dos parques temáticos más visitados en Estados Unidos en 2004 fueron el Reino Mágico de Walt Disney en Florida y Disneylandia en California. El número total de visitantes a estos parques fue de 28.4 millones de personas. El número de personas que visitaron el Reino Mágico fue 1.8 millones más que el número de personas que visitaron Disneylandia. ¿Cuántas personas visitaron cada uno de estos parques en 2001? *Fuente:* www.coastergrotto.com

5. **Puesto de hot dogs** En el puesto de hot dogs del Gran Al, 2 hot dogs y 3 refrescos cuestan \$7. El costo de 4 hot dogs y 2 refrescos es de \$10. Determine el costo de un hot dog y el costo de un refresco.

6. **Agua y pretzel** En un juego de fútbol profesional, el costo de dos botellas de agua y 3 pretzels es \$16.50. El costo de 4 botellas de agua y de pretzel es \$15.50. Determine el costo de una botella de agua y el costo de un pretzel.

7. **Cámaras digitales** Ashley Dawn acaba de comprar una nueva cámara digital, una tarjeta de memoria de 128 megabytes (MB) y una tarjeta de memoria de 512 MB. La tarjeta de 512 MB puede almacenar cuatro veces más fotos que la tarjeta de 128 MB. Juntas las dos tarjetas de memoria pueden almacenar 360 fotos (de óptima calidad). Determine cuántas fotos puede almacenar cada una de las cámaras.

8. **Impresoras de fotografías** En la revista del *Consumidor* de julio de 2005, apareció un reportaje sobre impresoras de fotografías que comparaban el costo de imprimirlas en cada una de las impresoras. La más cara de las impresoras de fotos de 4×6 fue la Olympus P-5100. La menos cara fue la Epson Picture Mate. La impresión de una foto en ambas impresoras costaría \$0.80. El costo de imprimir una foto en la Olympus es \$0.20 más que el doble del costo de imprimir una foto en la Epson. Determine el costo de imprimir una foto en cada impresora.

9. **Ángulos complementarios** Dos ángulos son **ángulos complementarios,** si la suma de sus medidas es 90°. (Vea la sección 2.3). Si la medida del más grande de los dos ángulos complementarios es 15° más que dos veces la medida del ángulo más pequeño, determine las medidas de los dos ángulos.

10. **Ángulos complementarios** La diferencia entre las medidas de dos ángulos complementarios es 46°. Determine las medidas de los dos ángulos.

11. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios**, si la suma de sus medidas es 180°. (Vea la sección 2.3). Determine las medidas de dos ángulos suplementarios, si la medida de un ángulo es 28° menos que tres veces la medida del otro.

12. **Ángulos suplementarios** Determine las medidas de dos ángulos suplementarios, si la medida de un ángulo es tres veces y media mayor que la medida del otro ángulo.

13. **Velocidad al remar** El equipo de remo Heart O'Texas, mientras practica en Austin, Texas remó a un promedio de 15.6 millas por hora a favor de la corriente y 8.8 millas por hora en contra de la corriente. Determine la velocidad de remo del equipo en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

14. **Velocidad de vuelo** Jung Lee, en su aeroplano Piper Cub, voló a un promedio de 121 millas por hora a favor del viento y a 87 millas por hora en contra del viento. Determine la velocidad del aeroplano sin viento y la velocidad del viento.

15. **Salario más comisión** Don Lavigne, un representante de rentas de equipo para oficina, gana un salario semanal más una comisión sobre sus ventas. Una semana su sueldo total por ventas de $4000 fue $660. La siguiente semana su sueldo total sobre ventas de $6000 fue $740. Determine el salario semanal de Don y su porcentaje sobre las ventas.

16. **Renta de un camión** Una agencia de renta de camiones cobra una cuota diaria más un costo por millaje. A Hugo le cobraron $85 por dos días y 100 millas y a Cristina le cobraron $165 por tres días y 400 millas. ¿Cuál es el cobro diario de la agencia y cuál es el costo por cada milla?

17. **Aceite de lavanda** Pola Sommers, una masajista, necesita tres onzas de una solución de aceite de lavanda al 20%. Pero sólo tiene disponibles soluciones de aceite de lavanda al 5% y al 30%, ¿cuántas onzas de cada una debe mezclar para tener la solución deseada?

18. **Soluciones de fertilizantes** Frank Ditlman necesita aplicar una solución líquida de nitrógeno al 10% a su jardín de rosas, pero sólo tiene disponible una solución líquida de nitrógeno al 4% y una al 20%. ¿Cuánta solución al 4% y cuánta al 20% debe mezclar Frank para obtener 10 galones de solución al 10%?

19. **Eliminador de maleza** Un líquido para eliminar la maleza consta de 18% de ingrediente activo glifosfato (y 82% de ingredientes inactivos). La concentración se mezclará con agua y la mezcla se aplica a malezas. Si la mezcla final contendrá 0.9% de ingrediente activo, ¿cuánto concentrado y cuánta agua deben mezclarse para producir 200 galones de la mezcla final?

20. **Fertilizante para césped** El fertilizante para césped Winterizer de Scott tiene 22% de nitrógeno. El fertilizante para césped de Schultz tiene 4% de nitrógeno. William Weaver, propietario de un vivero, desea mezclar estos dos fertilizantes para producir 400 libras de una mezcla especial con 10% de nitrógeno para abonar el césped en media temporada. ¿Cuánto de cada fertilizante debe mezclar?

21. **Alpiste** El alpiste cuesta $0.59 por libra y la semilla de girasol cuesta $0.89 por libra. La tienda de mascotas de Ángela Leinenbachs desea producir 40 libras de una mezcla de alpiste y semillas de girasol que se venda en $0.76 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de semilla debe usar?

22. **Café** Franco Manuel tiene una tienda. Desea mezclar 30 libras de café que tengan un costo total de $170. Para obtener tal mezcla, combinará café que vende en $5.20 por libra con café que vende a $6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada café debe utilizar?

23. **Tarifa de trenes** Un grupo visitará Nueva York, y Ann Marie Whittle está cotizando las tarifas en trenes. Tres adultos y cuatro niños costaría un total de $159. Dos adultos y tres niños costaría un total de $112. Determine el precio de un boleto para adulto y el de un boleto para un niño.

24. **Alones enchilados** La Casa del Alón vende órdenes tamaño regular y tamaño gigante de alones enchilados de pollo. Tres órdenes regulares y cinco grandes de alones cuestan $67. Cuatro órdenes regulares y cuatro grandes de alones cuestan $64. Determine el costo de una orden regular y el costo de una orden grande.

25. **Cuentas de ahorro** El señor y la señora Gamton invierten un total de $10,000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 5% de interés y la otra 6%. Determine el monto colocado en cada cuenta, si por las dos cuentas se recibe un total de $540 en intereses después de un año. Utilice interés = capital · tasa · tiempo.

26. **Inversiones** Luis Okonkwo invirtió $30,000, parte a 9% y parte a 5%. Si hubiese invertido el monto total al 6.5%, su interés total sería el mismo que la suma de los intereses recibidos por las otras dos cuentas. ¿Cuánto invirtió en cada tasa de interés?

27. **Leche** Becky Slaats es ingeniera en la planta de la compañía Velda Farms. Quiere mezclar leche entera, que tiene 3.25% de grasa, y leche descremada, que no tiene grasa, para obtener 260 galones de una mezcla de leche que contenga 2% de grasa. ¿Cuántos galones de leche entera y cuántos galones de leche descremada debe mezclar Becky para obtener la mezcla deseada?

28. Panes quichés La receta de Lambert Marx para unos panes quichés, requiere 2 tazas (16 onzas) de crema ligera que tiene 20% de grasa de leche. Suele ser difícil encontrar crema ligera con 20% de grasa de leche en el supermercado. Lo que se encuentra por lo regular es crema pesada, que tiene 36% de grasa de leche, y media crema que tiene 10.5% de grasa de leche. ¿Cuánto de la crema pesada y cuánto de la media crema debe mezclar Lambert para obtener la mezcla necesaria para su receta?

29. Alpiste Al ordenar directamente a través de *www.alpiste.com*, los Carters pueden comprar alpiste Selección de la Temporada por \$1.79 la libra y Mezcla de Jardín por \$1.19 la libra. Si desean comprar 20 libras y gastar \$28 en alpiste, ¿cuántas libras de cada tipo deben comprar?

30. Jugo La compañía de jugos Healthy Favorities vende jugo de manzana a 8.3 centavos la onza y jugo de frambuesa a 9.3 centavos la onza. La compañía desea comerciar y vender botes de ocho onzas de jugo de manzana-frambuesa en 8.7 centavos la onza. ¿Cuántas onzas de cada uno debe mezclarse?

31. Recorrido en automóvil Dos automóviles inician desde el mismo punto en Alejandría, Virginia y viajan en direcciones opuestas. Un automóvil viaja 5 millas por hora más rápido que el otro automóvil. Después de cuatro horas, los dos automóviles están separados una distancia de 420 millas. Determine la velocidad de cada automóvil.

32. Camino en construcción Kip Ortiz conduce de Atlanta a Louisville, una distancia de 430 millas. Debido a la construcción de un camino y al tráfico pesado, durante la primera parte de su viaje, Kip conduce a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Durante el resto de su viaje conduce a una velocidad promedio de 70 millas por hora. Si su viaje le tomó en total siete horas, ¿cuántas horas condujo a cada velocidad?

33. Conferencia de Avon Cabrina Wilson y Dabney Jefferson son representantes de Avon y asisten a una conferencia en Seattle. Después de la conferencia, Cabrina conduce a casa en Boise a una velocidad promedio de 65 millas por hora, y Dabney conduce a casa en Portland a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Si la suma de sus tiempos de conducción es 11.4 horas y si la suma de las distancias conducidas es 690 millas, determine el tiempo que cada representante utilizó en su viaje a casa.

34. Ejercicio Para su rutina de ejercicios, Cynthia Harrison conduce una bicicleta durante hora y media y luego patina durante hora y media. Cynthia conduce la bicicleta a una velocidad que es dos veces la velocidad a la cual patina. Si la distancia total cubierta por Cynthia es de 12 millas, determine las velocidades a las cuales conduce la bicicleta y patina.

35. Dieta de animales Animales en un experimento están a una dieta estricta. Cada animal recibe, entre otros nutrientes, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidratos. El científico sólo tiene dos mezclas de alimentos disponibles con las composiciones que aparecen en la tabla siguiente. ¿Cuántos gramos de cada mezcla deben usarse para obtener la dieta correcta para un solo animal?

Mezcla	Proteína (%)	Carbohidratos (%)
Mezcla *A*	10	6
Mezcla *B*	20	2

36. Fabricación de sillas Una compañía fabrica dos modelos de sillas. La información acerca de la construcción de las sillas está dada en la tabla siguiente. En un día particular la compañía asignó 46.4 personas-horas para ensamblaje y 8.8 personas-horas a la pintura. ¿Cuántas sillas de cada tipo pueden fabricarse?

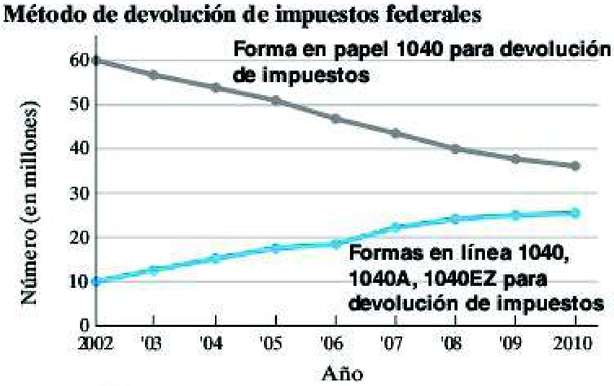
Modelo	Tiempo de ensamblaje	Tiempo de pintura
Modelo *A*	1 hr	0.5 hr
Modelo *B*	3.2 hr	0.4 hr

37. Aleación de latón En peso, una aleación de latón es 70% de cobre y 30% de zinc. Otra aleación de latón es 40% de cobre y 60% de zinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones se necesitan mezclar y combinar para obtener 300 gramos de una aleación de latón que tenga 60% de cobre y 40% de zinc?

38. Aleación de plata La plata Sterling tiene 92.5% de plata pura. ¿Cuántos gramos de plata pura (100%) y cuántos gramos de plata Sterling deben mezclarse para obtener 250 gramos de una aleación de plata al 94%?

39. Devolución de impuestos La gráfica siguiente muestra el número de Formas 1040, en papel, para devolución de impuestos y el número de Formas, en línea, 1040, 1040A y 1040EZ de devolución de impuestos solicitados al Servicio Interno de Ingresos (SII) durante los años de 2002 a 2005, y proyectados a 2010. Si t representa el número de años desde 2002, el número de formas 1040 de devolución, en millones, presentadas a la SII puede estimarse mediante la función $P(t) = -2.73t + 58.37$ y el número de formas en línea 1040, 1040A y 1040EZ, en millones, presentadas ante la SII, puede estimarse mediante la función $o(t) = 1.95t + 10.58$. Suponiendo que esta tendencia continúe, resuelva el sistema de ecuaciones para determinar el año en que el número de Formas 1040 en papel para devolución de impuestos será el mismo que las formas en línea 1040, 1040A y 1040EZ para la devolución de impuestos.

Método de devolución de impuestos federales



Fuente: Servicio de Ingresos Internos

40. Caminar y correr Cuong Tham realiza ejercicio todos los días. Camina a 3 millas por hora y luego corre a 5 millas por hora. Si tarda 0.9 horas en recorrer un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo corre?

41. Conducción por Texas Tom Johnson y Melissa Acino empiezan a manejar al mismo tiempo en diferentes automóviles, desde la ciudad de Oakland. Ambos viajan al sur por la carretera 35. Cuando Melissa llegó al área de Dallas/Ft. Worth, a una distancia de 150 millas, Tom sólo había llegado a Denton, Texas, a una distancia de 120 millas. Si Melissa promedió 15 millas por hora más rápido que Tom, determine la velocidad promedio de cada automóvil.

42. Costo de fotocopias En un centro local de copiado están disponibles dos planes.

Plan 1: $0.10 por copia.

Plan 2: una cuota anual de $120 más 4 centavos por copia.

a) Represente esta información como un sistema de ecuaciones.

b) Grafique el sistema de ecuaciones hasta 4000 copias.

c) Con base en la gráfica, estime el número de las copias que una persona tendría que tener en un año para que los dos planes tengan el mismo costo total.

d) Resuelva el sistema de manera algebraica.

En los ejercicios del 43 al 62 resuelva cada problema mediante un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

43. Volumen de correo La familia promedio de Estados Unidos recibe 24 piezas de correo cada semana. El número de estados de cuenta es dos menos que el doble del número de piezas de correo personal. El número de anuncios es dos más que cinco veces el número de piezas de correo personal. ¿Cuántas piezas de correo personal, estados de cuenta y anuncios recibe cada semana la familia promedio? *Fuente:* Arthur D. Little, Inc.

44. Personal de submarino El estándar de una tripulación es de 141 hombres en un submarino de Los Ángeles. El número de contramaestres (enlistados) es cuatro veces más que el número de oficiales comisionados. El número del resto de la tripulación es tres menos que ocho veces el número de oficiales comisionados. Determine el número de oficiales comisionados, contramaestres y del resto de la tripulación en el submarino.

45. Juegos en Tazones Colegiales Hasta 2004, las universidades de Alabama, Tenessee y Texas habían tenido el mayor número de apariciones en juegos de Tazones Colegiales de fútbol americano. Estas tres escuelas habían tenido un total de 141 apariciones en tazones, Alabama había tenido 8 apariciones más que Texas, juntas, el número de apariciones de Tennessee y Texas es 37 más que el número de apariciones de Alabama. Determine el número de apariciones en tazones de cada escuela y complete el diagrama siguiente.

Escuelas con mayor número de apariciones en un juego de Tazón Colegial de Fútbol Americano (incluye la temporada 2004)

Fuente: NCAA, USA Today (12/22/04)

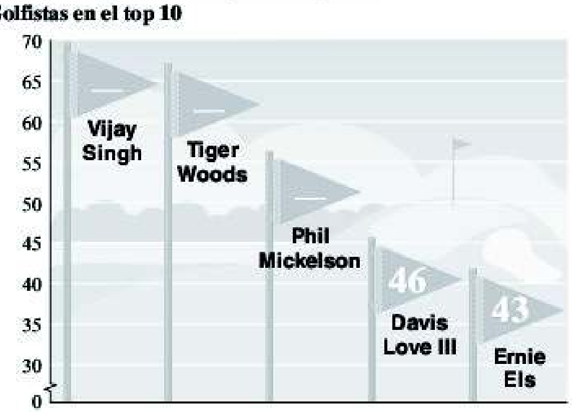
46. Olimpiadas de verano de 2004 En los Juegos Olímpicos de 2004 en Grecia, los países que ganaron la mayor cantidad de medallas de oro fueron Estados Unidos, China y Rusia. Juntos, estos tres países ganaron un total de 94 medallas de oro. Estados Unidos ganó 3 medallas de oro más que China. Reunidas las medallas de oro ganadas por Estados Unidos y Rusia es 2 menos que el doble del número de medallas de oro ganadas por China. Determine el número de medallas de oro ganadas por cada país y complete la tabla siguiente.

Juegos Olímpicos 2004

Clasificación por medallas de oro	País	Número de medallas de oro
1	Estados Unidos	
2	China	
3	Rusia	
4	Australia	17
5	Japón	16
6	Alemania	14

47. 10 mejores en la gira de la PGA En los cinco años de 2000 a 2004, los tres golfista con la mayor cantidad de veces en quedar entre los mejores 10 en la gira de la PGA (Asociación de golfistas profesionales), fueron Vijay Singh, Tiger Wood y Phil Mickelson. Juntos, durante estos años los tres golfistas tuvieron un total de 191 veces que terminaron entre los diez mejores. Tiger Woods tuvo 8 más que Phil Mickelson. Vijay Singh tuvo 12 más que Phil Mickelson. Determine el número de veces que cada uno de los golfistas terminó entre los mejores 10 y complete el diagrama siguiente.

Golfistas en el top 10

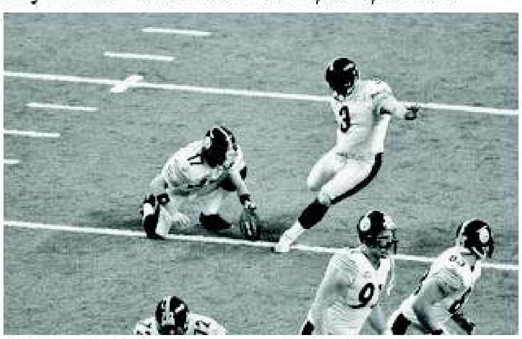


Fuente: PGA Tour, USA Today (1/12/05)

48. **Carrera de la Nascar** La copa Nascar Nextel consiste en 36 carreras; inician con Daytona 500 en febrero y termina con la Ford 400 en Miami en noviembre. En 2005, los tres pilotos con mayor puntaje fueron, en orden, Tony Stewart, Greg Biffle y Carl Edwards. Estos tres corredores tuvieron un total de 15 triunfos en la serie Nextel. Stewart tuvo un triunfo más que Edwards y Biffle tuvo dos triunfos más que Edwards. Determine el número de triunfos que tuvo cada piloto.

49. **Tormenta de nieve en Nueva Inglaterra** Durante la última semana de enero de 2005, Nueva Inglaterra tuvo un récord de tormenta de nieve. Las regiones costeras fueron fuertemente azotadas, algunas ciudades recibieron más de 3 pies de nieve. En Massachusetts, las ciudades de Haverhill, Plymouth y Salem tuvieron la mayor cantidad de nieve. El total de nieve que cayó en estas tres ciudades sumó 112.5 pulgadas. Salem y Plymouth tuvieron la misma cantidad de nieve. Ambas tuvieron 1.5 pulgadas más que Haverhill. Determine las cantidades de nieve que cayeron en cada una de estas ciudades.

50. **Fútbol americano** En la temporada regular de 2004 de la NFL (Liga Nacional de Fútbol americano), 19 jugadores anotaron 100 o más puntos. Los tres jugadores con la mayor cantidad de puntos fueron Adam Vinatieri (Nueva Inglaterra) Jason Elam (Denver) y Jeff Reed (Pittsburgh). Estos tres jugadores anotaron un total de 304 puntos. Vinatieri anotó 17 puntos más que Reed. Juntos, Vinatieri y Reed anotaron 7 puntos más que el doble de puntos que anotó Elam. Determine el número de puntos que anotaron Vinatieri, Elam y Reed. *Fuente:* eee.nfl.com/stats/leaders



Jeff Reed de los Acereros de Pittsburgh

51. **Súper Tazones** El Súper Tazón XXXIX se celebró el 6 de febrero de 2005, en Jacksonville, Florida. A lo largo de los años, los estados de Florida, California y Louisiana, en este orden, han sido anfitriones de la mayor cantidad de Súper Tazones. Estos tres estados han sido anfitriones del Súper Tazón un total de 32 veces. Florida ha tenido 3 Súper Tazones más que Louisiana. Juntos, Florida y Louisiana han tenido un Súper Tazón menos que el doble del número que ha tenido California. Determine el número de Súper Tazones que ha albergado cada uno de estos estados. *Fuente:* NFL, *USA Today* (1/2/05).

52. **Boletos de concierto** Para un concierto de Soggy Bottom Boys están disponibles tres clases de boletos: al frente, piso principal y palco. Los boletos más caros, del frente, son dos veces más caros que los boletos de palco. Los boletos de palco cuestan $10 menos que los boletos del piso principal y $30 menos que los boletos del frente. Determine el precio de cada clase de boleto.

53. **Triángulo** La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. El ángulo más pequeño del triángulo tiene una medida de $\frac{2}{3}$ la medida del segundo ángulo más pequeño. El ángulo más grande tiene una medida que es 30° menos que tres veces la medida del segundo ángulo. Determine la medida de cada ángulo.

54. **Triángulo** El ángulo más grande de un triángulo tiene una medida que es 10° menos que tres veces la medida del segundo ángulo más pequeño. La medida del ángulo más pequeño es igual a la diferencia entre la medida del ángulo más grande y el doble de la medida del segundo ángulo. Determine las medidas de los tres ángulos del triángulo.

55. **Inversiones** Tam Phan recibió un cheque por $10,000. Ella decidió dividir el dinero (no equitativamente) en tres inversiones diferentes. Colocó parte de su dinero en una cuenta de ahorros que paga 3% de interés. La segunda cantidad, que fue el doble del primer monto, se colocó en un certificado de depósito que paga 5% de interés. El resto lo invirtió en un fondo del mercado de valores que paga 6% de interés. Si el interés total de Tam en un periodo de un año fue de $525.00, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

56. **Bonos** Nick Pfaff, un abogado, dividió su bono de Navidad en tres inversiones diferentes. Con parte del dinero compró un bono municipal que paga 5.5% de interés simple. Invirtió el doble del monto del dinero que pagó por el bono municipal en un certificado de depósito que paga 4.5% de interés simple. Nick colocó el resto del dinero en una cuenta del mercado de valores que paga 3.75% de interés simple. Si el interés total de Nick por un año fue $692.50, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

57. **Peróxido de hidrógeno** Una solución al 10%, otra al 12% y una más al 20% de peróxido de hidrógeno, se mezclarán para obtener ocho litros de una solución al 13%. ¿Cuántos litros de cada una deben mezclarse, si el volumen de la solución al 20% debe ser dos litros menos que el volumen de la solución al 10%?

58. **Ácido sulfúrico** Una solución al 8%, otra al 10% y una más al 20% de solución de ácido sulfúrico se mezclan para obtener 100 ml de una solución al 12%. Si el *volumen de ácido* de la solución al 8% es igual a la mitad del *volumen de ácido* proveniente de las otras dos soluciones, ¿cuánto de cada solución se necesitó?

59. **Fabricación de muebles** La compañía de muebles Donaldson produce tres tipos de mecedora: el modelo para niños, el modelo estándar y el modelo ejecutivo. Cada mecedora se fabrica en tres etapas: corte, construcción y acabado. El tiempo necesario para cada etapa de cada mecedora está dado en la tabla siguiente. Durante una semana específica la compañía tiene disponible un máximo de 154 horas para corte, 94 horas para construcción y 76 horas para acabado. Determine cuántas mecedoras de cada tipo debe fabricar la compañía para operar a su máxima capacidad.

Etapa	Para niños	Estándar	Ejecutiva
Corte	5 hr	4 hr	7 hr
Construcción	3 hr	2 hr	5 hr
Acabado	2 hr	2 hr	4 hr

60. **Fabricación de bicicletas** La compañía de bicicletas Jamis produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Aragon. Cada bicicleta se fabrica en tres etapas: soldadura, pintura y ensamblaje. El tiempo necesario para cada etapa de cada bicicleta está dado en la tabla de la página 265. Durante una semana específica, la compañía tiene disponible un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintura y 96 horas para ensamblaje. Determine cuántas bicicletas de cada tipo debe producir la compañía para operar a su máxima capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Aragon
Soldadura	2	3	4
Pintura	1	2	2.5
Ensamblaje	1.5	2	3

61. **Flujo de corriente** En electrónica es necesario analizar el flujo de corriente a través de redes (o trayectorias) en un circuito. En tres trayectorias (A, B y C) de un circuito, las relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_A + I_B + I_C &= 0 \\ -8I_B + 10I_C &= 0 \\ 4I_A - 8I_B &= 6 \end{aligned}$$

donde I_A, I_B e I_C representan la corriente en las trayectorias A, B y C, respectivamente. Determine la corriente en cada trayectoria del circuito.

62. **Fuerzas en una viga** En física se suelen estudiar las fuerzas que actúan sobre un objeto. Para tres fuerzas, F_1, F_2 y F_3, que actúan sobre una viga, se obtuvieron las ecuaciones siguientes.

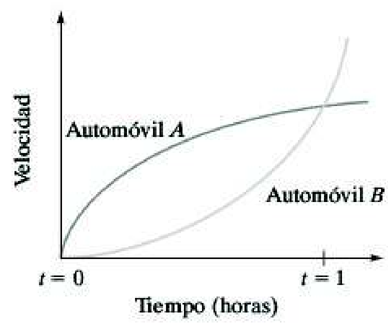
$$\begin{aligned} 3F_1 + F_2 - F_3 &= 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 &= 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 &= 3 \end{aligned}$$

Determine las tres fuerzas.

Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 63.

63. **Dos automóviles** Un *sistema no lineal de ecuaciones* es un sistema de ecuaciones que contiene al menos una ecuación que no es lineal. (Los sistemas no lineales de ecuaciones se estudiarán en el capítulo 10). La gráfica muestra un sistema no lineal de ecuaciones. Las curvas representan velocidad contra tiempo para dos automóviles.



a) ¿Las dos curvas son funciones? Explique.

b) Analice el significado de esta gráfica.

c) En el instante $t = 0.5$ h, ¿cuál automóvil está viajando a una velocidad mayor? Explique su respuesta.

d) Suponga que los dos automóviles inician en la misma posición y viajan en la misma dirección. ¿Cuál automóvil, A o B, viaja más lejos en una hora? Explique su respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] 64. Evalúe $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{8}y$ cuando $x = -2, y = 5$.

[2.1] 65. Resuelva $4 - 2[(x - 5) + 2x] = -(x + 6)$.

[3.2] 66. Explique cómo determinar si una gráfica representa a una función.

[3.5] 67. Escriba una ecuación para la recta que pasa por los puntos $(6, -4)$ y $(2, -8)$.

Examen de mitad de capítulo: 4.1-4.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas y la sección donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Para el sistema de ecuaciones siguiente:

a) Escriba cada ecuación en la forma pendiente intercepción.

b) Sin graficar las ecuaciones, indique si el sistema es consistente, inconsistente o dependiente.

c) Indique si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 7x - y &= 13 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico.

2. $y = 2x$
$y = -x + 3$

3. $x + y = -4$
$3x - 2y = 3$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

4. $2x + 5y = -3$
$x - 2y = -6$

5. $4x - 3y = 8$
$2x + y = -1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones por el método de la suma.

6. $x = 4y - 19$

$7x + 5y = -1$

7. $3x + 4y = 3$

$9x + 5y = \frac{11}{2}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones por cualquier método. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indíquelo.

8. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b = -1$

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b = 5$

9. $3m - 2n = 1$

$n = \frac{3}{2}m - 7$

10. $8x - 16y = 24$

$x = 2y + 3$

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

11. $x + y + z = 2$

$2x - y + 2z = -2$

$3x + 2y + 6z = 1$

12. $2x - y - z = 1$

$3x + 5y + 2z = 12$

$-6x - 4y + 5z = 3$

13. Cuando se le pidió resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + 2y + 2z &= 5 \\ 7x + 5y - z &= -2 \end{aligned}$$

Frank Dumont aseguró que la solución sólo era $x = 1$.

Esto es incorrecto. ¿Por qué es incorrecto? Explique su respuesta.

Luego resuelva completamente el sistema.

14. **Anacardos y pacanas** Una tienda de nueces vende anacardos a \$12 la libra y pacanas a \$6 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe comprar William Pritchard para tener una mezcla de 15 libras que se venda en \$10 la libra?

15. **Suma de números** La suma de tres números es 32. El número mayor es cuatro veces el número más pequeño. La suma de los dos números más pequeños es 8 menos que el número mayor. Determine los tres números.

4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de matrices

1 Escribir una matriz aumentada.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.

4 Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes.

1 Escribir una matriz aumentada

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números dentro de corchetes. Ejemplos de matrices son

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Los números dentro de los corchetes son los **elementos** de la matriz.

La matriz de la izquierda tiene 2 renglones y 2 columnas y se llama matriz de 2 por 2 (2×2). La matriz de la derecha contiene 2 renglones y 3 columnas y es una matriz de 2 por 3 (2×3). El número de renglones es la primera dimensión que se da, y el número de columnas es la segunda dimensión que se da. Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de renglones que de columnas. Así, la matriz de la izquierda es una matriz cuadrada.

En esta sección utilizaremos matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El primer paso en la resolución de un sistema con dos ecuaciones lineales mediante matrices es escribir cada ecuación en la forma $ax + by = c$. El siguiente paso es escribir la **matriz aumentada**, que está formada por dos matrices pequeñas separadas por una línea vertical. Los números a la izquierda de la línea vertical son los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones y los números de la derecha son las constantes. Para el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

la matriz aumentada se escribe

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$$

A continuación tenemos un sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

Sistema de ecuaciones	Matriz aumentada
$\begin{aligned} -x + \frac{1}{6}y &= 4 \\ -3x - 5y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -1 & \frac{1}{6} & 4 \\ -3 & -5 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

Observe que la barra en la matriz aumentada separa los coeficientes numéricos de las constantes. Como la matriz es sólo una forma abreviada de escribir el sistema de ecuaciones, podemos resolver un sistema lineal utilizando matrices de una manera similar a como resolvemos un sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante matrices, rescribimos la matriz aumentada en **forma triangular**,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

donde la a, p y q son constantes. A partir de este tipo de matriz aumentada podemos escribir un sistema de ecuaciones equivalentes. Esta matriz representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} 1x + ay &= p \\ 0x + 1y &= q \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay &= p \\ y &= q \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \text{representa} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Observe que el sistema anterior, en el lado derecho, puede resolverse fácilmente por sustitución. Su solución es $(-6, 5)$.

Utilizamos **transformaciones de renglón** para reescribir la matriz aumentada en forma triangular. Utilizaremos tres procedimientos de transformación de renglones.

Procedimientos para la transformación de renglones

1. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por (o dividirse entre) cualquier número real distinto de cero. (Esto es lo mismo que multiplicar ambos lados de una ecuación por un número real distinto de cero).
2. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Estos productos pueden entonces sumarse a los números correspondientes en cualquier otro renglón. (Esto es equivalente a eliminar una variable del sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma).
3. Dos renglones de una matriz pueden intercambiarse. (Esto es lo mismo que intercambiar dos ecuaciones en el sistema de ecuaciones).

Por lo general, al cambiar un elemento de la matriz aumentada por un 1 utilizamos el procedimiento 1 de las transformaciones de renglón, y al cambiar un elemento por un 0 utilizamos el procedimiento 2 de las transformaciones de renglón. *Se trabaja por columnas, comenzando por la izquierda.* Inicie con la primera columna, primer renglón.

EJEMPLO 1 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando matrices.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 4x + 5y &= 9 \end{aligned}$$

Solución Primero escriba la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Nuestro objetivo es obtener una matriz de la forma $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$ Comenzamos utilizando el procedimiento 1 de las transformaciones de renglón para cambiar el 2 en la primera columna y primer renglón por un 1. Para hacerlo, multiplicamos el primer renglón de números por $\frac{1}{2}$. (Abreviamos esta multiplicación como $\frac{1}{2}R_1$ y lo colocamos a la derecha de la matriz en el mismo renglón en que se realizó la operación. Esto puede ayudarle a seguir el proceso con mayor claridad).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2\left(\frac{1}{2}\right) & -3\left(\frac{1}{2}\right) & 10\left(\frac{1}{2}\right) \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_1$$

Con esto se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

El paso siguiente es obtener 0 en la primera columna, segundo renglón. Donde por el momento se encuentra un 4. Lo hacemos multiplicando los números del primer renglón por -4, y sumamos los productos a los números del segundo renglón. (Esto se abrevia $-4R_1 + R_2$).

Los números del primer renglón multiplicados por -4 son

$$1(-4) \quad -\frac{3}{2}(-4) \quad 5(-4)$$

Ahora sumamos estos productos a sus números respectivos del segundo renglón. Con esto obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 4 + 1(-4) & 5 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-4) & 9 + 5(-4) \end{array}\right] -4R_1 + R_2$$

Ahora tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right]$$

Para obtener 1 en la segunda columna, segundo renglón, multiplicamos el segundo renglón de números por $\frac{1}{11}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0\left(\frac{1}{11}\right) & 11\left(\frac{1}{11}\right) & -11\left(\frac{1}{11}\right) \end{array}\right] \frac{1}{11}R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz se encuentra en la forma que buscamos. El sistema de ecuaciones triangular equivalente es

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener el valor de x utilizando sustitución.

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= 5 \\ x - \frac{3}{2}(-1) &= 5 \\ x + \frac{3}{2} &= 5 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución del sistema es $\left(\frac{7}{2}, -1\right)$.

Ahora resuelva el ejercicio 19

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

Ahora utilizaremos las matrices para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Utilizamos el mismo procedimiento de transformaciones de renglón que se empleó para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales. Nuestro objetivo es obtener una matriz aumentada en la forma triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & p \\ 0 & 1 & c & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$$

donde a, b, c y p, q y r son constantes. Esta matriz representa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1x + ay + bz &= p \\ 0x + 1y + cz &= q \\ 0x + 0y + 1z &= r \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x + ay + bz &= p \\ y + cz &= q \\ z &= r \end{aligned}$$

Al construir una matriz aumentada, *trabaje por columnas, desde la columna del extremo izquierdo hasta la columna del extremo derecho. Siempre termine una columna antes de pasar a la siguiente. En cada columna, obtenga primero el 1 en la posición indicada, y después obtenga los ceros*. El ejemplo 2 ilustra este procedimiento.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Al usar matrices tenga cuidado de mantener todos los números alineados de forma adecuada en renglones y columnas. Un pequeño error al copiar números de una matriz a otra conducirá a un intento incorrecto, y con frecuencia frustrante, de resolver un sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones, $\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 2y - 5z &= 20 \\ -5x - y - 4z &= 13 \end{aligned}$, cuando se representa de manera correcta con la matriz aumentada, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right]$, lleva a la solución $(1, -2, -4)$.

Sin embargo, una matriz que parece muy similar, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 20 \\ -5 & 2 & -4 & 13 \end{array}\right]$, conduce a la terna ordenada incorrecta $\left(-\frac{25}{53}, -\frac{130}{53}, -\frac{206}{53}\right)$.

EJEMPLO 2 ▸ Utilice matrices para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ 2x - y - z &= 7 \\ -x + 3y + 2z &= -8 \end{aligned}$$

Solución Primero escriba la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

Nuestro primer paso es utilizar las transformaciones para cambiar la primera columna a $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$. Como el número de la primera columna, primer renglón ya es 1, trabajaremos con el 2 de la primera columna y segundo renglón. Multiplicamos los números del primer renglón por -2 y sumamos los productos a los números respectivos del segundo renglón, con lo que cambiará el 2 por 0. Ahora la matriz es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

Continuamos hacia abajo en la primera columna y cambiamos el -1 del tercer renglón por un 0. Multiplicamos los números del primer renglón por 1 y sumamos los productos al tercer renglón para obtener

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ 1R_1 + R_3 \end{array}$$

Ahora trabajamos con la segunda columna. Queremos cambiar los números de la segunda columna a la forma $\begin{matrix}a\\1\\0\end{matrix}$ donde a representa un número. Como hay un 1 en el tercer renglón y segunda columna, y queremos un 1 en el segundo renglón, segunda columna, intercambiamos los renglones dos y tres de la matriz. Esto da

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \text{Intercambiar } R_2 \text{ y } R_3. \\ \\ \end{array}$$

Continuamos hacia abajo con la segunda columna; ahora cambiamos el 3 del tercer renglón por un 0, multiplicando los números del segundo renglón por -3 y sumando los productos al tercer renglón. Esto produce

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -22 & 66 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -3R_2 + R_3 \end{array}$$

Ahora trabajamos con la tercera columna. Deseamos cambiar los números de la tercera columna a la forma $\begin{matrix}b\\c\\1\end{matrix}$ donde b y c representan números. Debemos cambiar el -22 del tercer renglón por un 1. Podemos lograr esto multiplicando los números del tercer renglón por $-\frac{1}{22}$. Esto da como resultado lo siguiente.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] -\tfrac{1}{22}R_3$$

Ahora esta matriz tiene la forma deseada. De esta matriz obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ y + 5z &= -15 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

La tercera ecuación nos da el valor de z en la solución. Ahora podemos obtener el valor para y, sustituyendo -3 por z en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} y + 5z &= -15 \\ y + 5(-3) &= -15 \\ y - 15 &= -15 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos el valor para x, sustituyendo 0 por y y -3 por z en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ x - 2(0) + 3(-3) &= -7 \\ x - 0 - 9 &= -7 \\ x - 9 &= -7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es $(2, 0, -3)$. Ahora, verifique esto mediante la sustitución de los valores apropiados en cada una de las ecuaciones originales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

4 Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes

Al resolver un sistema de dos ecuaciones, si obtiene una matriz aumentada en la que todo un renglón de números de un lado de la recta vertical contiene ceros, pero no aparece un cero en el mismo renglón del otro lado de la recta vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones con el que se obtiene la siguiente matriz aumentada es un sistema inconsistente.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

El segundo renglón de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 3$$

la cual nunca es verdadera.

Si obtiene una matriz en la cual aparecen ceros en todo el renglón, el sistema de ecuaciones es dependiente. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que produce la siguiente matriz aumentada es un sistema dependiente.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

El segundo renglón de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 0$$

la cual siempre es verdadera.

Se cumplen reglas similares para los sistemas de ecuaciones con tres ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Muchas calculadoras graficadoras tienen la capacidad para trabajar con matrices. Tales calculadoras tienen capacidad para realizar operaciones de renglón sobre matrices. Por consiguiente, estas calculadoras graficadoras pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones mediante matrices.

Lea el manual de instrucciones que viene con su calculadora graficadora para ver si puede manipular matrices. Si es así, aprenda cómo utilizar su calculadora graficadora para resolver sistemas de ecuaciones mediante matrices.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una matriz cuadrada?
2. Explique cómo construir una matriz aumentada.
3. Si obtiene la matriz aumentada siguiente cuando resuelve un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{array}\right]$$

4. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & -8 \end{array}\right]$$

5. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

6. Si obtuvo la matriz aumentada siguiente al resolver un sistema de ecuaciones, ¿cuál sería el paso siguiente para completar el proceso? Explique su respuesta.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

7. Al resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices, si dos renglones son idénticos, ¿el sistema será consistente, dependiente o inconsistente?
8. Cuando resuelva un sistema de ecuaciones mediante matrices, ¿cómo sabrá si el sistema es
   a) dependiente,
   b) inconsistente?

Práctica de habilidades

Realice cada una de las transformaciones de renglón indicada y escriba la matriz nueva.

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & -25 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por $\frac{1}{5}$.

10. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{array}\right]$ Multiplique los números del segundo renglón por $\frac{1}{4}$.

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -8 \end{array}\right]$ Intercambie los renglones 1 y 3.

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$ Intercambie el renglón 2 y el renglón 3.

13. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ -4 & 11 & -6 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por 4 y sume los productos al segundo renglón.

14. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 10 & -4 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por $-\frac{1}{2}$ y sume los productos al segundo renglón.

15. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ Multiplique los números del primer renglón por -5 y sume los productos al segundo renglón.

16. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right]$ Multiplique los números del tercer renglón por $\frac{1}{3}$.

Resuelva cada sistema utilizando matrices.

17. $x + 3y = 3$, $-x + y = -3$

18. $x + 2y = 10$, $3x - y = 9$

19. $x + 3y = -2$, $-2x - 7y = 3$

20. $3x + 6y = 0$, $2x - y = 10$

21. $5a - 10b = -10$, $2a + b = 1$

22. $3s - 2t = 1$, $-2s + 4t = -6$

23. $2x - 5y = -6$, $-4x + 10y = 12$

24. $-2m - 4n = 7$, $3m + 6n = -8$

25. $12x + 2y = 2$, $6x - 3y = -11$

26. $4r + 2s = -10$, $-2r + s = -7$

27. $-3x + 6y = 5$, $2x - 4y = 7$

28. $8x = 4y + 12$, $-2x + y = -3$

29. $12x - 8y = 6$, $-3x + 4y = -1$

30. $2x - 3y = 3$, $-5x + 9y = -7$

31. $10m = 8n + 15$, $16n = -15m - 2$

32. $8x = 9y + 4$, $16x - 27y = 11$

Resuelva cada sistema utilizando matrices.

33. $x - 3y + 2z = 5$, $2x + 5y - 4z = -3$, $-3x + y - 2z = -11$

34. $a - 3b + 4c = 7$, $4a + b + c = -2$, $-2a - 3b + 5c = 12$

35. $x + 2y = 5$, $y - z = -1$, $2x - 3z = 0$

36. $3a - 5c = 3$, $a + 2b = -6$, $7b - 4c = 5$

37. $x - 2y + 4z = 5$, $-3x + 4y - 2z = -8$, $4x + 5y - 4z = -3$

38. $3x + 5y + 2z = 3$, $-x - y - z = -2$, $2x - 2y + 5z = 11$

39. $2x - 5y + z = 1$, $3x - 5y + z = 3$, $-4x + 10y - 2z = -2$

40. $x + 2y + 3z = 1$, $4x + 5y + 6z = -3$, $7x + 8y + 9z = 0$

41. $4p - q + r = 4$, $-6p + 3q - 2r = -5$, $2p + 5q - r = 7$

42. $-4r + 3s - 6t = 14$, $4r + 2s - 2t = -3$, $2r - 5s - 8t = -23$

43. $2x - 4y + 3z = -12$, $3x - y + 2z = -3$, $-4x + 8y - 6z = 10$

44. $3x - 2y + 4z = -1$, $5x + 2y - 4z = 9$, $-6x + 4y - 8z = 2$

45. $5x - 3y + 4z = 22$, $-x - 15y + 10z = -15$, $-3x + 9y - 12z = -6$

46. $9x - 4y + 5z = -2$, $-9x + 5y - 10z = -1$, $9x + 3y + 10z = 1$

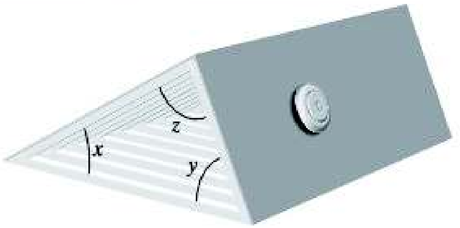
Resolución de problemas

47. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices, si dos renglones de la matriz se intercambian, ¿cambiará la solución del sistema? Explique.

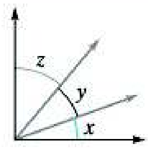
48. Puede decir si un sistema de dos ecuaciones con dos variables es consistente, dependiente o inconsistente, comparando las pendientes e intersecciones con y de las gráficas de las ecuaciones. Sin resolver, ¿puede decir si un sistema de tres ecuaciones con tres variables es consistente, dependiente o inconsistente? Explique.

Resuelva utilizando matrices.

49. Ángulos de un tejado En un tejado de sección transversal triangular, el ángulo más grande es 55° mayor que el ángulo más pequeño. El ángulo más grande es 20° mayor que el tercer ángulo. Determine la medida de cada ángulo.

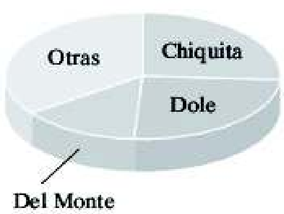


50. Ángulo recto Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. El más grande de los tres ángulos es el doble del más pequeño. El tercer ángulo es 10° mayor que el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada ángulo.



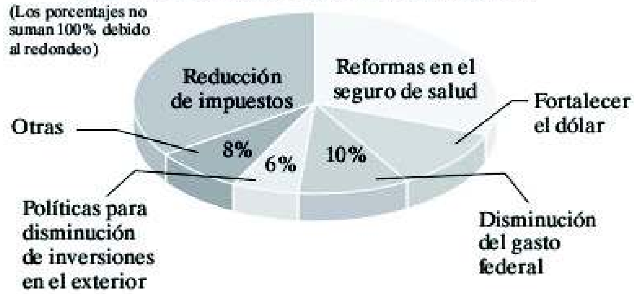
51. Plátanos Sesenta y cinco por ciento de los plátanos del mundo son controlados por Chiquita, Dole, o Del Monte (todas compañías de Estados Unidos). Chiquita, la más grande, controla 12% más plátanos que Del Monte. Dole, la segunda en tamaño, controla 3% menos que el doble del porcentaje que controla Del Monte. Determine los porcentajes que se deberán colocar en cada sector del círculo de la gráfica que se muestra.

Plátanos en el mundo



52. Impacto en los negocios A una muestra de directores generales en una encuesta de TEC International se le pidió listar los cambios más importantes que podrían hacerse de 2004 a 2006 para fortalecer sus compañías. Las tres respuestas principales fueron, en orden: reducir impuestos, reformar los seguros de salud, y fortalecer el dólar. Setenta y siete por ciento de todos los directores generales seleccionaron uno de estos tres puntos como su opción principal. Cuatro por ciento más de directores generales seleccionó la reducción de impuestos en vez de reformar los seguros de salud. La reducción de impuestos fue dos por ciento mayor que tres veces el porcentaje de quienes seleccionaron fortalecer el dólar. Determine el porcentaje de directores generales que seleccionaron la reducción de impuestos, reformar el seguro de salud y fortalecer el dólar. Luego complete la gráfica siguiente.

¿Qué tendría mayor impacto en su empresa?



Fuente: Encuesta de TEC International realizada a 2,300 directores generales.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **53.** $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}; B = \{3, 4, 5, 6, 10\}$. Determine

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$.

[2.5] **54.** Indique la desigualdad $-1 < x \leq 4$

a) en una recta numérica,

b) como un conjunto solución y

c) en notación de intervalo.

[3.2] **55.** ¿Qué representa una gráfica?

[3.4] **56.** Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$, determine $f(-5)$.

4.5 Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de determinantes y la regla de Cramer

1 Evaluar un determinante de una matriz de 2×2.
2 Utilizar la regla de Cramer.
3 Evaluar un determinante de una matriz de 3×3.
4 Utilizar la regla de Cramer con sistemas de tres variables.

1 Evaluar un determinante de una matriz de 2×2

Hemos estudiado varias formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales, incluyendo: graficación, sustitución, el método de la suma (o eliminación) y matrices. Un sistema de ecuaciones lineales también puede resolverse mediante determinantes.

Asociado con cada matriz cuadrada está un número denominado su **determinante**. Para una matriz de 2×2, su determinante se define como sigue.

Determinante

El **determinante** de una matriz de 2×2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

EJEMPLO 1 Evalúe cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

a) $a_1 = 2, a_2 = 3, b_1 = -1, b_2 = -5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (3)(-1) = -10 + 3 = -7$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(3) = 8 + 3 = 11$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

2 Utilizar la regla de Cramer

Si comenzamos con las ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

podemos utilizar el método de la suma para mostrar que

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(vea el problema 65 de Retos en la página 281). Observe que los *denominadores* de x y y son ambos $a_1b_2 - a_2b_1$. A continuación está el determinante que produce este denominador. Hemos etiquetado este denominador como D.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Los *numeradores* de x y y son diferentes. A continuación se encuentran dos determinantes, etiquetados con D_x y D_y con los que se obtienen los numeradores de x y y.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Utilizamos los determinantes D, D_x y D_y en la regla de Cramer. La **regla de Cramer** puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Sugerencia útil

Los elementos del determinante D son los coeficientes numéricos de los términos x y y en las dos ecuaciones dadas, listados en el mismo orden en que aparecen dentro de las ecuaciones. Para obtener el determinante D_x, a partir del determinante D, reemplace los coeficientes de los términos de x (los valores de la primera columna) con las constantes de las dos ecuaciones dadas. Para obtener el determinante D_y, a partir del determinante D, reemplace los coeficientes de los términos de y (los valores de la segunda columna) con las constantes de las dos ecuaciones dadas.

EJEMPLO 2 ▸ Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema siguiente.

$$3x + 5y = 7$$
$$4x - y = -6$$

Solución Ambas ecuaciones están en la forma deseada, $ax + by = c$. Cuando etiquetamos las constantes, a, b y c nos referimos a $3x + 5y = 7$ como la ecuación 1 y $4x - y = -6$ como la ecuación 2 (en los subíndices).

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3x & + & 5y & = & 7 \\ 4x & - & 1y & = & -6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{array}$$

Ahora determinamos D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(5) = -3 - 20 = -23$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-6)(5) = -7 + 30 = 23$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4(7) = -18 - 28 = -46$$

Ahora encontramos el valor de x y de y.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{23}{-23} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2$$

Así, la solución es $x = -1$, $y = 2$ o el par ordenado $(-1, 2)$. Una comprobación mostrará que este par ordenado satisface ambas ecuaciones.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

Cuando el determinante $D = 0$, la regla de Cramer no se puede aplicar ya que no está definida la división entre cero. Entonces debe utilizar un método diferente para resolver el sistema. O bien, puede evaluar D_x y D_y para determinar si el sistema es dependiente e inconsistente.

Cuando $D = 0$

Si $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$, entonces el sistema es dependiente.

Si $D = 0$, y ocurre que $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

3 Evaluar un determinante de una matriz 3 × 3

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el **determinante menor** (o simplemente el menor) de a_1, se encuentra tachando los elementos del mismo renglón y la misma columna donde aparece el elemento a_1. Los demás elementos forman el determinante menor de a_1. El determinante menor de los otros elementos se encuentra de manera similar.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{Determinante menor de } a_1$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & \cancel{c_2} \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{Determinante menor de } a_2$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & b_1 & c_1 \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} & \cancel{c_3} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{Determinante menor de } a_3$$

Para evaluar los determinantes de una matriz de 3 × 3, utilizamos los determinantes menores. El siguiente cuadro muestra cómo podemos evaluar **por el desarrollo de menores de la primera columna** tal determinante.

Desarrollo de los determinantes mediante los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \overbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Determinante} \\ \text{menor} \\ \text{de } a_1}} - a_2 \overbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Determinante} \\ \text{menor} \\ \text{de } a_2}} + a_3 \overbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}^{\substack{\text{Determinante} \\ \text{menor} \\ \text{de } a_3}}$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ utilizando el desarrollo del determinante mediante los menores de la primera columna.

Solución Seguiremos el procedimiento dado en el recuadro.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4[5(-1) - (-3)0] - 3[(-2)(-1) - (-3)6] + 1[(-2)0 - 5(6)] \\ &= 4(-5 + 0) - 3(2 + 18) + 1(0 - 30) \\ &= 4(-5) - 3(20) + 1(-30) \\ &= -20 - 60 - 30 \\ &= -110 \end{aligned}$$

El determinante tiene un valor de -110.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 13

4 Utilizar la regla de Cramer con sistemas de tres variables

La regla de Cramer puede ampliarse a los sistemas de ecuaciones con tres variables como sigue.

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Observe que todos los denominadores de las expresiones para x, y y z son el mismo determinante, D. Observe que en D_x las constantes d reemplazan a las a, los coeficientes numéricos de los términos x. En D_y las d reemplazan a las b, los coeficientes numéricos de los términos y. En D_z las d reemplazan a las c, los coeficientes numéricos de los términos z.

EJEMPLO 4 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= -6 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x - 4y + z &= -3 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{array}{llll} a_1 = 3 & b_1 = -2 & c_1 = -1 & d_1 = -6 \\ a_2 = 2 & b_2 = 3 & c_2 = -2 & d_2 = 1 \\ a_3 = 1 & b_3 = -4 & c_3 = 1 & d_3 = -3 \end{array}$$

Utilizaremos el desarrollo de los determinantes menores del primer renglón para evaluar D, D_x, D_y y D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-6) + 1(7)$$

$$= -15 + 12 + 7 = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(-5) - 1(-6) - 3(7)$$

$$= 30 + 6 - 21 = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-9) + 1(13)$$

$$= -15 + 18 + 13 = 16$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-5) - 2(-18) + 1(16)$$
$$= -15 + 36 + 16 = 37$$

Encontramos que $D = 4$, $D_x = 15$, $D_y = 16$ y $D_z = 37$. Por lo tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{4} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{4} = 4 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{37}{4}$$

La solución del sistema es $\left(\frac{15}{4}, 4, \frac{37}{4}\right)$. Observe que la terna ordenada muestra a x, y y z en este orden.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 33

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones con tres variables, en el cual una o más ecuaciones no tienen una variable, insertamos la variable con el coeficiente 0. Así,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y \phantom{{}+2z} &= 14 \\ x \phantom{{}-3y} - 3z &= -5 \end{aligned} \quad \text{se escribe} \quad \begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y + 0z &= 14 \\ x + 0y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

Sugerencia útil

Al evaluar los determinantes, si dos renglones (o columnas) son idénticos, o idénticos excepto por signos opuestos, el determinante tiene un valor de 0. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como en el caso de los determinantes de una matriz de 2×2, cuando el determinante $D = 0$ no se puede utilizar la regla de Cramer, ya que no está definida la división entre 0. Entonces, hay que utilizar un método distinto para resolver el sistema. O bien, si evalúa D_x, D_y y D_z para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Si $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ y $D_z = 0$, entonces el sistema es dependiente.

Si $D = 0$, y se cumple que $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ o $D_z \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En la sección 4.4 mencionamos que algunas calculadoras graficadoras pueden manejar matrices. Las calculadoras graficadoras con capacidades de matrices también pueden evaluar determinantes de matrices cuadradas. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender si su calculadora puede evaluar determinantes. Si es así, aprenda cómo hacerlo en su calculadora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo evaluar un determinante de 2×2.
2. Explique cómo evaluar un determinante de 3×3, mediante el desarrollo de menores de la primera columna.
3. Explique cómo puede determinar si un sistema de tres ecuaciones lineales es inconsistente usando determinantes.
4. Explique cómo puede determinar si un sistema de tres ecuaciones lineales es dependiente usando determinantes.
5. Al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer, obtuvo que $D = 4$, $D_x = 12$ y $D_y = -2$. ¿Cuál es la solución para este sistema?
6. Al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer, obtuvo que $D = -8$, $D_x = 6$, $D_y = 14$ y $D_z = -2$. ¿Cuál es la solución para este sistema?

Práctica de habilidades

Evalúe cada determinante.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 13 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

15. $x + 3y = 1$
    $-2x - 3y = 4$
16. $2x + 4y = -2$
    $-5x - 2y = 13$
17. $-x - 2y = 2$
    $x + 3y = -6$
18. $2r + 3s = -9$
    $3r + 5s = -16$
19. $6x = 4y + 7$
    $8x - 1 = -3y$
20. $6x + 3y = -4$
    $9x + 5y = -6$
21. $5p - 7q = -21$
    $-4p + 3q = 22$
22. $4x = -5y - 2$
    $-2x = y + 4$
23. $x + 5y = 3$
    $2x - 6 = -10y$
24. $9x + 6y = -3$
    $6x + 4y = -2$
25. $3r = -4s - 6$
    $3s = -5r + 1$
26. $x = y - 1$
    $3y = 2x + 9$
27. $5x - 5y = 3$
    $-x + y = -4$
28. $2x - 5y = -3$
    $-4x + 10y = 7$
29. $6.3x - 4.5y = -9.9$
    $-9.1x + 3.2y = -2.2$
30. $-1.1x + 8.3y = 36.5$
    $3.5x + 1.6y = -4.1$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.

31. $x + y + z = 3$
    $-3y + 4z = 15$
    $-3x + 4y - 2z = -13$
32. $2x + 3y = 4$
    $3x + 7y - 4z = -3$
    $x - y + 2z = 9$
33. $3x - 5y - 4z = -4$
    $4x + 2y = 1$
    $6y - 4z = -11$
34. $2x + 5y + 3z = 2$
    $6x - 9y = 5$
    $3y + 2z = 1$
35. $x + 4y - 3z = -6$
    $2x - 8y + 5z = 12$
    $3x + 4y - 2z = -3$
36. $2x + y - 2z = 4$
    $2x + 2y - 4z = 1$
    $-6x + 8y - 4z = 1$
37. $a - b + 2c = 3$
    $a - b + c = 1$
    $2a + b + 2c = 2$
38. $-2x + y + 8 = -2$
    $3x + 2y + z = 3$
    $x - 3y - 5z = 5$
39. $a + 2b + c = 1$
    $a - b + 3c = 2$
    $2a + b + 4c = 3$
40. $4x - 2y + 6z = 2$
    $-6x + 3y - 9z = -3$
    $2x - 7y + 11z = -5$
41. $1.1x + 2.3y - 4.0z = -9.2$
    $-2.3x + 4.6z = 6.9$
    $-8.2y - 7.5z = -6.8$
42. $4.6y - 2.1z = 24.3$
    $-5.6x + 1.8y = -5.8$
    $2.8x - 4.7y - 3.1z = 7.0$

43. $-6x + 3y - 12z = -13$
$5x + 2y - 3z = 1$
$2x - y + 4z = -5$

44. $x - 2y + z = 2$
$4x - 6y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 0$

45. $2x + \frac{1}{2}y - 3z = 5$
$-3x + 2y + 2z = 1$
$4x - \frac{1}{4}y - 7z = 4$

46. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 3z = -3$
$2x - 3y + 2z = -1$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 1$

47. $0.3x - 0.1y - 0.3z = -0.2$
$0.2x - 0.1y + 0.1z = -0.9$
$0.1x + 0.2y - 0.4z = 1.7$

48. $0.6u - 0.4v + 0.5w = 3.1$
$0.5u + 0.2v + 0.2w = 1.3$
$0.1u + 0.1v + 0.1w = 0.2$

Resolución de problemas

49. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante, si se intercambian las a y las b entre sí $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$? Explique su respuesta.

50. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante, si las a se intercambian con las b $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$? Explique su respuesta.

51. En un determinante de 2×2, si los renglones son iguales, ¿cuál es el valor del determinante?

52. Si todos los elementos de un renglón o una columna de un determinante de 2×2 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

53. Si todos los elementos de un renglón o una columna de un determinante 3×3 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

54. Dado un determinante de 3×3, si todos los elementos de un renglón se multiplican por -1, ¿cambiará el valor del determinante? Explique.

55. Dado un determinante de 3×3, si el primero y segundo renglones se intercambian, ¿cambiará el valor del determinante? Explique.

56. En un determinante de 3×3, si dos renglones son iguales, ¿puede hacer una generalización acerca del valor del determinante?

57. En un determinante de 3×3, si los números del primer renglón se multiplican por -1 y los números del segundo renglón se multiplican por -1, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explique.

58. En un determinante de 3×3, si los números en el segundo renglón se multiplican por -1 y los números en el tercer renglón se multiplican por -1, ¿cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

59. En un determinante de 3×3, si los números en el segundo renglón se multiplican por 2, ¿cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

60. En un determinante de 3×3, si los números en el primer renglón se multiplican por 3 y los números del tercer renglón se multiplican por 4, ¿ cambiará el valor del nuevo determinante? Explique.

Determine el valor de la letra dada.

61. $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 32$

62. $\begin{vmatrix} b-3 & -4 \\ b+2 & -6 \end{vmatrix} = 14$

63. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & y \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -35$

64. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & x & -7 \end{vmatrix} = -31$

Retos

65. Utilice el método de la suma para resolver el sistema siguiente para **a)** x, **b)** y.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **66.** Resuelva la desigualdad $3(x-2) < \frac{4}{5}(x-4)$ e indique la solución en notación de intervalo.

Grafique $3x + 4y = 8$, *mediante el método indicado.*

[3.2] **67.** Por medio del trazo de puntos.

68. Utilizando las intersecciones con x y con y.

[3.3] **69.** Utilizando la pendiente e intersección con y.

4.6 Resolución de sistemas de desigualdades

1. Resolver sistemas de desigualdades lineales.
2. Resolver problemas de programación lineal.
3. Resolver sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto.

1 Resolver sistemas de desigualdades lineales

En la sección 3.7 mostramos cómo graficar desigualdades lineales con dos variables. En la sección 4.1 aprendimos a resolver de manera gráfica sistemas de ecuaciones. En esta sección mostramos cómo resolver **sistemas de desigualdades lineales** de manera gráfica.

Para resolver un sistema de desigualdades lineales

Grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

EJEMPLO 1 Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$y < -\frac{1}{2}x + 2$$
$$x - y \leq 4$$

Solución Primero grafique la desigualdad $y < -\frac{1}{2}x + 2$ (vea la **figura 4.8**). Ahora, en los mismos ejes, grafique la desigualdad $x - y \leq 4$ (**figura 4.9**). La solución es el conjunto de puntos comunes a las gráficas de ambas desigualdades. Ésta es la parte de la gráfica que tiene ambos sombreados. La línea discontinua no es parte de la solución, pero la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades sí lo es.

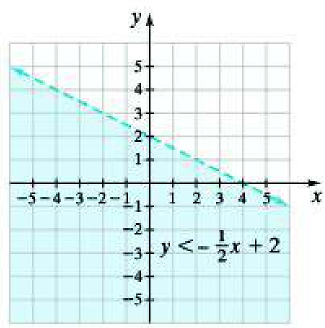


FIGURA 4.8

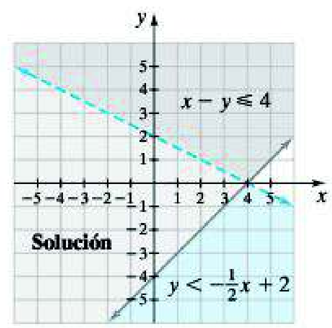


FIGURA 4.9

Ahora resuelva el ejercicio 5

EJEMPLO 2 Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$3x - y < 6$$
$$2x + 2y \geq 5$$

Solución Grafique $3x - y < 6$ (vea la **figura 4.10**). Grafique $2x + 2y \geq 5$ en el mismo conjunto de ejes (**figura 4.11**). La solución es la parte de la gráfica con los dos sombreados y la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades.

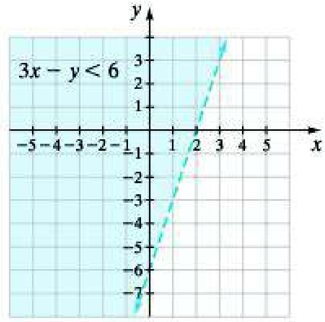


FIGURA 4.10

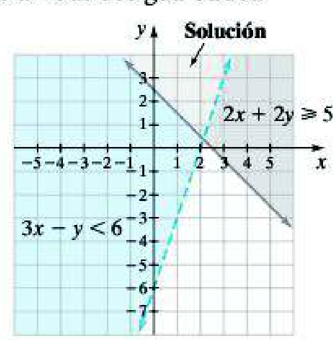


FIGURA 4.11

Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 3 ▸ Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$y > -1$$
$$x \leq 4$$

Solución La **figura 4.12** ilustra la solución.

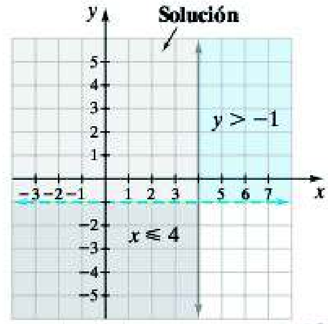


FIGURA 4.12

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

2 Resolver problemas de programación lineal

Existe un proceso matemático llamado **programación lineal**, donde con frecuencia hay que graficar más de dos desigualdades lineales en los mismos ejes. Estas desigualdades se llaman **restricciones**. Los dos ejemplos siguientes ilustran la forma de determinar la solución de un sistema de más de dos desigualdades.

EJEMPLO 4 ▸ Determine la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$2x + 3y \leq 12$$
$$2x + \quad y \leq 8$$

Solución Las primeras dos desigualdades, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, indican que la solución debe estar en el primer cuadrante, ya que es el único cuadrante donde ambas x y y son positivas. La **figura 4.13** ilustra las gráficas de las cuatro desigualdades.

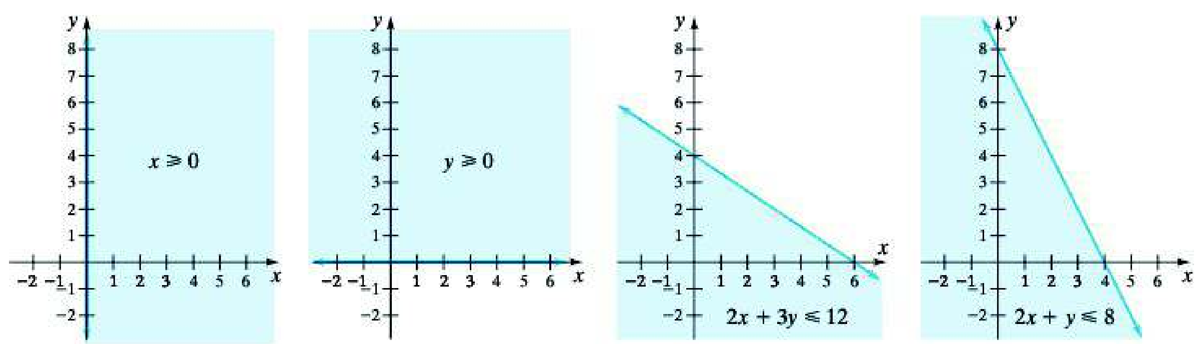


FIGURA 4.13

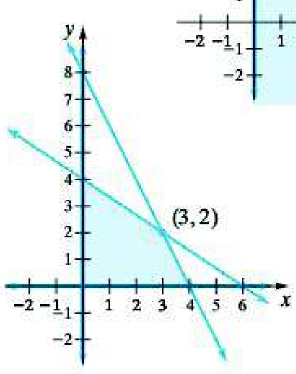


FIGURA 4.14

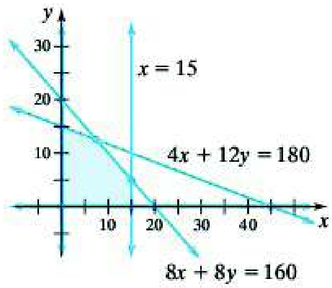
La **figura 4.14** ilustra las gráficas en los mismos ejes y la solución del sistema de desigualdades. Observe que todos los puntos que están en el área sombreada y todos los puntos sobre las rectas que forman la región poligonal forman parte de la respuesta.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

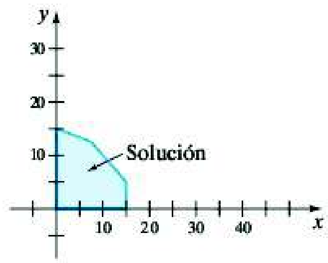
EJEMPLO 5 ▸ Determine la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x &\leq 15 \\ 8x + 8y &\leq 160 \\ 4x + 12y &\leq 180 \end{aligned}$$

Solución Las primeras dos desigualdades indican que la solución debe estar en el primer cuadrante. La tercera desigualdad indica que x debe ser un valor menor o igual a 15. La **figura 4.15a** indica las gráficas de las ecuaciones correspondientes y muestra la región que satisface todas las desigualdades del sistema. La **figura 4.15b** indica la solución del sistema de desigualdades.



(a)



(b)

FIGURA 4.15

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

3 Resolver sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto

Ahora graficaremos, en el sistema de coordenadas cartesianas, *sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto*. Antes de hacer algunos ejemplos, recordemos las reglas para las desigualdades con valor absoluto que aprendimos en la sección 2.6. Recuerde lo siguiente:

Resolución de desigualdades con valor absoluto

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.

Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 6 ▸ Grafique $|x| < 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución Con base en las reglas dadas, sabemos que $|x| < 3$ significa $-3 < x < 3$. Trazamos rectas verticales discontinuas por -3 y 3 y sombreamos el área entre las dos (**figura 4.16**).

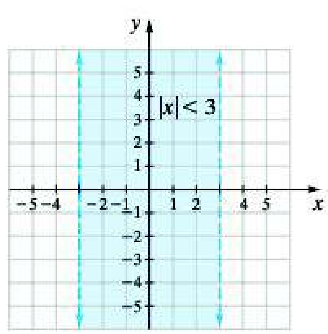


FIGURA 4.16

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 7 ▸ Grafique $|y + 1| > 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución A partir de las reglas dadas anteriormente, sabemos que $|y + 1| > 3$ significa que $y + 1 < -3$ o $y + 1 > 3$. Resolvemos cada desigualdad.

$$\begin{aligned} y + 1 &< -3 \quad & \text{o} \quad & y + 1 > 3 \\ y &< -4 & & y > 2 \end{aligned}$$

Ahora graficamos ambas desigualdades y consideramos la *unión* de las dos gráficas. La solución es el área sombreada de la **figura 4.17**.

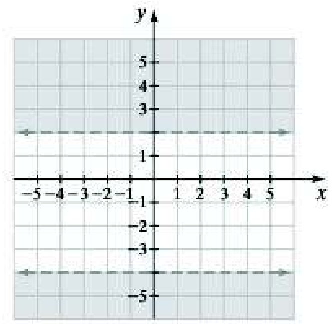


FIGURA 4.17

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 8 ▸ Grafique el sistema de desigualdades.

$$|x| < 3$$
$$|y + 1| > 3$$

Solución Graficamos ambas desigualdades en los mismos ejes. Por lo tanto, combinamos la gráfica del ejemplo 6 con la del ejemplo 7 (vea la **figura 4.18**). Los puntos comunes a ambas desigualdades forman la solución del sistema.

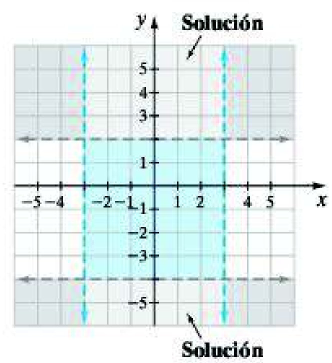


FIGURA 4.18

▸ Ahora resuelva el ejercicio 41

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo determinar, de manera gráfica, la solución para un sistema de desigualdades lineales.
2. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $<$ y la otra desigualdad tiene $\geq$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.
3. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $\leq$ y la otra desigualdad tiene $\geq$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.
4. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad tiene $<$ y la otra desigualdad tiene $>$, ¿el punto de intersección, de las dos rectas frontera de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explique.

Práctica de habilidades

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

5. $2x - y < 4$
   $y \geq -x + 2$

6. $y \leq -2x + 1$
   $y > -3x$

7. $y < 3x - 2$
   $y \leq -2x + 3$

8. $y \geq 2x - 5$
   $y > -3x + 5$

9. $y < x$
   $y \geq 3x + 2$

10. $-3x + 2y \geq -5$
    $y \leq -4x + 7$

11. $-2x + 3y < -5$
    $3x - 8y > 4$

12. $-4x + 3y \geq -4$
    $y > -3x + 3$

13. $-4x + 5y < 20$
    $x \geq -3$

14. $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$
    $y > -4$

15. $x \leq 4$
    $y \geq -2$

16. $x \geq 0$
    $x - 3y < 6$

17. $5x + 2y > 10$
    $3x - y > 3$

18. $3x + 2y > 8$
    $x - 5y < 5$

19. $-2x > y + 4$
    $-x < \frac{1}{2}y - 1$

20. $y \leq 3x - 2$
    $\frac{1}{3}y < x + 1$

21. $y < 3x - 4$
    $6x \geq 2y + 8$

22. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \geq 2$
    $2x - 3y \leq -6$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades. Utilice el método analizado en los ejemplos 4 y 5.

23. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $2x + 3y \leq 6$
    $4x + y \leq 4$

24. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x + y \leq 6$
    $7x + 4y \leq 28$

25. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $2x + 3y \leq 8$
    $4x + 2y \leq 8$

26. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $3x + 2y \leq 18$
    $2x + 4y \leq 20$

27. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $3x + y \leq 9$
    $2x + 5y \leq 10$

28. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $5x + 4y \leq 16$
    $x + 6y \leq 18$

29. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x \leq 4$
    $x + y \leq 6$
    $x + 2y \leq 8$

30. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x \leq 4$
    $2x + 3y \leq 18$
    $4x + 2y \leq 20$

31. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x \leq 15$
    $30x + 25y \leq 750$
    $10x + 40y \leq 800$

32. $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x \leq 15$
    $40x + 25y \leq 1000$
    $5x + 30y \leq 900$

Determine la solución de cada desigualdad.

33. $|x| < 2$

34. $|x| > 1$

35. $|y - 2| \leq 4$

36. $|y| \geq 2$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

37. $|y| > 2$
    $y \leq x + 3$

38. $|x| > 1$
    $y \leq 3x + 2$

39. $|y| < 4$
    $y \geq -2x + 2$

40. $|x - 2| \leq 3$
    $x - y > 2$

41. $|x + 2| < 3$
    $|y| > 4$

42. $|x - 2| > 1$
    $y > -2$

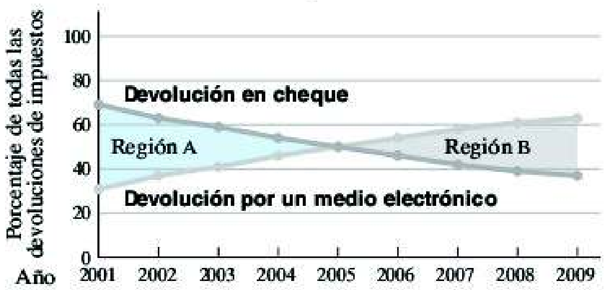
43. $|x - 3| \leq 4$
    $|y + 2| \leq 1$

44. $|x + 1| \leq 2$
    $|y - 3| \leq 1$

Resolución de problemas

45. Devolución de impuestos La gráfica siguiente muestra el porcentaje de impuestos federales devueltos de manera electrónica y por medio de cheque durante los años de 2001 a 2005 y la proyección hasta el año 2009. La información para la gráfica se obtuvo del sitio web del IRS.

Método de devolución de impuestos federales



Fuente: Servicio Interno de Ingresos: www.irs.gov>pubs

Sea $P(t)$ las devoluciones mediante cheque (línea color negro) y sea $E(t)$ la devolución por medios electrónicos (línea en color rojo). Las regiones entre las dos curvas se identifican como Región A, sombreada en color rosa o región B sombreada en color gris.

a) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

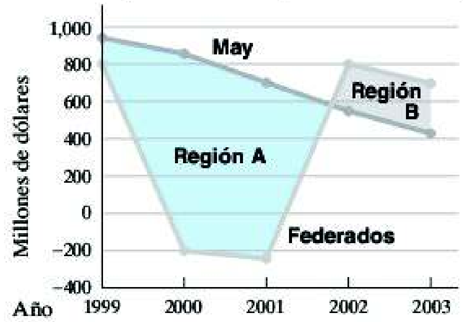
$$y \leq P(t)$$
$$y \geq E(t)$$

b) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \geq P(t)$$
$$y \leq E(t)$$

46. Ingreso de Almacenes departamentales La gráfica siguiente muestra el ingreso neto anual, en millones de dólares, durante 1999-2003 de los Almacenes Departamentales Federados (Macy's, Bloomingdale's, Burdines) y los Almacenes Departamentales May (Hecht's, Lord & Taylor, Filene's).

Ingreso neto anual para Almacenes Departamentales Federados y Almacenes Departamentales May



Fuente: Thomson Financial, las compañías, *The Washington Post* (21/1/05)

Sea $P(t)$ el ingreso para los Almacenes Departamentales May (línea en negro) y sea $Q(t)$ el ingreso para los Almacenes Departamentales Federados (línea en rojo). Las regiones entre las dos curvas están identificadas como Región A, sombreada en rosa, o Región B, sombreada en gris.

a) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \geq P(t)$$
$$y \leq Q(t)$$

b) ¿Cuál región, A o B, es una solución para el sistema de desigualdades?

$$y \leq P(t)$$
$$y \geq Q(t)$$

47. Para un sistema de desigualdades lineales, ¿es posible no tener solución? Explique. Construya un ejemplo para apoyar su respuesta.

48. Para un sistema de dos desigualdades lineales, ¿es posible tener exactamente una solución? Explique. Si su respuesta es sí, construya un ejemplo para apoyar su respuesta.

Sin graficar, determine el número de soluciones en cada sistema de desigualdades que se indica. Explique sus respuestas.

49. $3x - y \leq 4$
$3x - y > 4$

50. $2x + y < 6$
$2x + y > 6$

51. $5x - 2y \leq 3$
$5x - 2y \geq 3$

52. $5x - 3y > 5$
$5x - 3y > -1$

53. $2x - y < 7$
$3x - y < -2$

54. $x + y \leq 0$
$x - y \geq 0$

Retos

Determine la solución para cada sistema de desigualdades.

55. $y \geq x^2$
$y \leq 4$

56. $y < 4 - x^2$
$y > -5$

57. $y < |x|$
$y < 4$

58. $y \geq |x - 2|$
$y \leq -|x - 2|$

Ejercicios de repaso acumulativo

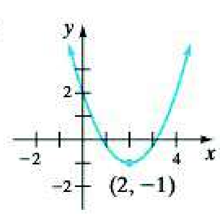
[2.2] **59.** Una fórmula para palancas en física es $f_1d_1 + f_2d_2 = f_3d_3$. De esta fórmula despeje a f_2.

[3.2] *Establezca el dominio y rango de cada función.*

60. $\{(4, 3), (5, -2), (-1, 2), (0, -5)\}$

61. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 4$

62.



Resumen del capítulo 4

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — **EJEMPLOS**

Sección 4.1

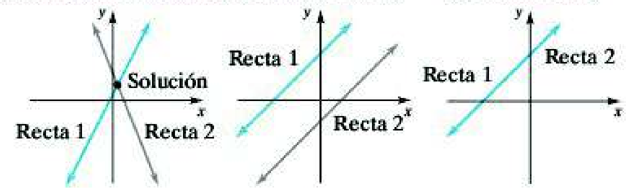
Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema que tiene dos o más ecuaciones lineales.
Una **solución** para un sistema de ecuaciones lineales es la pareja ordenada o parejas ordenadas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 6 \end{cases}$

La solución del sistema de ecuaciones anterior es (2, 7).

Un **sistema consistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene una solución
Un **sistema inconsistente de ecuaciones** es un sistema que no tiene solución.
Un **sistema dependiente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones.

Exactamente 1 solución (rectas que se intersecan) | **No hay solución** (rectas paralelas) | **Número infinito de soluciones** (la misma recta)



Consistente (a) | **Inconsistente** (b) | **Dependiente** (c)

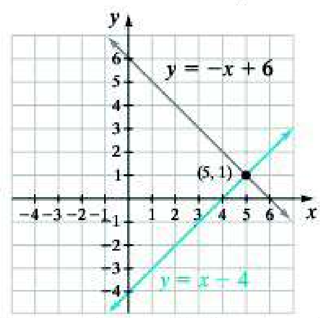
Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales

1. Grafique ambas rectas.
2. Determine el (los) punto(s) de intersección, si existe(n).
3. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones

$$y = x - 4$$
$$y = -x + 6$$

Grafique ambas rectas en el mismo conjunto de ejes



Una comprobación muestra que (5, 1) es una solución para el sistema de ecuaciones.

Para resolver por sustitución un sistema lineal de ecuaciones

1. Despeje una variable de alguna ecuación.
2. Sustituya la expresión que encontró para la variable en el paso 1 en la otra ecuación.
3. Resuelva la ecuación que obtuvo en el paso 2 para determinar el valor de esta variable.
4. Sustituya el valor, que encontró en el paso 3, en la ecuación del paso 1. Resuelva la ecuación para determinar la variable restante.
5. Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelva, por sustitución, el sistema de ecuaciones.

$$y = -2x - 1$$
$$5x + 6y = 8$$

Sustituya $y = -2x - 1$ en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 8 \\ 5x + 6(-2x - 1) &= 8 \\ 5x - 12x - 6 &= 8 \\ -7x - 6 &= 8 \\ -7x &= 14 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Sustituya $x = -2$ en $y = -2x - 1$ para obtener

$$y = -2x - 1$$
$$y = -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$$

Una comprobación muestra que $(-2, 3)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.1 (continuación)	
Para resolver, por el método de la suma (o eliminación), un sistema lineal de ecuaciones **1.** Si es necesario, reescriba cada ecuación en la forma general. **2.** Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante(s) para que cuando las ecuaciones se sumen, la suma tenga una sola variable. **3.** Sume los lados respectivos de las ecuaciones. **4.** Resuelva para la variable de la ecuación que obtuvo en el paso 3. **5.** Sustituya el valor que encontró en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar los valores de la variable restante. **6.** Compruebe su solución en todas las ecuaciones del sistema.	Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución. $2x + y = 4$ (ec. 1) $x - 2y = 2$ (ec. 2) $4x + 2y = 8$ (ec. 1) Multiplicada por 2 $x - 2y = 2$ $5x = 10$ Suma de las ecuaciones $x = 2$ Ahora despeje a y mediante la (ec. 1). $2(2) + y = 4$ $y = 0$ La solución es (2, 0).
Sección 4.2	
Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, utilice el método de sustitución o el método de la suma.	Resuelva el sistema de ecuaciones. $x - y + 3z = -1$ (ec. 1) $4y - 7z = 2$ (ec. 2) $z = 2$ (ec. 3) Sustituya 2 por z en (ec. 2) para obtener el valor de y. $4y - 7z = 2$ $4y - 7(2) = 2$ $4y = 16$ $y = 4.$ Sustituya 4 por y y 2 por z en la (ec. 1) para obtener el valor para x. $x - y + 3z = -1$ $x - 4 + 3(2) = -1$ $x = -3.$ Una verificación muestra que $(-3, 4, 2)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.
Sección 4.3	
Aplicaciones: Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	La suma de las áreas de dos círculos es 180 metros cuadrados. La diferencia de sus áreas es 20 metros cuadrados. Determine el área de cada círculo. **Solución** Sea x el área del círculo mayor y y el área del círculo menor. Las dos ecuaciones para este sistema son $x + y = 180 \leftarrow$ Suma de áreas $x - y = 20 \leftarrow$ Diferencia de áreas $2x = 200$ $x = 100$ Sustituya 100 por x en la primera ecuación para obtener $x + y = 180$ $100 + y = 180$ $y = 80$ El área del círculo mayor es 100 m^2 y el área del círculo más pequeño es 80 m^2.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 4.4

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números entre corchetes, Los números dentro de los corchetes se denominan **elementos**.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 8 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de renglones y columnas

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 9 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

Una **matriz aumentada** es una matriz separada por una línea vertical. Para un sistema de ecuaciones, en la matriz aumentada, los coeficientes de las variables se colocan del lado izquierdo de la línea vertical y las constantes del lado derecho.

La **forma triangular** de una matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

SISTEMA

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 5x + 7y &= -4 \end{aligned}$$

MATRIZ AUMENTADA

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

forma triangular $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$

Las **transformaciones de renglones** pueden utilizarse para reescribir una matriz en la forma triangular.

Procedimiento para transformaciones de renglones

1. Todos los números en un renglón pueden multiplicarse (o dividirse) por cualquier número real distinto de cero.
2. Todos los números de un renglón pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Luego, estos productos pueden sumarse a los números correspondientes de cualquier otro renglón.
3. El orden de los renglones puede intercambiarse.

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ 6x - 5y &= 16 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 6 & -5 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -29 & 58 \end{array}\right] -6R_1 + R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] -\frac{1}{29}R_2$$

El sistema equivalente de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sustituya -2 por y en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + 4(-2) &= -7 \\ x - 8 &= -7 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

La solución es $(1, -2)$.

Un sistema de ecuaciones es **inconsistente** y **no tiene solución** si usted obtiene una matriz aumentada en la que un renglón de números tiene únicamente ceros del lado izquierdo de la línea vertical y un número distinto de cero en el lado derecho de la línea vertical.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

El segundo renglón muestra que este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones es **dependiente** y tiene un **número infinito de soluciones** si obtiene una matriz aumentada en la que aparece un renglón con únicamente ceros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -12 \end{array}\right]$$

El segundo renglón muestra que este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 4.5

El **determinante** de una matriz de 2×2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota con $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(-2) = 3 + 10 = 13$$

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales
Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0$$

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 6$$
$$4x - 3y = -13$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = -50$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-10} = 5$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El **determinante menor** (o sólo menor) **de a_1** se determina eliminando los elementos del mismo renglón y la misma columna que tienen al elemento a_1.

Para $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$, el determinante menor de a_1 es $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$.

Desarrollo del determinante por los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_1} - a_2\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_2} + a_3\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_3}$$

Evalúe $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ mediante el desarrollo de menores de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8) + 1(-18) + 3(15)$$
$$= 16 - 18 + 45$$
$$= 43$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.5 (continuación)

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Resuelva el sistema de ecuaciones,

$$2x + y + z = 0$$
$$4x - y + 3z = -9$$
$$6x + 2y + 5z = -8$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -9 & 3 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -20 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 30$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{-10} = -3$$

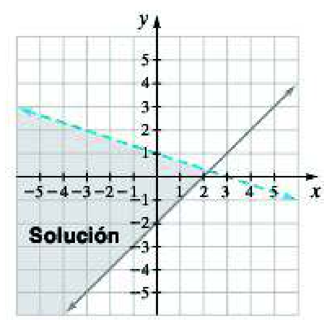
La solución es $\left(\frac{1}{2}, 2, -3\right)$.

Sección 4.6

Para resolver un sistema de desigualdades lineales, grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

Determine la solución para el sistema de desigualdades.

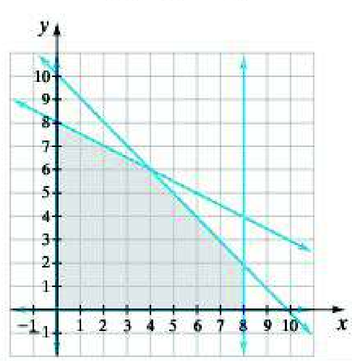
$$y < -\frac{1}{3}x + 1$$
$$x - y \leq 2$$

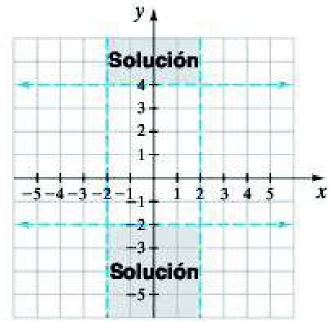


La **programación lineal** es un proceso en donde dos o más desigualdades lineales se grafican en los mismos ejes.

Determine la solución para el sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq 8$$
$$x + y \leq 10$$
$$x + 2y \leq 16$$



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.6 (continuación)	
Para sistemas de desigualdades lineales, que incluyan valores absolutos: Si $\lvert x\rvert < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$. Si $\lvert x\rvert > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$	Determine la solución para el sistema de desigualdades. $\lvert x\rvert < 2$ $\lvert y - 1\rvert > 3$ 

Ejercicios de repaso del capítulo 4

[4.1] *Escriba cada ecuación en la forma pendiente ordenada al origen. Sin graficar ni resolver el sistema de ecuaciones, establezca si el sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente. También indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.*

1. $2x - 3y = -1$, $-4x + 6y = 1$

2. $4x - 5y = 8$, $3x + 4y = 9$

3. $y = \frac{1}{3}x + 4$, $x + 2y = 8$

4. $6x = 5y - 8$, $4x = 6y + 10$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones de manera gráfica. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indíquelo.

5. $y = x + 3$, $y = 2x + 5$

6. $x = -5$, $y = 3$

7. $3x + 3y = 12$, $2x - y = -4$

8. $3y - 3x = -9$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones mediante sustitución.

9. $y = -4x + 2$, $y = 3x - 12$

10. $4x - 3y = -1$, $y = 2x + 1$

11. $a = 2b - 8$, $2b - 5a = 0$

12. $2x + y = 12$, $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$

Determine la solución de cada sistema de ecuaciones utilizando el método de la suma.

13. $x - 2y = 5$, $2x + 2y = 4$

14. $-2x - y = 5$, $2x + 2y = 6$

15. $2a + 3b = 7$, $a - 2b = -7$

16. $0.4x - 0.3y = 1.8$, $-0.7x + 0.5y = -3.1$

17. $4r - 3s = 8$, $2r + 5s = 8$

18. $-2m + 3n = 15$, $3m + 3n = 10$

19. $x + \frac{3}{5}y = \frac{11}{5}$, $x - \frac{3}{2}y = -2$

20. $4x + 4y = 16$, $y = 4x - 3$

21. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$, $x + \frac{5}{4}y = \frac{7}{2}$

22. $2x - 5y = 12$, $x - \frac{4}{3}y = -2$

23. $2x + y = 4$, $3x + \frac{3}{2}y = 6$

24. $2x = 4y + 5$, $2y = x - 7$

[4.2] *Determine la solución de cada sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución o el de la suma.*

25. $x - 2y - 4z = 13$, $3y + 2z = -2$, $5z = -20$

26. $2a + b - 2c = 5$, $3b + 4c = 1$, $3c = -6$

27. $x + 2y + 3z = 3$, $-2x - 3y - z = 5$, $3x + 3y + 7z = 2$

28. $-x - 4y + 2z = 1$, $2x + 2y + z = 0$, $-3x - 2y - 5z = 5$

29. $3y - 2z = -4$
$3x - 5z = -7$
$2x + y = 6$

30. $a + 2b - 5c = 19$
$2a - 3b + 3c = -15$
$5a - 4b - 2c = -2$

31. $x - y + 3z = 1$
$-x + 2y - 2z = 1$
$x - 3y + z = 2$

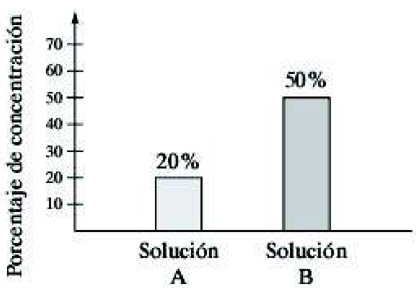
32. $-2x + 2y - 3z = 6$
$4x - y + 2z = -2$
$2x + y - z = 4$

[4.3] *Exprese cada problema como un sistema de ecuaciones lineales y utilice el método de su elección para determinar la solución del problema.*

33. Edades Luan Baker es 10 años mayor que su sobrina Jennifer Miesen. Si la suma de sus edades es 66, determine la edad de Luan y la edad de Jennifer.

34. Velocidad del viento Un avión puede viajar a 560 millas por hora con el viento a favor y a 480 millas por hora con el viento en contra. Determine la velocidad del viento y la velocidad del avión con viento en calma.

35. Mezcla de soluciones Sally Dove tiene dos soluciones ácidas como se muestra. ¿Qué cantidad de cada una debe mezclar para obtener 6 litros de una solución de ácido al 40%?



36. Hockey sobre hielo La admisión a un juego de hockey sobre hielo es de $15 por adulto y $11 por niño. Se vendieron un total de 650 boletos, determine cuántos boletos para niños y cuántos boletos para adultos se vendieron, si se recolectó un total de $8790.

37. Regresó al espacio John Glenn fue el primer astronauta americano en estar en órbita alrededor de la Tierra. Muchos años después regresó al espacio. La segunda vez que regresó al espacio, tenía cinco años menos que el doble de su edad cuando estuvo en el espacio por primera vez. La suma de sus edades de ambas veces que estuvo en el espacio es 118. Determine su edad cada vez que estuvo en el espacio.

38. Cuenta de ahorros Jorge Minez tiene un total de $40,000 invertidos en tres cuentas de ahorro diferentes. Tiene algo de dinero invertido en una cuenta que otorga el 7% de interés. En la segunda cuenta tiene $5,000 menos que en la primera, y recibe el 5% de interés. La tercera cuenta da el 3% de interés. Si el interés total anual que recibe Jorge es de $2300, determine la cantidad en cada cuenta.

[4.4] *Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando matrices.*

39. $x + 5y = 1$
$-2x - 8y = -6$

40. $2x - 5y = 1$
$2x + 4y = 10$

41. $3y = 6x - 12$
$4x = 2y + 8$

42. $2x - y - z = 5$
$x + 2y + 3z = -2$
$3x - 2y + z = 2$

43. $3a - b + c = 2$
$2a - 3b + 4c = 4$
$a + 2b - 3c = -6$

44. $x + y + z = 3$
$3x + 4y = -1$
$y - 3z = -10$

[4.5] *Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando determinantes.*

45. $7x - 8y = -10$
$-5x + 4y = 2$

46. $x + 4y = 5$
$5x + 3y = -9$

47. $9m + 4n = -1$
$7m - 2n = -11$

48. $p + q + r = 5$
$2p + q - r = -5$
$3p + 2q - 3r = -12$

49. $-2a + 3b - 4c = -7$
$2a + b + c = 5$
$-2a - 3b + 4c = 3$

50. $y + 3z = 4$
$-x - y + 2z = 0$
$x + 2y + z = 1$

[4.6] *Grafique la solución de cada sistema de desigualdades.*

51. $-x + 3y > 6$
$2x - y \leq 2$

52. $5x - 2y \leq 10$
$3x + 2y > 6$

53. $y > 2x + 3$
$y < -x + 4$

54. $x > -2y + 4$
$y < -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

55. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 6$
$4x + y \leq 8$

56. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + y \leq 6$
$4x + 5y \leq 20$

57. $|x| \leq 3$
$|y| > 2$

58. $|x| > 4$
$|y - 2| \leq 3$

Examen de práctica del capítulo 4

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en **el CD-Rom que acompaña a este libro.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Defina **a)** un sistema consistente de ecuaciones, **b)** un sistema dependiente de ecuaciones y **c)** un sistema inconsistente de ecuaciones.

Determine, sin resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. Establezca si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna solución, o un número infinito de soluciones.

2. $5x + 2y = 4$
   $6x = 3y - 7$
3. $5x + 3y = 9$
   $2y = -\frac{10}{3}x + 6$
4. $5x - 4y = 6$
   $-10x + 8y = -10$

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante el método indicado.

5. $y = 3x - 2$
   $y = -2x + 8$
   gráficamente
6. $y = -x + 6$
   $y = 2x + 3$
   gráficamente
7. $y = 4x - 3$
   $y = 5x - 4$
   por sustitución
8. $4a + 7b = 2$
   $5a + b = -13$
   por sustitución
9. $8x + 3y = 8$
   $6x + y = 1$
   por suma
10. $0.3x = 0.2y + 0.4$
    $-1.2x + 0.8y = -1.6$
    por suma
11. $\frac{3}{2}a + b = 6$
    $a - \frac{5}{2}b = -4$
    por suma
12. $x + y + z = 2$
    $-2x - y + z = 1$
    $x - 2y - z = 1$
    por suma
13. Escriba la matriz aumentada para el sistema de ecuaciones siguiente.
    $-2x + 3y + 7z = 5$
    $3x - 2y + z = -2$
    $x - 6y + 9z = -13$
14. Considere la matriz aumentada siguiente.
    $$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$
    Muestre los resultados obtenidos al multiplicar los elementos del tercer renglón por -2 y sumando los productos a sus elementos correspondientes en el segundo renglón.

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante matrices.

15. $2x + 7y = 1$
    $3x + 5y = 7$
16. $x - 2y + z = 7$
    $-2x - y - z = -7$
    $4x + 5y - 2z = 3$

Evalúe cada determinante.

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$
18. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Resuelva cada sistema de ecuaciones mediante determinantes y la regla de Cramer.

19. $4x + 3y = -6$
    $-2x + 5y = 16$
20. $2r - 4s + 3t = -1$
    $-3r + 5s - 4t = 0$
    $-2r + s - 3t = -2$

Utilice el método de su elección para determinar la solución a cada problema.

21. **Mezcla de semillas de girasol** Agway Gardens tiene semillas de girasol, en un barril, que vende a \$0.49 la libra y una mezcla especial para aves que vende a \$0.89 la libra. ¿Cuánto debe mezclar de cada una para obtener 20 libras de una mezcla que venda a \$0.73 la libra?

22. **Mezcla de soluciones** Tyesha Blackwell, una química, tiene soluciones al 6% y 15% de ácido sulfúrico. ¿Cuánto de cada solución debe mezclar para obtener 10 litros de una solución al 9%?
23. **Suma de números** La suma de tres números es 29. El mayor número es cuatro veces el menor de los números. El tercer número es uno más que el doble del número más pequeño. Determine los tres números.

Determine la solución para cada sistema de desigualdades.

24. $3x + 2y < 9$
    $-2x + 5y \leq 10$
25. $|x| > 3$
    $|y| \leq 1$

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material están indicados después de la respuesta.

1. Evalúe $48 \div \left\{4\left[3 + \left(\frac{5 + 10}{5}\right)^2\right] - 32\right\}$.

2. Considere el conjunto de números siguiente.

$$\left\{\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1\right\}$$

Indique los elementos del conjunto que sean
   a) números naturales;
   b) números racionales,
   c) números reales.

3. Escriba los números siguientes de menor a mayor.

$$-1, |-4|, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, -|-8|, |-12|$$

Resuelva.

4. $-[3 - 2(x - 4)] = 3(x - 6)$

5. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 2$

6. $|2x - 3| - 5 = 4$

7. Despeje x de la fórmula $M = \frac{1}{2}(a + x)$.

8. Determine el conjunto solución de la desigualdad.

$$0 < \frac{3x - 2}{4} \leq 8$$

9. Simplifique $\left(\frac{3x^2y^{-2}}{y^3}\right)^{-2}$.

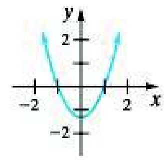
10. Grafique $2y = 3x - 8$.

11. Escriba en forma pendiente intercepción la ecuación de la recta paralela a la recta $2x - 3y = 8$ y que pasa por el punto $(2, 3)$.

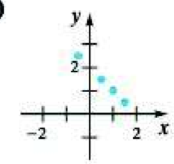
12. Grafique la desigualdad $6x - 3y < 12$.

13. Determine cuáles de las gráficas siguientes representan funciones. Explique.

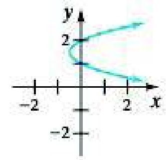
a)



b)



c)



14. Si $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$, determine

   a) $f(-4)$ **b)** $f(h)$ **c)** $f(3)$.

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

15. $3x + y = 6$
    $y = 4x - 1$

16. $2p + 3q = 11$
    $-3p - 5q = -16$

17. $x - 2y = 0$
    $2x + z = 7$
    $y - 2z = -5$

18. **Ángulos de un triángulo** Si el ángulo mayor de un triángulo es nueve veces la medida del ángulo menor, y el ángulo mediano es 70° mayor que la medida del menor, determine la medida de los tres ángulos.

19. **Caminar y trotar** Mark Simmons camina con una velocidad de 4 millas por hora y Judy Bolin trota a 6 millas por hora. Mark comienza a caminar $\frac{1}{2}$ hora antes de que Judy comience a trotar. Si Judy trota en la misma ruta que Mark, ¿cuánto tiempo después de que Judy comienza a trotar alcanzará a Mark?

20. **Concierto de rock** En un concierto de rock hay dos precios diferentes de asientos. Los asientos más caros se venden a \$20 y los baratos se venden a \$16. Si se vende un total de 1000 boletos y el importe total es de \$18,400, ¿cuántos asientos de cada tipo se vendieron?