5 Polinomios y funciones polinomiales

OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En la primera parte de este capítulo estudiaremos los polinomios y las funciones polinomiales. Después enfocaremos nuestra atención en la factorización. *Para resolver los problemas de muchos de los capítulos siguientes, será necesario que haya comprendido bien el tema de factorización.* Ponga particular atención en cómo utilizar la factorización para determinar las intersecciones con el eje *x* de una función cuadrática. Más adelante volveremos a hablar de este tema.

CUANDO UN OBJETO SE lanza directamente hacia arriba o se deja caer, en cualquier instante su altura respecto del piso puede representarse mediante una función polinomial. En el ejercicio 91 de la página 305 determinamos la altura de un objeto, respecto del piso, seis segundos después de que se deja caer desde lo alto del edificio Empire State.

5.1 Suma y resta de polinomios

1. Determinar el grado de un polinomio.
2. Evaluar funciones polinomiales.
3. Entender las gráficas de funciones polinomiales.
4. Sumar y restar polinomios.

1 Determinar el grado de un polinomio

Recuerde que, según se explicó en el capítulo 2, las partes que se suman o restan en una expresión matemática se denominan **términos**. El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos es la suma de los exponentes de las variables, si las hay. Las constantes distintas de cero tienen grado 0, y al término 0 no se le asigna grado.

Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros no negativos, y donde los denominadores no incluyen variables. La expresión $3x^2 + 2x + 6$ es un ejemplo de un *polinomio con una variable, x*. La expresión $x^2y - 2x + 3$ es un ejemplo de un *polinomio con dos variables, x y y*. Las expresiones $x^{1/2}$ y $\frac{1}{x}$ (o x^{-1}) *no* son polinomiales, ya que los exponentes de las variables no son enteros no negativos. La expresión $\frac{1}{x-1}$ *no* es un polinomio, ya que el denominador incluye una variable.

El **término principal** de un polinomio es el término de grado más alto. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.

EJEMPLO 1 Indique el número de términos, el grado, el término principal y el coeficiente principal de cada polinomio.

a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$ **b)** $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$

Solución Organizaremos las respuestas en una tabla.

Polinomio	Número de términos	Grado del polinomio	Término principal	Coeficiente principal
a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$	4	5 (de $2x^5$)	$2x^5$	2
b) $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$	3	7 (de $3xy^2z^4$)	$3xy^2z^4$	3

Ahora resuelva el ejercicio 29

Los polinomios se clasifican de acuerdo con el número de términos de que constan, tal como se indica en la tabla siguiente.

Tipo de polinomio	Descripción	Ejemplos
Monomio	Un polinomio con un término	$4x^2$, $6x^2y$, 3, $-2xyz^5$, 7
Binomio	Un polinomio con dos términos	$x^2 + 1$, $2x^2 - y$, $6x^3 - 5y^2$
Trinomio	Un polinomio con tres términos	$x^3 + 6x - 8$, $x^2y - 9x + y^2$

A los polinomios que constan de más de tres términos no se les da un nombre específico, ya que el prefijo *poli* significa *muchos*. Un polinomio se denomina **lineal** si es de grado 0 o 1. A un polinomio con una variable se le denomina **cuadrático** si es de grado 2, y **cúbico** si es de grado 3.

Tipo de polinomio	Ejemplos
Lineal	$2x - 4$, 5
Cuadrático	$3x^2 + x - 6$, $4x^2 - 8$
Cúbico	$-4x^3 + 3x^2 + 5$, $2x^3 + 7x$

Los polinomios $2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ y $4x^2 - 3xy + 5y^2$ son ejemplos de polinomios en **orden descendente** de la variable x, ya que los exponentes de la variable x descienden (o van decreciendo) al recorrer los términos de izquierda a derecha. Por lo general, los polinomios se escriben en orden descendente respecto de alguna variable.

EJEMPLO 2 Escriba cada uno de los siguientes polinomios en orden descendente de la variable x.

a) $5x + 4x^2 - 6$ **b)** $xy - 6x^2 + 8y^2$

Solución

a) $5x + 4x^2 - 6 = 4x^2 + 5x - 6$

b) $xy - 6x^2 + 8y^2 = -6x^2 + xy + 8y^2$

Ahora resuelva el ejercicio 25

2 Evaluar funciones polinomiales

La expresión $2x^3 + 6x^2 + 3$ es un polinomio, y si escribimos $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3$, tenemos una **función polinomial**. En una **función polinomial**, la expresión utilizada para describir la función es un polinomio. Para evaluar una función polinomial se utiliza la sustitución, tal como se hizo para evaluar otras funciones en el capítulo 3.

EJEMPLO 3 Para la función polinomial $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 7$, determine

a) $P(0)$ **b)** $P(3)$ **c)** $P(-2)$

Solución

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 7 \\ P(0) &= 4(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 7 \\ &= 0 - 0 - 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(3) &= 4(3)^3 - 6(3)^2 - 2(3) + 7 \\ &= 4(27) - 6(9) - 6 + 7 = 55 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(-2) &= 4(-2)^3 - 6(-2)^2 - 2(-2) + 7 \\ &= 4(-8) - 6(4) + 4 + 7 = -45 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

Con frecuencia las empresas, los gobiernos y otras organizaciones necesitan llevar registros y hacer proyecciones de ventas, utilidades, cambios en la población, efectividad de nuevas drogas, etcétera. Para realizar estas tareas, muchas veces se utilizan gráficas y funciones. El ejemplo 4 ilustra uno de esos casos.

FIGURA 5.1

EJEMPLO 4 **Viajeros que se hospedan en un Marriot** La gráfica de barras de la **figura 5.1** muestra el porcentaje de viajeros que consideran Marriot como primera opción entre los principales hoteles, de 2000 a 2004. La función polinomial que puede usarse para aproximar el porcentaje de viajeros que consideran el Marriot como primera opción es

$$M(t) = t^2 - 5t + 35$$

donde t es el número de años a partir de 2000 y $0 \le t \le 4$.

a) Por medio de esta función, estime el porcentaje de viajeros que consideraron el Marriot como primera opción en 2004.

b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica de barras. ¿La gráfica de barras apoya su respuesta?

c) Si esta tendencia continúa después de 2004, estime el porcentaje de viajeros que considerarán el Marriot como su primera opción en 2008.

Solución **a)** Entienda el problema Necesitamos determinar el valor de t para sustituir en esta función. Como t es el número de años a partir de 2000, 2004 corresponde a $t = 4$. Así, para estimar el porcentaje de viajeros que consideraron el Marriot como su primera opción, evaluamos $M(4)$.

Traduzca y realice los cálculos

$$\begin{aligned} M(t) &= t^2 - 5t + 35 \\ M(4) &= 4^2 - 5\cdot 4 + 35 \\ &= 16 - 20 + 35 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Compruebe y responda El porcentaje de viajeros que consideraron al Marriot como su primera opción en 2004 fue alrededor de 31%.

b) De la parte **a)**, vemos que alrededor de 31% de los viajeros, en 2004, consideraron el Marriot como su primera opción. En la gráfica de barras anterior, la barra para el año 2004 tiene una altura de 31, lo cual significa que casi 31% de los viajeros consideraron el Marriot como su primera opción. Como ambos valores son iguales, concluimos que la gráfica de barras apoya los resultados de la parte **a)**.

c) Entienda el problema Para estimar el porcentaje de viajeros que considerarán el Marriot como su primera opción en 2008, observe que 2008 es 8 años a partir de 2000. Así, $t = 8$ y sustituimos 8 por t en la función polinomial.

Traduzca y realice los cálculos

$$\begin{aligned} M(t) &= t^2 - 5t + 35 \\ M(8) &= 8^2 - 5\cdot 8 + 35 = 64 - 40 + 35 = 59 \end{aligned}$$

Compruebe y responda Si esta tendencia continúa, en 2008 alrededor de 59% de los viajeros considerarían el Marriot como su primera opción entre los hoteles comerciales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

3 Entender las gráficas de funciones polinomiales

Las gráficas de todas las funciones polinomiales son curvas suaves y continuas (es decir, sin interrupciones en su trazo). En la **figura 5.2** se muestra la gráfica de una función polinomial cuadrática. Las gráficas de todas las funciones polinomiales cuadráticas con un *coeficiente principal positivo*, tendrán la forma de la gráfica en la **figura 5.2**.

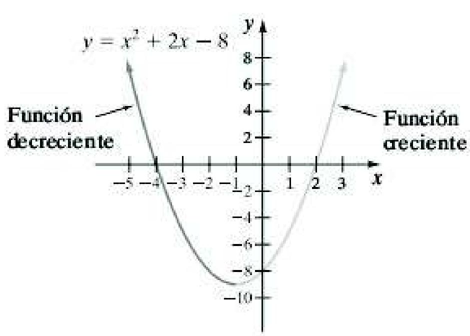


FIGURA 5.2

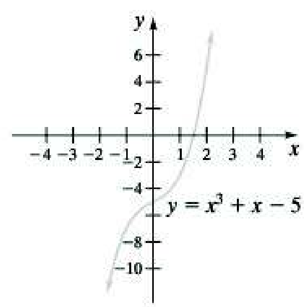


FIGURA 5.3

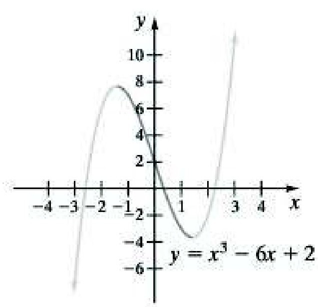


FIGURA 5.4

La gráfica de una función polinomial cúbica con un *coeficiente principal positivo*, puede tener la forma de las gráficas que se ilustran en la **figura 5.3** o la **figura 5.4**. Observe que *siempre que su coeficiente principal sea positivo, la función polinomial crecerá (o se moverá hacia arriba conforme aumente el valor de x, tal como muestra la parte en color negro de la curva) hacia la derecha para algún valor de x*. Por ejemplo, en la **figura 5.2** la gráfica continúa creciendo hacia la derecha de $x = -1$. En la **figura 5.3** la gráfica crece de manera continua, y en la **figura 5.4** lo hace hacia la derecha a partir del punto $x = 1.4$.

La **figura 5.5** muestra una función polinomial cuadrática con un coeficiente principal negativo, y funciones polinomiales cúbicas con coeficientes principales negativos se muestran en la **figura 5.6** y la **figura 5.7**. En la **figura 5.5**, la función cuadrática es decreciente a la derecha de $x = 2$. En la **figura 5.6** la función cúbica decrece de forma continua, y en la **figura 5.7** la función cúbica es decreciente a la derecha de $x = 1.2$.

Las funciones polinomiales con un coeficiente principal negativo decrecerán (o se moverán hacia abajo conforme el valor de x aumente, tal como muestra la parte en color rojo de la curva) hacia la derecha de algún valor de x.

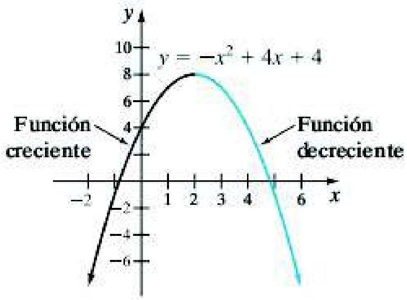


FIGURA 5.5

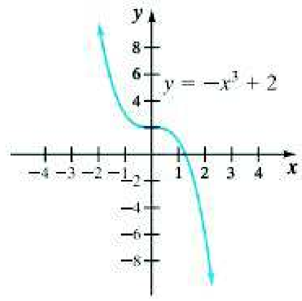


FIGURA 5.6

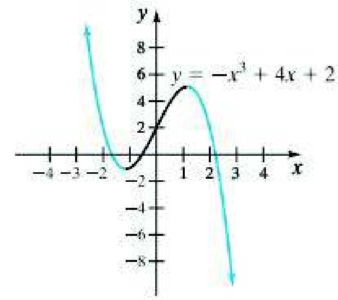


FIGURA 5.7

¿Por qué el coeficiente principal determina si una función polinomial crecerá o decrecerá hacia la derecha de algún valor de x? El coeficiente principal es el coeficiente del término con el exponente de la variable con el valor más alto. Conforme el valor de x aumenta, este término terminará por dominar a todos los demás de la función. Por lo tanto, si el coeficiente de este término es positivo, *en algún momento* la función comenzará a crecer a medida que el valor de x aumente. Si el coeficiente principal es negativo, *en algún momento* la función comenzará a decrecer a medida que el valor de x disminuya. Esta información, junto con la verificación de la intersección con el eje y de la gráfica, puede ser útil para determinar si una gráfica es correcta o si está completa. Lea el siguiente recuadro Cómo utilizar su calculadora graficadora, incluso si no emplea una. Además, resuelva los ejercicios 99 a 102 en las páginas 305 y 306.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Siempre que grafique una función polinomial en su calculadora graficadora, asegúrese de que su pantalla muestre todos los cambios de dirección en su gráfica. Por ejemplo, suponga que grafica $y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ en su calculadora graficadora. Si emplea la ventana estándar, obtendrá la gráfica que se muestra en la **figura 5.8**.

Sin embargo, a partir de lo que acabamos de analizar debe darse cuenta de que, como el coeficiente principal, 0.1 es positivo, la gráfica debe crecer hacia la derecha de algún valor de x. Esto no resulta claro en la gráfica de la **figura 5.8**. Si ajusta su ventana para que aparezca como en la **figura 5.9**, obtendrá la gráfica que se muestra allí. Ahora puede ver cómo crece ligeramente la gráfica hacia la derecha a partir de $x = 12$. Al graficar, muchas veces es útil determinar la intersección con el eje y para establecer qué valores se deben usar en un rango. Recuerde que para determinar la intersección con el eje y, establecemos $x = 0$ y despejamos y. Por ejemplo, si se grafica $y = 4x^3 + 6x^2 + x - 180$ la intersección con el eje y estará en -180, es decir, en el punto $(0, -180)$.

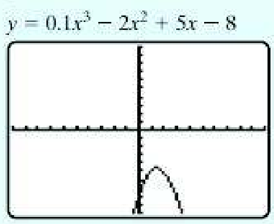


FIGURA 5.8

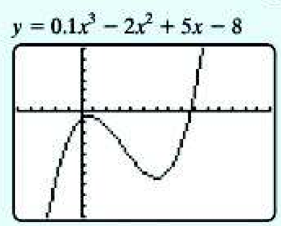


FIGURA 5.9 $[-10, 30, 2, -100, 60, 10]$

EJERCICIOS

Utilice su calculadora para graficar cada polinomio. Asegúrese que su ventana muestre todos los cambios de dirección de la gráfica.

1. $y = 0.2x^3 + 5.1x^2 - 6.2x + 9.3$
2. $y = 4.1x^3 - 19.6x^2 + 5.4x - 60.2$

4 Sumar y restar polinomios

En la sección 3.6, cuando determinamos sumas y diferencias de funciones, agregamos y sustraemos polinomios, aunque en ese momento no los llamábamos así. Para *sumar o restar polinomios*, primero quitamos los paréntesis (si los hay), y después reducimos los términos semejantes.

EJEMPLO 5 Simplifique $(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\
&= 4x^2 - 6x + 3 + 2x^2 + 5x - 1 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
&= \underbrace{4x^2 + 2x^2}_{6x^2} \underbrace{- 6x + 5x}_{-x} \underbrace{+ 3 - 1}_{+2} && \text{Reacomodar términos.} \\
&= 6x^2 - x + 2 && \text{Reducir términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 45

EJEMPLO 6 Simplifique $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 2)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 2) \\
&= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 8y - 2 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
&= \underbrace{3x^2y + x^2y}_{4x^2y} \underbrace{- 4xy + 2xy}_{-2xy} \underbrace{+ y + 8y}_{+9y} - 2 && \text{Reacomodar términos.} \\
&= 4x^2y - 2xy + 9y - 2 && \text{Reducir términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

Sugerencia útil

Recuerde que $-x$ significa $-1 \cdot x$. Así $-(2x^2 - 4x + 6)$ significa $-1(2x^2 - 4x + 6)$ y se aplica la propiedad distributiva. Cuando resta un polinomio de otro, los *signos de cada término* del polinomio que se resta deben cambiarse. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 3 - (2x^2 - 4x + 6) &= x^2 - 6x + 3 - 1(2x^2 - 4x + 6) \\
&= x^2 - 6x + 3 - 2x^2 + 4x - 6 \\
&= -x^2 - 2x - 3
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Reste $(-x^2 - 2x + 11)$ de $(x^3 + 4x + 6)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(x^3 + 4x + 6) - (-x^2 - 2x + 11) \\
&= (x^3 + 4x + 6) - 1(-x^2 - 2x + 11) && \text{Insertar 1.} \\
&= x^3 + 4x + 6 + x^2 + 2x - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\
&= x^3 + x^2 + 4x + 2x + 6 - 11 && \text{Reacomodar los términos.} \\
&= x^3 + x^2 + 6x - 5 && \text{Reducir términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 67

EJEMPLO 8 Simplifique $x^2y - 4xy^2 + 5 - (2x^2y - 3y^2 + 11)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&x^2y - 4xy^2 + 5 - 1(2x^2y - 3y^2 + 11) && \text{Insertar 1.} \\
&= x^2y - 4xy^2 + 5 - 2x^2y + 3y^2 - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\
&= x^2y - 2x^2y - 4xy^2 + 3y^2 + 5 - 11 && \text{Reacomodar los términos.} \\
&= -x^2y - 4xy^2 + 3y^2 - 6 && \text{Reducir términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Observe que $-x^2y$ y $-4xy^2$ no son términos semejantes, ya que las variables tienen exponentes diferentes. Tampoco $-4xy^2$ y $3y^2$ son términos semejantes, ya que $3y^2$ no incluye la variable x.

Ahora resuelva el ejercicio 55

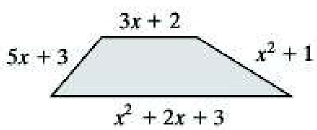


FIGURA 5.10

EJEMPLO 9 ▶ **Perímetro** Determine una expresión para el perímetro del cuadrilátero de la **figura 5.10**.

Solución El perímetro es la suma de las longitudes de los lados de la figura. En el caso de un cuadrilátero, el perímetro es la suma de las longitudes de sus cuatro lados.

$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 1) + (5x + 3) + (3x + 2) && \textit{Suma de los lados.}\\ &= x^2 + 2x + 3 + x^2 + 1 + 5x + 3 + 3x + 2 && \textit{Eliminar los paréntesis.}\\ &= x^2 + x^2 + 2x + 5x + 3x + 3 + 1 + 3 + 2 && \textit{Reacomodar términos.}\\ &= 2x^2 + 10x + 9 && \textit{Reducir términos semejantes.}\end{aligned}$$

El perímetro del cuadrilátero es $2x^2 + 10x + 9$.

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 79**

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los términos de una expresión matemática?
2. ¿Cuál es el grado de una constante diferente de cero?
3. ¿Qué es un polinomio?
4. ¿Qué es el término principal de un polinomio?
5. ¿Qué es el coeficiente principal de un polinomio?
6. **a)** ¿Cómo se determina el grado de un término?
   b) ¿Cuál es el grado de $6x^4y^3z$?
7. **a)** ¿Cómo se determina el grado de un polinomio?
   b) ¿Cuál es el grado de $-4x^4 + 6x^3y^4 + z^5$?
8. ¿Qué significa que un polinomio esté en orden descendente en la variable x?
9. **a)** ¿Cuándo es lineal un polinomio?
   b) Proporcione un ejemplo de un polinomio lineal.
10. **a)** ¿Cuándo es cuadrático un polinomio?
    b) Proporcione un ejemplo de un polinomio cuadrático.
11. **a)** ¿Cuándo es cúbico un polinomio?
    b) Proporcione un ejemplo de un polinomio cúbico.
12. Cuando se resta un polinomio de otro, ¿qué le sucede a los signos de todos los términos del polinomio que será restado?
13. Escriba un trinomio en x de grado cinco, en orden descendente de x que carezca de términos de cuarto, tercero y segundo grados.
14. Escriba un polinomio en y de grado siete en orden descendente de y que carezca de términos de quinto, tercero y segundo grados.

Práctica de habilidades

Determine si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, por ejemplo, "monomio" o "binomio", indíquelo. Si la expresión no es un polinomio, explique por qué.

15. -6
16. $4x^{-1}$
17. $7z$
18. $5x^2 - 6x + 9$
19. $5z^{-3}$
20. $8x^2 - 2x + 9y^2$
21. $3x^{1/2} + 2xy$
22. $2xy + 5y^2$

Escriba cada polinomio en orden descendente de la variable x. Si el polinomio ya está en orden descendente, indíquelo. Proporcione el grado de cada polinomio.

23. $-5 + 2x - x^2$
24. $-3x - 9 + 8x^2$
25. $9y^2 + 3xy + 10x^2$
26. $-2 + x - 8x^2 + 4x^3$
27. $-2x^4 + 5x^2 - 4$
28. $5xy^2 + 3x^2y - 9 - 2x^3$

Indique **a)** *el grado de cada polinomio y* **b)** *su coeficiente principal.*

29. $x^4 + 3x^6 - 2x - 13$
30. $17x^4 + 13x^5 - x^7 + 4x^3$
31. $4x^2y^3 + 6xy^4 + 9xy^5$
32. $-a^4b^3c^2 + 9a^8b^9c^4 - 5a^7c^{20}$
33. $-\frac{1}{3}m^4n^5p^8 + \frac{3}{5}m^3p^6 - \frac{5}{9}n^4p^6q$
34. $-0.6x^2y^3z^2 + 2.9xyz^9 - 1.3x^8y^4$

Evalúe cada función polinomial en el valor dado.

35. Determine $P(2)$, si $P(x) = x^2 - 6x + 1$.

36. Determine $P(-1)$, si $P(x) = 4x^2 + 6x + 12$.

37. Determine $P\left(\frac{1}{2}\right)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x - 6$.

38. Determine $P\left(\frac{1}{3}\right)$ si $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 6$.

39. Determine $P(0.4)$, si $P(x) = 0.2x^3 + 1.6x^2 - 2.3$.

40. Determine $P(-1.2)$, si $P(x) = -1.6x^3 - 4.6x^2 - 0.1x$.

En los ejercicios del 41 al 62, simplifique.

41. $(x^2 + 3x - 1) + (6x - 5)$

42. $(5b^2 - 8b + 7) - (2b^2 - 3b - 5)$

43. $(x^2 - 8x + 11) - (5x + 9)$

44. $(2x - 13) - (3x^2 - 4x + 16)$

45. $(4y^2 + 9y - 1) - (2y^2 + 10)$

46. $(5n^2 - 7) + (9n^2 + 3n + 12)$

47. $\left(-\frac{5}{9}a + 6\right) + \left(-\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{4}a - 1\right)$

48. $(6y^2 - 9y + 4) - (-2y^2 - y - 8)$

49. $(1.4x^2 + 1.6x - 8.3) - (4.9x^2 + 3.7x + 11.3)$

50. $(-12.4x^2y - 6.2xy + 9.3y^2) - (-5.3x^2y + 1.6xy - 10.4y^2)$

51. $\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + 8xy^2\right) + \left(-x^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2\right)$

52. $\left(-\frac{3}{5}xy^2 + \frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{5}\right)$

53. $(3a - 6b + 5c) - (-2a + 4b - 8c)$

54. $(9r + 7s - t) + (-2r - 2s - 3t)$

55. $(3a^2b - 6ab + 5b^2) - (4ab - 6b^2 - 5a^2b)$

56. $(3x^2 - 5y^2 - 2xy) - (4x^2 + 8y^2 - 9xy)$

57. $(8r^2 - 5t^2 + 2rt) + (-6rt + 2t^2 - r^2)$

58. $(a^2 - b^2 + 5ab) + (-3b^2 - 2ab + a^2)$

59. $6x^2 - 5x - [3x - (4x^2 - 9)]$

60. $3xy^2 - 2x - [-(4xy^2 + 3x) - 6xy]$

61. $5w - 6w^2 - [(3w - 2w^2) - (4w + w^2)]$

62. $-[-(5r^2 - 3r) - (2r - 3r^2) - 2r^2]$

63. Reste $(4x - 11)$ de $(7x + 8)$.

64. Reste $(-x^2 + 3x + 5)$ de $(4x^2 - 6x + 2)$.

65. Sume $-2x^2 + 4x - 12$ y $-x^2 - 2x$.

66. Reste $(5x^2 - 6)$ de $(2x^2 - 9x + 8)$.

67. Reste $0.2a^2 - 3.9a + 26.4$ de $-5.2a^2 - 9.6a$.

68. Sume $6x^2 + 12xy$ y $-2x^2 + 4xy + 3y$.

69. Reste $\left(5x^2y + \frac{5}{9}\right)$ de $\left(-\frac{1}{2}x^2y + xy^2 + \frac{3}{5}\right)$.

70. Reste $(6x^2y + 7xy)$ de $(2x^2y + 12xy)$.

Simplifique. Suponga que todos los exponentes representan números naturales.

71. $(3x^{2r} - 7x^r + 1) + (2x^{2r} - 3x^r + 2)$

72. $(8x^{2r} - 5x^r + 4) + (6x^{2r} + x^r + 3)$

73. $(x^{2s} - 8x^s + 6) - (2x^{2s} - 4x^s - 13)$

74. $(5a^{2m} - 6a^m + 4) - (2a^{2m} + 7)$

75. $(7b^{4n} - 5b^{2n} + 1) - (3b^{3n} - b^{2n})$

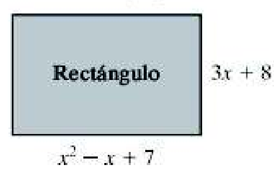
76. $(-3r^{3a} + r^a - 6) - (-2r^{3a} - 8r^{2a} + 6)$

Resolución de problemas

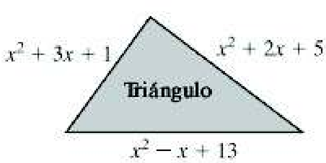
Perímetro *En los ejercicios 77 a 82, determine una expresión para el perímetro de cada figura. Vea el ejemplo 9.*

77.

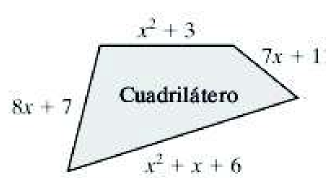
78.



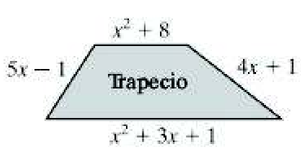
79.



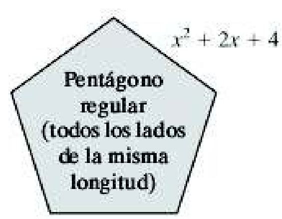
80.



81.



82.



83. ¿La suma de dos trinomios siempre da por resultado un trinomio? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

84. ¿La suma de dos binomios siempre da por resultado un binomio? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

85. ¿La suma de dos polinomios cuadráticos siempre da por resultado un polinomio cuadrático? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

86. ¿La diferencia de dos polinomios cúbicos siempre da por resultado un polinomio cúbico? Explique y proporcione un ejemplo que sustente su respuesta.

87. **Área** El área de un cuadrado es una función de su lado, donde $A(s) = s^2$. Determine el área de un cuadrado, si su lado mide 12 metros.

88. **Volumen** El volumen de un cubo es una función de su lado, s, donde $V(s) = s^3$. Determine el volumen de un cubo, si su lado es de 7 centímetros.

89. **Área** El área de un círculo es una función de su radio, donde $A(r) = \pi r^2$. Determine el área de un círculo, si su radio es de 6 pulgadas. Utilice la tecla $\boxed{\pi}$ de su calculadora.

90. **Volumen** El volumen de una esfera es una función de su radio, en donde $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Un globo circular se está inflando. Determine su volumen cuando su radio es de 4 pulgadas.

91. **Altura** Cuando un objeto se deja caer desde el edificio Empire State (altura = 1250 pies), la altura del objeto, h, en pies, respecto del piso en el instante t, en segundos, después de que se ha soltado, puede determinarse mediante

$$h = P(t) = -16t^2 + 1250$$

Determine a qué distancia del piso se encuentra un objeto 6 segundos después de que se ha dejado caer.

92. **Concurso de ortografía** El número de maneras en que puede seleccionarse a los ganadores del primero, segundo y tercer lugares en un concurso de ortografía entre n participantes, está dado por $P(n) = n^3 - 3n^2 + 2n$. Si hay seis participantes, ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse el primero, segundo y tercer lugares?

93. **Comités** El número de comités diferentes de 2 estudiantes, en los que los dos estudiantes se seleccionan de un grupo con n estudiantes está dado por $c(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Si una clase de biología tiene 15 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes con 2 estudiantes se pueden seleccionar?

94. **Comités** El número de comités diferentes de 3 estudiantes, en donde los tres estudiantes se seleccionan de un grupo con n estudiantes está dado por $c(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$. Si una clase de artes tiene 10 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes con 3 estudiantes se pueden seleccionar?

95. **Cuenta de ahorros** El 2 de enero de 2006, Jorge Sánchez depositó \$650 en una cuenta de ahorros que paga interés simple a una tasa de \$24 cada año. El monto en la cuenta es una función del tiempo dada por $A(t) = 650 + 24t$, donde t es el número de años a partir de 2006. Determine el monto en la cuenta en **a)** 2007, **b)** 2021.

96. **Financiamiento** Frank Gunther acaba de comprar un automóvil nuevo. Después de hacer el pago inicial, el monto que se financiará es \$23,250. Utilizando un préstamo al 0% (o sin interés) sobre el automóvil, el pago mensual es \$387.50. El monto del automóvil que se debe es una función del tiempo dada por $A(t) = \$23{,}250 - \$387.50t$, donde t es el número de meses a partir de que Frank compró el automóvil. ¿Cuál es la deuda **a)** a los 2 meses, **b)** a los 15 meses que Frank compró el automóvil?

Utilidad *La utilidad de una compañía se determina restando sus costos de sus ingresos. En los ejercicios 97 y 98, $R(x)$ representa el ingreso de la compañía cuando se venden x artículos, y $C(x)$ representa el costo de la compañía cuando se producen x artículos.* **a)** *Determine la función utilidad $P(x)$.* **b)** *Evalúe $P(x)$, cuando $x = 100$.*

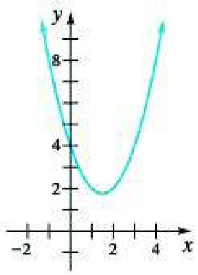
97. $R(x) = 2x^2 - 60x$,
$C(x) = 8050 - 420x$

98. $R(x) = 5.5x^2 - 80.3x$
$C(x) = 1.2x^2 + 16.3x + 12{,}040.6$

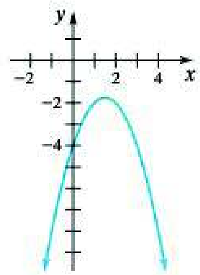
En los ejercicios 99 a 102, determine cuál de las gráficas **a)**, **b)** *o* **c)** *corresponde a la gráfica de la ecuación dada. Explique cómo determinó su respuesta.*

99. $y = x^2 + 3x - 4$

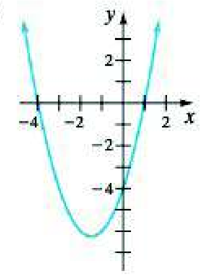
a)



b)

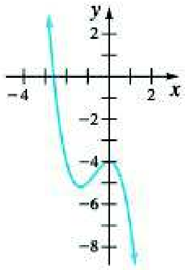


c)

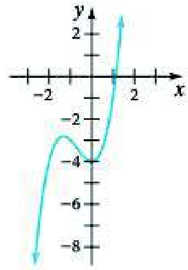


100. $y = x^3 + 2x^2 - 4$

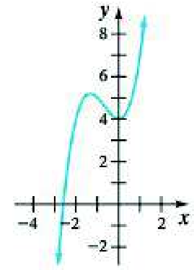
a)



b)

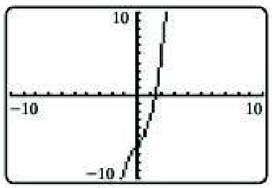


c)

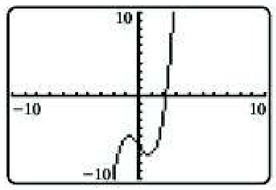


101. $y = -x^3 + 2x - 6$

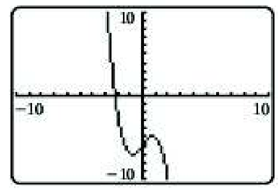
a)



b)

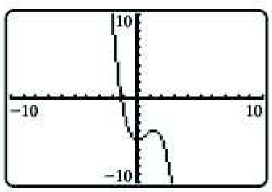


c)

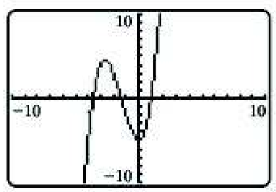


102. $y = x^3 + 4x^2 - 5$

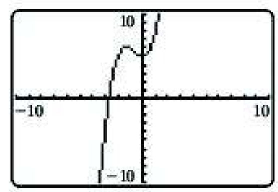
a)



b)



c)



103. Gasto de capital La gráfica que muestra el gasto de las compañías petroleras en nuevos proyectos petroleros y de gas natural de 2001 a 2004. El gasto, $E(t)$, en miles de millones de dólares puede aproximarse mediante la función

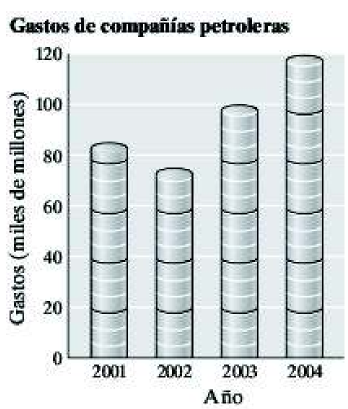
$$E(t) = 7t^2 - 7.8t + 81.2$$

donde t es el número de años desde 2001.

a) Utilice esta función para estimar el gasto de las compañías petroleras en 2004.

b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica de barras. ¿La gráfica sustenta su respuesta?

c) Si esta tendencia continúa, estime el gasto de las compañías petroleras en nuevos proyectos petroleros y de gas natural en 2007.



Fuente: John S. Herald, Inc., *The Washington Post* (3/14/2005)

104. Plano inclinado Una bola rueda hacia abajo por un plano inclinado. La distancia, $d(t)$, en pies, que la bola ha recorrido está dada por la función

$$d(t) = 2.36t^2$$

donde t es el tiempo en segundos, $0 \le t \le 5$.

Determine la distancia que la bola ha recorrido hacia abajo por el plano inclinado en

a) 1 segundo,

b) 3 segundos,

c) 5 segundos.

105. Inflación La inflación afecta el poder de compra. A consecuencia de la inflación, pagaremos más por los mismos bienes en el futuro que lo que pagamos por ellos ahora. La función $C(t) = 0.31t^2 + 0.59t + 9.61$, donde t es años desde 1997, aproxima el costo, en miles de dólares, por compras en el futuro que se harían con \$10,000 en 1997. Esta función está basada en una tasa de inflación anual de 6% y $0 \le t \le 25$. Calcule el costo que tendrán en 2012 los bienes que en 1997 costaban \$10,000.

106. Escuelas sin drogas La función $f(a) = -2.32a^2 + 76.85a - 559.87$ puede utilizarse para estimar el porcentaje de estudiantes que afirman que su escuela no está libre de drogas. En esta función, a representa la edad del estudiante, donde $12 \le a \le 17$. Utilice esta función para estimar el porcentaje de estudiantes de 13 años que afirman que sus escuelas no están libres de drogas.

Si cuenta con una calculadora graficadora, responda los ejercicios 107 y 108 con su ayuda. Si no tiene calculadora graficadora, dibuje la gráfica de la parte **a)** *por medio del trazo de puntos. Luego responda las partes de* **b)** *a* **e)**.

107. **a)** Grafique

$$y_1 = x^3$$
$$y_2 = x^3 - 3x^2 - 3$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿la función crece o decrece conforme aumenta el valor de x?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe aumentar para $x > a$, en donde a es algún número real mayor que 0. Explique por qué.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿la función crece o decrece cuando disminuye el valor de x?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe disminuir para $x < a$, en donde a es algún número real menor que 0. Explique por qué.

108. **a)** Grafique

$$y_1 = x^4$$
$$y_2 = x^4 - 6x^2$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿la función crece o decrece cuando aumenta el valor de x?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe aumentar para $x > a$, en donde a es algún número real mayor que 0. Explique por qué.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿la función crece o decrece cuando disminuye el valor de x?

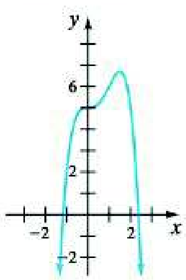
e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe disminuir para $x < a$, en donde a es algún número real menor que 0. Explique por qué.

Retos

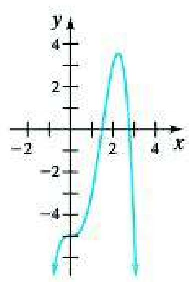
Determine cuál de las gráficas, **a)**, **b)** *o* **c)**, *corresponde a la ecuación dada. Explique cómo determinó su respuesta.*

109. $y = -x^4 + 3x^3 - 5$

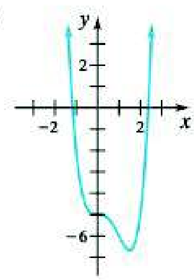
a)



b)

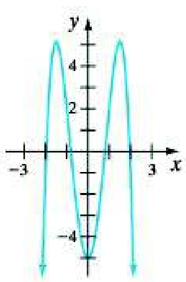


c)

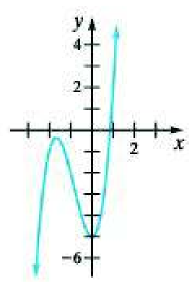


110. $y = 2x^4 + 9x^2 - 5$

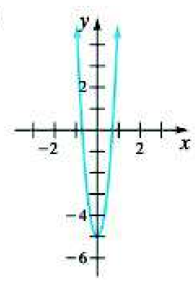
a)



b)



c)

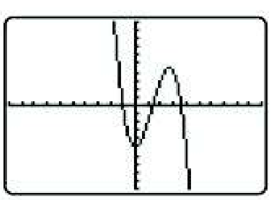


Actividad en equipo

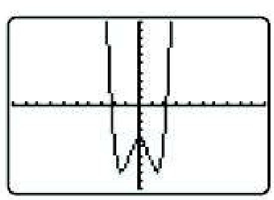
Analicen y respondan en equipo los ejercicios 111 y 112.

111. Si el término principal de una función polinomial es $3x^3$, ¿cuál de las siguientes podría ser la gráfica del polinomio? Expliquen. Consideren lo que sucede cuando x tiene valores positivos grandes, y cuando x tiene valores negativos con valor absoluto grande.

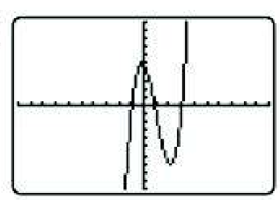
a)



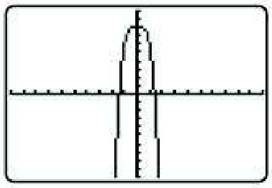
b)

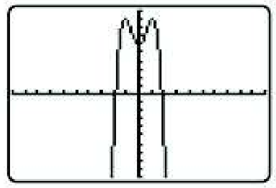


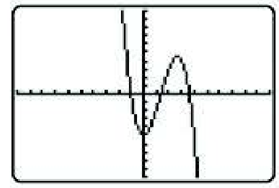
c)



112. Si el término principal de un polinomio es $-2x^4$, ¿cuál de las siguientes podría ser la gráfica del polinomio? Explique.

a) 

b) 

c) 

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **113.** Evalúe $\sqrt[4]{81}$.

[2.1] **114.** Resuelva $1 = \frac{8}{5}x - \frac{1}{2}$.

[2.4] **115.** **Máquinas de modelado** Una vieja máquina de modelado puede producir 40 cubetas de plástico en una hora. Una máquina más nueva puede fabricar 50 cubetas en una hora. ¿Cuánto tiempo les tomará a las dos máquinas producir un total de 540 cubetas?

[3.4] **116.** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(10, -4)$ y $(-1, -2)$.

[4.2] **117.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -4s + 3t &= 16 \\ 4t - 2u &= 2 \\ -s + 6u &= -2 \end{aligned}$$

5.2 Multiplicación de polinomios

1 Multiplicar un monomio por un polinomio.
2 Multiplicar un binomio por un binomio.
3 Multiplicar un polinomio por un polinomio.
4 Determinar el cuadrado de un binomio.
5 Determinar el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados).
6 Determinar el producto de funciones polinomiales.

1 Multiplicar un monomio por un polinomio

En la sección 3.6 sumamos y restamos funciones, pero no multiplicamos funciones polinomiales. Después de estudiar esta sección, usted será capaz de determinar el producto de funciones, esto es, $(f \cdot g)(x)$.

Para multiplicar polinomios, debe tener presente que *cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro*. En otras palabras, se está multiplicando un monomio por otro. Para multiplicar monomios se utilizan las reglas de los exponentes que se analizaron en la sección 1.5.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajaremos con exponentes. Las reglas de los exponentes se estudiaron en la sección 1.5. Para su conveniencia, las reglas de los exponentes que necesitará para resolver los problemas de este capítulo se presentan de nueva cuenta, junto con ejemplos, antes de donde las necesitará usar. A continuación presentamos la regla del producto para exponentes, y en la sección 5.3 presentamos la regla del cociente para exponentes y la regla del exponente cero. Si después de leer los ejemplos desearía tener ejemplos adicionales del uso de estas reglas, revise la sección 1.5.

Regla del producto para exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

En el ejemplo 1, revisamos cómo multiplicar monomios utilizando la regla del producto para exponentes. También, en el ejemplo 1, utilizamos la palabra *factores*. Recuerde que cualesquiera expresiones que se *multipliquen* se denominan *factores*.

Multiplicar un monomio por un monomio

EJEMPLO 1 Multiplique.

a) $(4x^2)(5x^3)$ **b)** $(3x^2y)(4x^5y^3)$ **c)** $(-2a^4b^7)(-3a^8bc^5)$

Solución Utilizamos la regla del producto para exponentes para multiplicar los factores.

a) $(4x^2)(5x^3) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3$ *Eliminar paréntesis y reacomodar términos.*

$= 20x^{2+3}$ *Regla del producto, $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3}$.*

$= 20x^5$

b) $(3x^2y)(4x^5y^3) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot y \cdot y^3$ *Eliminar paréntesis y reacomodar términos*
$= 12x^{2+5}y^{1+3}$ *Regla del producto.*
$= 12x^7y^4$

c) $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5) = (-2)(-3)a^4 \cdot a^8 \cdot b^7 \cdot b^3 \cdot c^5$ *Eliminar paréntesis y reacomodar términos.*
$= 6a^{4+8}b^{7+3}c^5$ *Regla del producto.*
$= 6a^{12}b^{10}c^5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 9**

En el ejemplo 1**a)**, $4x^2$ y $5x^3$ son *factores* del producto $20x^5$. En el ejemplo 1**b)**, $3x^2y$ y $4x^5y^3$ son *factores* del producto $12x^7y^4$.

Multiplicar un monomio por un polinomio

Al multiplicar un monomio por un binomio, podemos utilizar la propiedad distributiva. Al multiplicar un monomio por un polinomio (que tiene más de dos términos), podemos usar la **forma desarrollada de la propiedad distributiva**.

Propiedad distributiva. Forma desarrollada

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

En el ejemplo 2**a)** multiplicamos un monomio por un binomio y en el ejemplo 2**b)** y 2**c)**, multiplicamos un monomio por un trinomio.

EJEMPLO 2 ▸ Multiplique.

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right)$ **b)** $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9)$ **c)** $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$

Solución

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right) = 3x^2\left(\frac{1}{6}x^3\right) - 3x^2(5x^2) = \frac{1}{2}x^5 - 15x^4$

b) $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9) = (2xy)(3x^2y) + (2xy)(6xy^2) + (2xy)(9)$
$= 6x^3y^2 + 12x^2y^3 + 18xy$

c) $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$
$= (0.4x)(0.3x^3) + (0.4x)(0.7xy^2) - (0.4x)(0.2y^4)$
$= 0.12x^4 + 0.28x^2y^2 - 0.08xy^4$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 13**

2 Multiplicar un binomio por un binomio

En la multiplicación $(a + b)(c + d)$ consideramos $(a + b)$ como un solo término y utilizamos la propiedad distributiva, para obtener

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Al multiplicar un binomio por un binomio, cada término del primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, para después sumar todos los términos semejantes.

Los binomios pueden multiplicarse tanto vertical como horizontalmente.

EJEMPLO 3 ▸ Multiplique $(3x + 2)(x - 5)$.

Solución Multiplicaremos de manera vertical. Escriba los binomios de acuerdo con sus variables en orden descendente, uno debajo del otro. No importa cuál de ellos se coloque en la parte superior. Después multiplique cada término del binomio de la parte superior por cada término del binomio de abajo, como se muestra. Recuerde alinear los términos semejantes para poder sumarlos.

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & 3x & +\ 2 & \\
 & & x & -\ 5 & \\
\hline
-5(3x+2) \longrightarrow & & -\ 15x & -\ 10 & \text{Multiplicar el binomio superior por } -5. \\
x(3x+2) \longrightarrow & 3x^2 & +\ 2x & & \text{Multiplicar el binomio superior por } x. \\
\hline
 & 3x^2 & -\ 13x & -\ 10 & \text{Sumar los términos semejantes en columnas.}
\end{array}
$$

En el ejemplo 3, los binomios $3x + 2$ y $x - 5$ son *factores* del trinomio $3x^2 - 13x - 10$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 21

El método PIES

Un método sencillo para multiplicar dos binomios es el denominado **método PIES**. Para multiplicar dos binomios mediante este método, liste los binomios uno a continuación del otro. La palabra PIES indica que usted multiplica los P rimeros términos, los términos I nternos, los términos E xternos y los S egundos términos de los dos binomios. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 4, donde multiplicamos los dos binomios del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 ▸ Multiplique $(3x + 2)(x - 5)$ utilizando el método PIES.

Solución

S

P

$$(3x + 2)(x - 5)$$

I

E

$$
\begin{array}{cccc}
\text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{S} \\
(3x)(x) & +\ (2)(x) & +\ (3x)(-5) & +\ (2)(-5)
\end{array}
$$

$$= 3x^2 + 2x - 15x - 10 = 3x^2 - 13x - 10$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

Realizamos la multiplicación siguiendo el orden PIES. Sin embargo, es posible hacerlo siguiendo cualquier orden, siempre que cada término de un binomio se multiplique por cada término del otro. Utilizamos PIES en lugar de EISP o de cualquier otro orden de letras, ya que éste es fácil de recordar.

3 Multiplicar un polinomio por un polinomio

Al multiplicar un trinomio por un binomio o un trinomio por un trinomio, cada término del primer polinomio debe ser multiplicado por cada término del segundo. Es útil alinear los términos colocando cada polinomio en orden descendente, si no están dados de esa manera.

EJEMPLO 5 Multiplique $x^2 + 1 - 4x$ por $2x^2 - 3$.

Solución Ya que el trinomio no está en orden descendente, reescríbalo como $x^2 - 4x + 1$.

Antes de multiplicar, coloque el polinomio más largo en la parte superior. Al hacer la multiplicación asegúrese de alinear los términos semejantes, de modo que pueda sumarlos con más facilidad.

$$\begin{array}{lrl}
 & x^2 - 4x + 1 & \text{Trinomio escrito en orden descendente.} \\
 & 2x^2 - 3 & \\
\hline
-3(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & -3x^2 + 12x - 3 & \text{Multiplique la expresión superior por } -3. \\
2x^2(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & \text{Multiplique la expresión superior por } 2x^2. \\
\hline
 & 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 12x - 3 & \text{Sume los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Multiplique $3x^2 + 6xy - 5y^2$ por $x + 4y$.

Solución

$$\begin{array}{lrl}
 & 3x^2 + 6xy - 5y^2 & \\
 & x + 4y & \\
\hline
4y(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & 12x^2y + 24xy^2 - 20y^3 & \text{Multiplique la expresión superior por } 4y. \\
x(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & 3x^3 + 6x^2y - 5xy^2 \qquad\qquad & \text{Multiplique la expresión superior por } x. \\
\hline
 & 3x^3 + 18x^2y + 19xy^2 - 20y^3 & \text{Sume los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

4 Determinar el cuadrado de un binomio

Ahora estudiaremos algunas fórmulas especiales. Con frecuencia necesitamos calcular el *cuadrado de un binomio*, así que contamos con fórmulas especiales para hacerlo.

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si olvida las fórmulas, puede deducirlas fácilmente multiplicando $(a + b)(a + b)$ y $(a - b)(a - b)$.

Los ejemplos 7 y 8 ilustran el uso de la fórmula para el cuadrado de un binomio.

EJEMPLO 7 Desarrolle. **a)** $(3x + 7)^2$ **b)** $(4x^2 - 3y)^2$

Solución

a) $(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(7) + (7)^2$
$= 9x^2 + 42x + 49$

b) $(4x^2 - 3y)^2 = (4x^2)^2 - 2(4x^2)(3y) + (3y)^2$
$= 16x^4 - 24x^2y + 9y^2$

Ahora resuelva el ejercicio 45

El cuadrado de los binomios, como en el ejemplo 7, también se puede calcular mediante el método PIES.

Cómo evitar errores comunes

Recuerde el término de en medio al calcular el cuadrado de un binomio.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $= x^2 + 4x + 4$	$\cancel{(x + 2)^2 = x^2 + 4}$
$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ $= x^2 - 6x + 9$	$\cancel{(x - 3)^2 = x^2 + 9}$

EJEMPLO 8 Desarrolle $[x + (y - 1)]^2$.

Solución Este problema parece más complicado que los ejemplos anteriores, pero se resuelve de la misma forma que los otros cuadrados de binomios. Considere a x como el primer término y a $(y - 1)$ como el segundo. Utilice dos veces la fórmula.

$$\begin{aligned}[x + (y - 1)]^2 &= (x)^2 + 2(x)(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + (2x)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1\end{aligned}$$

Ninguno de los seis términos son términos semejantes, por lo que no se pueden reducir. Observe que $(y - 1)^2$ también es el cuadrado de un binomio, y fue desarrollado como tal.

Ahora resuelva el ejercicio 51

5 Determinar el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados)

A continuación multiplicaremos $(x + 6)(x - 6)$ utilizando el método PIES.

$$(x + 6)(x - 6) = x^2 - 6x + 6x - (6)(6) = x^2 - 6^2$$

Observe que los productos externos e internos suman cero. Al examinar este ejemplo, vemos que el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos es la diferencia de los cuadrados de los dos términos.

Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En otras palabras, para multiplicar dos binomios que sólo difieren en el signo entre sus dos términos, reste el cuadrado del segundo término del cuadrado del primero. Observe que $a^2 - b^2$ representa una **diferencia de dos cuadrados**.

EJEMPLO 9 Multiplique.

a) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right)$ **b)** $(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2)$

Solución Cada uno es un producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos, es decir, son binomios conjugados. Por lo tanto,

a) $$\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right) = (3x)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{16}{25}$$

b) $$\begin{aligned}(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2) &= (0.2x)^2 - (0.3z^2)^2 \\ &= 0.04x^2 - 0.09z^4\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 10 Multiplique $(5x + y^4)(5x - y^4)$.

Solución $$(5x + y^4)(5x - y^4) = (5x)^2 - (y^4)^2 = 25x^2 - y^8$$

Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 11 Multiplique $[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)]$.

Solución Tratamos a $4x$ como el primer término y a $3y + 2$ como el segundo. En consecuencia, obtenemos la suma y la diferencia de los mismos dos términos.

$$\begin{aligned}[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)] &= (4x)^2 - (3y + 2)^2 \\ &= 16x^2 - (9y^2 + 12y + 4) \\ &= 16x^2 - 9y^2 - 12y - 4\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

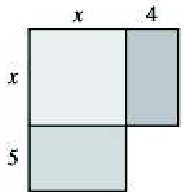


FIGURA 5.11

EJEMPLO 12 ▸ **Área**

La **figura 5.11** consta de un cuadrado y dos rectángulos. Determine una expresión polinomial para calcular el área total de la figura.

Solución Para determinar el área total, encuentre las áreas de las tres regiones y luego súmelas.

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrado} &= x \cdot x = x^2 \\ \text{Área del rectángulo de la derecha} &= x \cdot 4 = 4x \\ \text{Área del rectángulo inferior} &= x \cdot 5 = 5x \end{aligned}$$

El área total es la suma de estas tres cantidades.

Área total $= x^2 + 4x + 5x = x^2 + 9x$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 85

6 Determinar el producto de funciones polinomiales

Anteriormente se mencionó que para funciones $f(x)$ y $g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ahora resolveremos un ejemplo que incluye multiplicación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 13 ▸ Sea $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$. Determine

a) $f(3) \cdot g(3)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(3)$

Solución

a) $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, ya que las expresiones a la derecha de los signos de igual son polinomios.

$$f(x) = x + 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(3) = 3 + 4 = 7 \qquad g(3) = 3 - 2 = 1$$
$$f(3) \cdot g(3) = 7 \cdot 1 = 7$$

b) De la sección 3.6, sabemos que

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (x + 4)(x - 2) \\ &= x^2 - 2x + 4x - 8 \\ &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

c) Para evaluar $(f \cdot g)(3)$, sustituimos cada x por 3 en $(f \cdot g)(x)$.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= x^2 + 2x - 8 \\ (f \cdot g)(3) &= 3^2 + 2(3) - 8 \\ &= 9 + 6 - 8 = 7 \end{aligned}$$

Observe que en la parte **c)** encontramos $(f \cdot g)(3) = 7$ y en la parte **a)** $f(3) \cdot g(3) = 7$. Por lo tanto, $(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3)$, justo lo que esperábamos con base en lo analizado en la sección 3.6.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 79

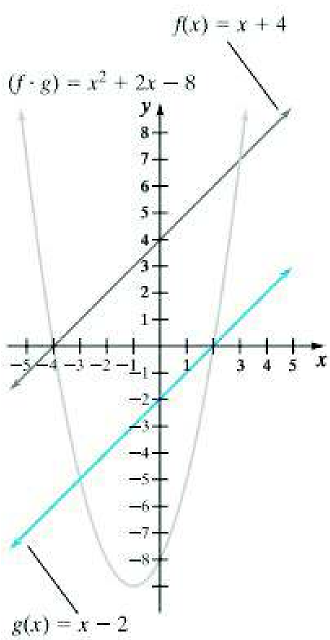


FIGURA 5.12

En el ejemplo 13, encontramos que si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$, entonces $(f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$. Las gráficas de $y = f(x) = x + 4$, $y = g(x) = x - 2$ y $y = (f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$ se muestran en la **figura 5.12**. A partir de las gráficas vemos que $f(3) = 7$, $g(3) = 1$ y $(f \cdot g)(3) = 7$, tal como supusimos con base en el ejemplo 13. Todos los puntos de $y = x^2 + 2x - 8$ pueden determinarse de la misma manera. Por ejemplo, $f(-4) = 0$ y $g(-4) = -6$. Como $0(-6) = 0$, $(f \cdot g)(-4) = 0$. También $f(2) = 6$ y $g(2) = 0$; por lo tanto, $(f \cdot g)(2) = 6 \cdot 0 = 0$. Observe en la **figura 5.12** que al multiplicar dos funciones lineales, el producto es una función cuadrática.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo multiplicar dos binomios utilizando el método PIES.
   b) Construya dos binomios y multiplíquelos utilizando el método PIES.
   c) Multiplique los mismos dos binomios utilizando el orden SIEP (segundos, internos, externos, primeros).
   d) Compare los resultados de las partes **b)** y **c)**. Si son diferentes, explique por qué.
2. a) Explique cómo multiplicar un monomio por un polinomio.
   b) Multiplique $3x(4x^2 - 6x - 7)$ mediante su procedimiento de la parte **a)**.
3. a) Explique cómo multiplicar un polinomio por un polinomio.
   b) Utilizando su procedimiento de la parte **a)**, multiplique $4 + x$ por $x^2 - 6x + 3$.
4. a) Explique cómo desarrollar $(2x - 3)^2$ mediante la fórmula para el cuadrado de un binomio.
   b) Mediante su procedimiento de la parte **a)**, desarrolle $(2x - 3)^2$.
5. a) ¿Qué se entiende por el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados)?
   b) Proporcione un ejemplo de un problema que sea producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados).
   c) ¿Cómo se multiplica el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados)?
   d) Multiplique el ejemplo que dio en la parte **b)** mediante el procedimiento de la parte **c)**.
6. ¿El producto de dos binomios siempre da por resultado un
   a) binomio?
   b) trinomio? Explique.
7. ¿El producto de dos polinomios de primer grado siempre será un polinomio de segundo grado?
8. a) Dadas $f(x)$ y $g(x)$, explique cómo determinaría $(f \cdot g)(x)$.
   b) Si $f(x) = x - 8$ y $g(x) = x + 8$, determine $(f \cdot g)(x)$.

Práctica de habilidades

Multiplique.

9. $(4xy)(6xy^4)$
10. $(-2xy^4)(9x^4y^6)$
11. $\left(\frac{5}{9}x^2y^5\right)\left(\frac{1}{5}x^5y^3z^2\right)$
12. $2y^3(3y^2 + 2y - 8)$
13. $-3x^2y(-2x^4y^2 + 5xy^3 + 4)$
14. $3x^4(2xy^2 + 5x^7 - 9y)$
15. $\frac{2}{3}yz(3x + 4y - 12y^2)$
16. $\frac{1}{2}x^2y(4x^5y^2 + 3x - 7y^2)$
17. $0.3(2x^2 - 5x + 11y)$
18. $0.8(0.2a + 0.9b - 1.3c)$
19. $0.3a^5b^4(9.5a^6b - 4.6a^4b^3 + 1.2ab^5)$
20. $4.6m^2n(1.3m^4n^2 - 2.6m^3n^3 + 5.9n^4)$

Multiplique los binomios siguientes.

21. $(4x - 6)(3x - 5)$
22. $(2x - 1)(7x + 5)$
23. $(4 - x)(3 + 2x^2)$
24. $(5x + y)(6x - y)$
25. $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)\left(2x - \frac{1}{3}y\right)$
26. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$
27. $(0.3a + 0.5b)(0.3a - 0.5b)$
28. $(4.6r - 5.8s)(0.2r - 2.3s)$

Multiplique los polinomios siguientes.

29. $(x^2 + 3x + 1)(x - 4)$
30. $(x + 3)(2x^2 - x - 8)$
31. $(a - 3b)(2a^2 - ab + 2b^2)$
32. $(7p - 3)(-2p^2 - 4p + 1)$
33. $(x^3 - x^2 + 3x + 7)(x + 1)$
34. $(2x - 1)(x^3 + 3x^2 - 5x + 6)$
35. $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$
36. $(a^3 - 2a^2 + 5a - 6)(2a^2 - 5a - 3)$
37. $(3m^2 - 2m + 4)(m^2 - 3m - 5)$
38. $(2a^2 - 6a + 3)(3a^2 - 5a - 2)$
39. $(2x - 1)^3$
40. $(3x + y)^3$
41. $(5r^2 - rs + 2s^2)(2r^2 - s^2)$
42. $(4x^2 - 5xy + y^2)(x^2 - 2y^2)$

Multiplique mediante la fórmula para el cuadrado de un binomio o bien utilizando la del producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (producto de binomios conjugados).

43. $(x + 2)(x + 2)$
44. $(y - 5)(y - 5)$
45. $(2x - 7)(2x - 7)$
46. $(3z + 4)(3z + 4)$
47. $(4x - 3y)^2$
48. $(2a + 5b)^2$

49. $(5m^2 + 2n)(5m^2 - 2n)$

50. $(5p^2 + 6q^2)(5p^2 - 6q^2)$

51. $[y + (4 - 2x)]^2$

52. $[(a + b) + 9]^2$

53. $[5x + (2y + 1)]^2$

54. $[4 - (p - 3q)]^2$

55. $[a + (b + 4)][a - (b + 4)]$

56. $[2x + (y + 5)][2x - (y + 5)]$

Multiplique.

57. $2xy(x^2 + xy + 12y^2)$

58. $3a^2b^2\left(\frac{1}{3}ab - \frac{1}{9}b^6\right)$

59. $\frac{1}{2}xy^2(4x^2 + 3xy - 7y^4)$

60. $-\frac{3}{5}x^2y\left(-\frac{2}{3}xy^4 + \frac{1}{9}xy^2 + 4\right)$

61. $-\frac{3}{5}xy^3z^2\left(-xy^2z^5 - 5xy + \frac{1}{9}xz^7\right)$

62. $\frac{2}{3}x^2y^4\left(\frac{3}{5}xy^3 - \frac{1}{8}x^4y + 2xy^3z^5\right)$

63. $(3a + 4)(7a - 6)$

64. $(5p - 9q)(4p - 11q)$

65. $\left(8x + \frac{1}{5}\right)\left(8x - \frac{1}{5}\right)$

66. $\left(5a - \frac{1}{7}\right)\left(5a + \frac{1}{7}\right)$

67. $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^3$

68. $\left(\frac{1}{2}m - n\right)^3$

69. $(x + 3)(2x^2 + 4x - 3)$

70. $(5a + 4)(a^2 - a + 3)$

71. $(2p - 3q)(3p^2 + 4pq - 2q^2)$

72. $(2m + n)(3m^2 - mn + 2n^2)$

73. $[(3x + 2) + y][(3x + 2) - y]$

74. $[a + (3b + 5)][a - (3b + 5)]$

75. $(a + b)(a - b)(a^2 - b^2)$

76. $(2a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 9)$

77. $(x - 4)(6 + x)(2x - 8)$

78. $(3x - 5)(5 - 2x)(3x + 8)$

Para las funciones dadas, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ *y* **b)** $(f \cdot g)(4)$.

79. $f(x) = x - 5, g(x) = x + 6$

80. $f(x) = 2x - 3, g(x) = x - 1$

81. $f(x) = 2x^2 + 6x - 4, g(x) = 5x + 3$

82. $f(x) = 4x^2 + 7, g(x) = 2 - x$

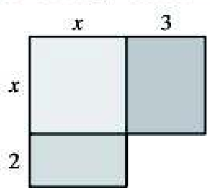
83. $f(x) = -x^2 + 3x, g(x) = x^2 + 2$

84. $f(x) = -x^2 + 2x + 7, g(x) = x^2 - 1$

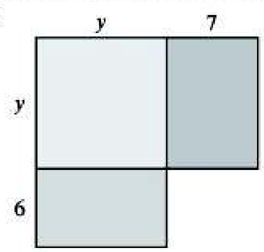
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85 a 88, determine una expresión polinomial para calcular el área total de cada figura.*

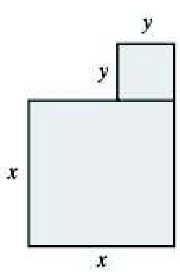
85.



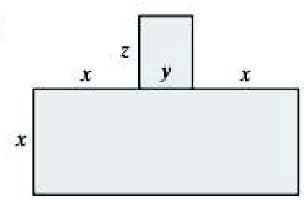
86.



87.

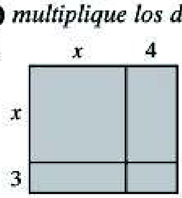


88.

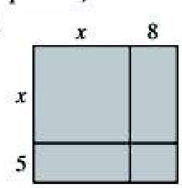


Área *En los ejercicios 89 y 90,* **a)** *determine el área del rectángulo estableciendo el área de las cuatro secciones y sumando los resultados, y* **b)** *multiplique los dos lados y compare el producto con su respuesta a la parte* **a)**.

89.

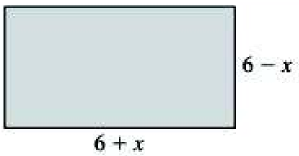


90.

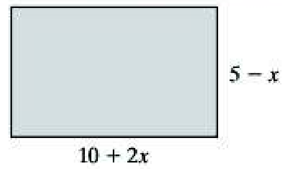


Área *Escriba una expresión polinomial para calcular el área de cada figura. Todos los ángulos son rectos.*

91.

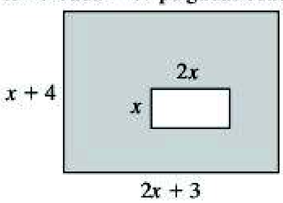


92.

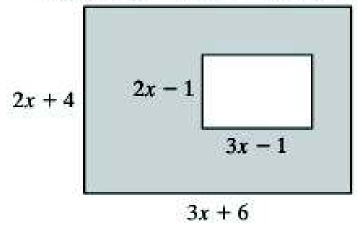


Área *En los ejercicios 93 y 94,* **a)** *escriba una expresión polinomial para calcular el área de la parte sombreada de la figura.* **b)** *El área de la parte sombreada se indica arriba de cada figura. Determine el área de los rectángulos pequeño y grande.*

93. Área de la región sombreada = 67 pulgadas cuadradas



94. Área de la región sombreada = 139 pulgadas cuadradas



95. Escriba dos binomios cuyo producto sea $x^2 - 49$. Explique cómo determinó su respuesta.

96. Escriba dos binomios cuyo producto sea $4x^2 - 9$. Explique cómo determinó su respuesta.

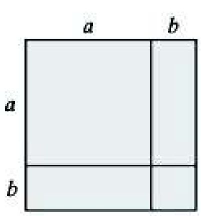
97. Escriba dos binomios cuyo producto sea $x^2 + 12x + 36$. Explique cómo determinó su respuesta.

98. Escriba dos binomios cuyo producto sea $16y^2 - 8y + 1$. Explique cómo determinó su respuesta.

99. Considere la expresión $a(x - n)^3$. Escriba esta expresión como un producto de factores.

100. Considere la expresión $P(1 - r)^4$. Escriba esta expresión como producto de factores.

101. Área La expresión $(a + b)^2$ puede representarse con la siguiente figura.



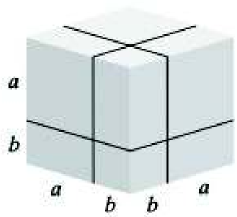
a) Explique por qué esta figura representa $(a + b)^2$.

b) Con ayuda de la figura, determine $(a + b)^2$ estableciendo el área de cada una de sus cuatro partes, y luego sumándolas.

c) Simplifique $(a + b)^2$ multiplicando $(a + b)(a + b)$.

d) Compare las respuestas de las partes **b)** y **c)**, ¿cómo son? Si no son iguales, explique por qué.

102. Volumen La expresión $(a + b)^3$ puede representarse con la siguiente figura.



a) Explique por qué esta figura representa $(a + b)^3$.

b) Determine $(a + b)^3$ sumando el volumen de cada una de las ocho partes de la figura.

c) Simplifique $(a + b)^3$ multiplicando.

d) Compare las respuestas de las partes **b)** y **c)**, ¿cómo son? Si no son iguales, explique por qué.

103. Interés compuesto La fórmula para calcular el interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es el monto, P es el capital invertido, r es la tasa de interés anual, n es el número de veces que el interés se paga cada año y t es el tiempo en años.

a) Simplifique esta fórmula para $n = 1$.

b) Determine el valor de A, si $P = \$1000$, $n = 1$, $r = 6\%$ y $t = 2$ años.

104. Interés compuesto Utilice la fórmula dada en el ejercicio 103 para determinar A, si $P = \$4000$, $n = 2$, $r = 8\%$ y $t = 2$ años.

105. Formación El número en que un maestro puede otorgar premios diferentes a 2 estudiantes en un grupo que tiene n estudiantes, está dado por la fórmula $P(n) = n(n - 1)$.

a) Utilice esta fórmula para determinar el número de maneras en que un maestro puede otorgar premios diferentes a 2 estudiantes en un grupo que tiene 11 estudiantes.

b) Reescriba la fórmula multiplicando los factores.

c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el número de maneras en que un maestro puede otorgar premios diferentes a dos estudiantes en un grupo con 11 estudiantes.

d) ¿Los resultados de las partes **a)** y **b)** son iguales?

106. Carrera de caballos El número de maneras en que pueden terminar caballos en primero, segundo y tercer lugar, en una carrera en donde participan n caballos, está dado por la fórmula

$$P(n) = n(n - 1)(n - 2)$$

a) Utilice esta fórmula para determinar el número de maneras en que los caballos pueden quedar en primero, segundo y tercer lugar, en una carrera en la que participaron 7 caballos.

b) Reescriba la fórmula multiplicando los factores.

c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el número de maneras en que los caballos pueden terminar en primero, segundo y tercero, en una carrera de 7 caballos.

d) ¿Los resultados de las partes **a)** y **b)** son iguales? Explique.

107. Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$, determine $f(a + b)$ sustituyendo cada x de la función por $(a + b)$.

108. Si $f(x) = 2x^2 - x + 3$, determine $f(a + b)$.

En los ejercicios 109 a 114, simplifique. Suponga que todas las variables representan números naturales.

109. $3x^t(5x^{2t-1} + 6x^{3t})$

110. $5k^{r+2}(4k^{r+2} - 3k^r - k)$

111. $(6x^m - 5)(2x^{2m} - 3)$

112. $(x^{3n} - y^{2n})(x^{2n} + 2y^{4n})$

113. $(y^{a-b})^{a+b}$

114. $(a^{m+n})^{m+n}$

En los ejercicios 115 y 116, realice la multiplicación polinomial.

115. $(x - 3y)^4$

116. $(2a - 4b)^4$

117. **a)** Explique cómo puede verificarse por medio de una calculadora graficadora una multiplicación en una variable, tal como $(x^2 + 2x + 3)(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$.
b) Compruebe la multiplicación indicada en la parte **a)** con ayuda de su calculadora graficadora.

118. **a)** Con ayuda de su calculadora graficadora, muestre que la multiplicación $(x^2 - 4x - 5)(x - 1) \neq x^3 + 6x^2 - 5x + 5$.
b) Multiplique $(x^2 - 4x - 5)(x - 1)$.
c) Compruebe en su calculadora graficadora la respuesta que dio en la parte **b)**.

Retos

Multiplique.

119. $[(y + 1) - (x + 2)]^2$

120. $[(a - 2) - (a + 1)]^2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **121.** Evalúe $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[1.5] **122.** Simplifique $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

[2.5] **123.** Resuelva la desigualdad $-12 < 3x - 5 \leq -1$, e indique la solución en notación de intervalo.

[3.2] **124.** Si $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, determine $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.3 División de polinomios y división sintética

1. Dividir un polinomio entre un monomio.
2. Dividir un polinomio entre un binomio.
3. Dividir polinomios mediante la división sintética.
4. Utilizar el teorema del residuo.

1 Dividir un polinomio entre un monomio

En la división de polinomios, la división entre 0 no está permitida. Cuando se nos da un problema de división con una variable en el denominador, *siempre supondremos que el denominador es diferente de 0.*

Para dividir un polinomio entre un monomio, partimos del hecho de que

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

Si el polinomio tiene más de dos términos, ampliamos este procedimiento.

Para dividir un polinomio entre un monomio

Divida cada término del polinomio entre el monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio, necesitamos utilizar dos de las reglas de los exponentes que se presentaron en la sección 1.5, la regla del cociente para exponentes y la regla del exponente cero. A continuación se indican ambas reglas, y luego se proporcionan ejemplos para revisarlas.

Regla del cociente para exponentes: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$

Regla del exponente cero: $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

EJEMPLO 1 Divida. **a)** $\dfrac{x^{10}}{x^4}$ **b)** $\dfrac{5x^3y^5}{2xy^2}$

Solución Utilizaremos la regla del cociente para dividir.

a) $\dfrac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4}$ *Regla del cociente*

$= x^6$

b) $\dfrac{5x^3y^5}{2xy^2} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{x^3}{x} \cdot \dfrac{y^5}{y^2}$

$= \dfrac{5}{2}x^{3-1}y^{5-2}$ *Regla del cociente*

$= \dfrac{5x^2y^3}{2}$

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Divida. **a)** $\dfrac{p^4}{p^4}$ **b)** $\dfrac{8r^6s^7}{3rs^7}$

Solución Utilizaremos la regla del cociente y la regla del exponente cero para dividir.

a) $\dfrac{p^4}{p^4} = p^{4-4}$ *Regla del cociente*

$= p^0$

$= 1$ *Regla del exponente cero*

b) $\dfrac{8r^6s^7}{3rs^7} = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{r^6}{r} \cdot \dfrac{s^7}{s^7}$

$= \dfrac{8}{3}r^{6-1}s^{7-7}$ *Regla del cociente*

$= \dfrac{8}{3}r^5s^0$

$= \dfrac{8}{3}r^5(1)$ *Regla del exponente cero*

$= \dfrac{8}{3}r^5$ o $\dfrac{8r^5}{3}$

Ahora resuelva el ejercicio 17

En el ejemplo 2, tanto $\dfrac{8}{3}r^5$ como $\dfrac{8r^5}{3}$ son respuestas aceptables. Ahora estamos preparados para dividir un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 3 Divida $\dfrac{4x^2 - 8x - 7}{2x}$.

Solución

$$\dfrac{4x^2 - 8x - 7}{2x} = \dfrac{4x^2}{2x} - \dfrac{8x}{2x} - \dfrac{7}{2x}$$

$$= 2x - 4 - \dfrac{7}{2x}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

EJEMPLO 4 Divida $\dfrac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2}$.

Solución

$$\frac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2} = \frac{4y}{2xy^2} - \frac{6x^4y^3}{2xy^2} - \frac{3x^5y^2}{2xy^2} + \frac{5x}{2xy^2}$$

$$= \frac{2}{xy} - 3x^3y - \frac{3x^4}{2} + \frac{5}{2y^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

2 Dividir un polinomio entre un binomio

Para dividir un polinomio entre un binomio se sigue un procedimiento muy semejante al que se usa para realizar una división larga. En un problema de división la expresión que vamos a dividir se denomina *dividendo*, y la expresión que divide se llama *divisor*.

EJEMPLO 5 Divida $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$.

Solución Reescriba el problema de división como

$$x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10}$$

Divida x^2 (el primer término del dividendo $x^2 + 7x + 10$) entre x (el primer término del divisor $x + 2$).

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Coloque el cociente, x, arriba del término del dividendo que incluye x.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \end{array}$$

Ahora multiplique x por $x + 2$, tal como lo haría en una división larga, y coloque el producto debajo del dividendo, alineando los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} \text{Por} \quad x & \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} & \\ \text{Igual a} \rightarrow \underline{x^2 + 2x} & \longleftarrow x(x+2) \end{array}$$

Ahora reste $x^2 + 2x$ de $x^2 + 7x$.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ 5x \end{array}$$

Baje el término siguiente, $+10$.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 5x + 10 \end{array}$$

Divida $5x$ entre x.

$$\frac{5x}{x} = +5$$

Coloque $+5$ arriba de la constante del dividendo, y multiplique 5 por $x + 2$. Por último, reste.

Por

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x + 5 \\
x + 2 \big) & \overline{x^2 + 7x + 10} \\
 & \underline{x^2 + 2x\phantom{{}+10}} \\
 & \phantom{x^2 + {}}5x + 10 \\
 & \phantom{x^2 + {}}\underline{5x + 10} \longleftarrow 5(x+2) \\
 & 0 \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Igual a

Por lo tanto, $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = x + 5$. No hay residuo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

En el ejemplo 5 no hubo residuo. Así que $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. Observe que $x + 2$ y $x + 5$ son *factores* de $x^2 + 7x + 10$. En un problema de división, si no hay residuo, el divisor y el cociente son factores del dividendo.

Cuando la respuesta de un problema de división tenga residuo, escriba el residuo sobre el divisor y sume esta expresión al cociente. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo 5 tuviéramos un residuo de 4; la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{4}{x + 2}$. Si el residuo fuera -7, la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{-7}{x + 2}$, que puede reescribirse como $x + 5 - \dfrac{7}{x + 2}$.

EJEMPLO 6 ▸ Divida $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1}$.

Solución En este ejemplo restaremos mentalmente y no mostraremos el cambio de signo en las restas.

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 3x - 5 \\
2x + 1 \big) & \overline{6x^2 - 7x + 3} \\
 & \underline{6x^2 + 3x}\phantom{{}+3} \longleftarrow 3x(2x + 1) \\
 & - 10x + 3 \\
 & \underline{- 10x - 5} \longleftarrow -5(2x + 1) \\
 & \phantom{6x^2 - 10x + {}}8 \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

Por lo tanto, $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1} = 3x - 5 + \dfrac{8}{2x + 1}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

Al dividir un polinomio entre un binomio, la respuesta puede *verificarse* multiplicando el divisor por el cociente, y luego sumando el residuo. El resultado debe ser el polinomio con el que se empezó. Para comprobar el ejemplo 6, hacemos lo siguiente:

$$(2x + 1)(3x - 5) + 8 = 6x^2 - 10x + 3x - 5 + 8 = 6x^2 - 7x + 3$$

Como obtuvimos el polinomio con el que empezamos, nuestra división es correcta.

Al dividir un polinomio entre un binomio, debe listarse primero el polinomio y luego el binomio, en orden descendente. Si un término de cualquier grado no aparece, suele ser útil incluir ese término con un coeficiente numérico de 0. Por ejemplo, cuando tenemos $(6x^2 + x^3 - 4) \div (x - 2)$, reescribimos el problema como $(x^3 + 6x^2 + 0x - 4) \div (x - 2)$ antes de iniciar la división.

EJEMPLO 7 Divida $(4x^2 - 12x + 3x^5 - 17)$ entre $(-2 + x^2)$.

Solución Escriba el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable x. Esto da $(3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$. Si una potencia de x no aparece, sume esa potencia de x con un coeficiente de 0; luego divida.

$$
\begin{array}{rlll}
 & 3x^3 \qquad\quad + 6x + 4 & & \\
x^2 + 0x - 2 \big) & 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 12x - 17 & & \\
 & \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3} & \longleftarrow & 3x^3(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad 6x^3 + 4x^2 - 12x & & \\
 & \qquad\qquad \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x} & \longleftarrow & 6x(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x^2 + 0x - 17 & & \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{4x^2 + 0x - 8} & \longleftarrow & 4(x^2 + 0x - 2) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 9 & \longleftarrow & \text{Residuo}
\end{array}
$$

Para obtener la respuesta, realizamos las divisiones

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \qquad \frac{6x^3}{x^2} = 6x \qquad \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Los cocientes $3x^3$, $6x$ y 4 fueron colocados arriba de sus términos semejantes en el dividendo. La respuesta es $3x^3 + 6x + 4 - \dfrac{9}{x^2 - 2}$. Verifique la respuesta usted mismo, multiplicando el divisor por el cociente y sumando el residuo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 55

3 Dividir polinomios mediante la división sintética

Cuando se divide un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, el procedimiento se puede reducir mucho gracias a un método llamado **división sintética**. Considere los siguientes ejemplos. En el de la derecha sólo utilizamos los coeficientes numéricos.

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2 + 5x - 4 \\
x - 3 \big) & 2x^3 - x^2 - 19x + 18 \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 5x^2 - 19x \\
 & \qquad \underline{5x^2 - 15x} \\
 & \qquad\qquad -4x + 18 \\
 & \qquad\qquad \underline{-4x + 12} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & 2 + 5 - 4 \\
1 - 3 \big) & 2 - 1 - 19 + 18 \\
 & \underline{2 - 6} \\
 & \quad 5 - 19 \\
 & \quad \underline{5 - 15} \\
 & \qquad -4 + 18 \\
 & \qquad \underline{-4 + 12} \\
 & \qquad\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Observe que las variables no desempeñan un papel en la determinación de los coeficientes numéricos del cociente. Este problema de división puede realizarse con mayor rapidez y facilidad mediante la división sintética.

A continuación se explica cómo utilizar la división sintética. Nuevamente analicemos la división

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3}$$

1. Escriba el dividendo en potencias descendentes de x. Luego liste los coeficientes numéricos de cada término en el dividendo. Si falta el término de cualquier grado, sustitúyalo con 0 en la posición apropiada. En el problema anterior, los coeficientes numéricos del dividendo son

$$2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$

2. Al dividir entre un binomio con la forma $x - a$, coloque a a la izquierda de la fila de números que se obtuvo en el paso 1. En este problema, dividimos entre $x - 3$; por lo tanto, $a = 3$, así que escribimos

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \end{array}$$

3. Deje un espacio debajo de la fila de los coeficientes; luego trace una recta horizontal. Copie debajo de ésta el primer coeficiente de la izquierda, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. Multiplique 3 por el número que colocó debajo de la línea, 2, para obtener 6. Escriba el 6 debajo del siguiente coeficiente, -1. Luego sume $-1 + 6$ para obtener 5.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & 6 & & \\ \hline & 2 & 5 & & \end{array}$$

5. Multiplique 3 por el resultado de la suma anterior, 5, para obtener 15. Escriba 15 debajo de -19. Luego sume ambos números para obtener -4. Repita este procedimiento como se ilustra.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & 6 & 15 & -12 \\ \hline & 2 & 5 & -4 & 6 \end{array}$$

Los tres primeros números de la última fila son los coeficientes numéricos del cociente, como se mostró en la división larga. El último número, 6, es el residuo que se obtiene en la división larga. El cociente debe ser de un grado una unidad menor al del dividendo, ya que estamos dividiendo entre $x - 3$. El dividendo original era un polinomio de tercer grado; por lo tanto, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. Utilice los primeros tres números de la última fila como coeficientes de un polinomio de segundo grado de x. Esto da por resultado $2x^2 + 5x - 4$, que es el cociente. El último número, 6, es el residuo. Por lo tanto,

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3} = 2x^2 + 5x - 4 + \frac{6}{x - 3}$$

EJEMPLO 8 ▸ Utilice la división sintética para dividir.

$$(5 - x^2 + x^3) \div (x + 2)$$

Solución Primero liste los términos del dividendo en orden descendente de x.

$$(x^3 - x^2 + 5) \div (x + 2)$$

Como no hay término de primer grado, ocupe su lugar con un 0 cuando liste los coeficientes numéricos. Ya que $x + 2 = x - (-2)$, $a = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -7 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Como el dividendo es un polinomio de tercer grado, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. La respuesta es $x^2 - 3x + 6 - \dfrac{7}{x + 2}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 9 ▸ Utilice división sintética para dividir.

$$(3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35) \div (x + 5)$$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 3 & 11 & -20 & 7 & 35 \\ & & -15 & 20 & 0 & -35 \\ \hline & 3 & -4 & 0 & 7 & 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Como el dividendo es de cuarto grado, el cociente debe ser de tercer grado. El cociente es $3x^3 - 4x^2 + 0x + 7$, sin residuo. Esto puede simplificarse como $3x^3 - 4x^2 + 7$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 71

Ya que no hubo residuo en el ejemplo 9, $x + 5$ y $3x^3 - 4x + 7$ son *factores* de $3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$. Además, como ambos son factores,

$$(x + 5)(3x^3 - 4x^2 + 7) = 3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$$

4 Utilizar el teorema del residuo

En el ejemplo 8, cuando dividimos $x^3 - x^2 + 5$ entre $x + 2$, encontramos que el residuo fue -7. Si escribimos $x + 2$ como $x - (-2)$ y evaluamos la función polinomial $P(x) = x^3 - x^2 + 5$ en -2, obtenemos -7.

$$P(x) = x^3 - x^2 + 5$$
$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -8 - 4 + 5 = -7$$

¿Es una simple coincidencia que $P(-2)$, el valor de la función en -2, sea igual al residuo cuando la función $P(x)$ se divide entre $x - (-2)$? La respuesta es no. Puede demostrarse que para cualquier función polinomial $P(x)$, el valor de la función en a, $P(a)$, tiene el mismo valor que el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - a$.

Para obtener el residuo cuando un polinomio $P(x)$ se divide entre un polinomio con la forma $x - a$, podemos usar el **teorema del residuo**.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es igual a $P(a)$.

EJEMPLO 10 ▸ Utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$.

Solución Primero escribimos el divisor $x + 4$ en la forma $x - a$. Como $x + 4 = x - (-4)$, evaluamos $P(-4)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4 \\ P(-4) &= 3(-4)^4 + 6(-4)^3 - 2(-4) + 4 \\ &= 3(256) + 6(-64) + 8 + 4 \\ &= 768 - 384 + 8 + 4 = 396 \end{aligned}$$

Así, cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$, el residuo es 396.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 87

Mediante la división sintética, mostraremos que la respuesta del ejemplo 10 en realidad es 396.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 3 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ & & -12 & 24 & -96 & 392 \\ \hline & 3 & -6 & 24 & -98 & 396 \end{array} \quad \leftarrow \text{Residuo}$$

Si graficásemos el polinomio $P(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$, el valor de $P(x)$, o y, en $x = -4$ sería 396.

EJEMPLO 11 Utilice el teorema del residuo para determinar si $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$.

Solución Sea $P(x) = 6x^2 - 25x - 25$. Si $P(5) = 0$, entonces el residuo de $(6x^2 - 25x - 25)/(x - 5)$ es 0, y $x - 5$ es un factor del polinomio. Si $P(5) \neq 0$, entonces hay un residuo y $x - 5$ no es un factor.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^2 - 25x - 25 \\ P(5) &= 6(5)^2 - 25(5) - 25 \\ &= 6(25) - 25(5) - 25 \\ &= 150 - 125 - 25 = 0 \end{aligned}$$

Como $P(5) = 0$, $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$. Observe que $6x^2 - 25x - 25 = (x - 5)(6x + 5)$.

Ahora resuelva el ejercicio 89

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo dividir un polinomio entre un monomio.
   b) Utilizando el procedimiento que explicó en la parte a), divida $\dfrac{5x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 12x + 1}{3x}$.
2. a) Explique cómo dividir un trinomio en x entre un binomio en x.
   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte a), divida $2x^2 - 12 + 5x$ entre $x + 4$.
3. Un trinomio dividido entre un binomio tiene un residuo de 0. ¿El cociente es un factor del trinomio? Explique.
4. a) Explique cómo puede verificarse la respuesta cuando se divide un polinomio entre un binomio.
   b) Utilice la explicación que dio en la parte a) para comprobar si la siguiente división es correcta.
   $$\frac{8x^2 + 2x - 15}{4x - 5} = 2x + 3$$
   c) Verifique si la siguiente división es correcta.
   $$\frac{6x^2 - 23x + 13}{3x - 4} = 2x - 5 - \frac{8}{3x - 4}$$
5. Cuando se divide un polinomio entre un polinomio, ¿qué hay que hacerle a los polinomios antes de comenzar?
6. Explique por qué $\dfrac{x - 1}{x}$ no es un polinomio.
7. a) Describa cómo se divide un polinomio entre $(x - a)$ mediante la división sintética.
   b) Utilizando el procedimiento que indicó en la parte a), divida $x^2 + 3x - 4$ entre $x - 5$.
8. a) Establezca el teorema del residuo.
   b) Mediante el procedimiento que indicó en la parte a), determine cuál es el residuo cuando $x^2 - 6x - 4$ se divide entre $x - 1$.
9. En el problema de división $\dfrac{x^2 + 11x + 21}{x + 2} = x + 9 + \dfrac{3}{x + 2}$, ¿$x + 9$ es un factor de $x^2 + 11x + 21$? Explique.
10. En el problema de división $\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x + 4} = x - 7$, ¿$x - 7$ es un factor de $x^2 - 3x - 28$? Explique.

Práctica de habilidades

Divida.

11. $\dfrac{x^9}{x^7}$
12. $\dfrac{m^{13}}{m^3}$
13. $\dfrac{a^{11}}{a^7}$
14. $\dfrac{b^8}{b^3}$
15. $\dfrac{z^{16}}{z^8}$
16. $\dfrac{q^6}{q^6}$
17. $\dfrac{12r^7s^{10}}{3rs^8}$
18. $\dfrac{7y^{14}z^7}{4y^{11}z}$
19. $\dfrac{15x^{18}y^{19}}{3x^{10}y^8}$
20. $\dfrac{21a^8b^{17}}{9a^7b^{10}}$

Divida.

21. $\dfrac{4x + 18}{2}$
22. $\dfrac{9x + 8}{3}$
23. $\dfrac{4x^2 + 2x}{2x}$
24. $\dfrac{12x^2 - 8x - 24}{4}$
25. $\dfrac{5y^3 + 6y^2 - 12y}{3y}$
26. $\dfrac{21y^5 + 14y^2}{7y^4}$
27. $\dfrac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2}$
28. $\dfrac{15x^3y - 25xy^3}{5xy}$
29. $\dfrac{8x^2y^2 - 10xy^3 - 5y}{2y^2}$

30. $\dfrac{4x^{13} + 12x^9 - 11x^7}{4x^6}$

31. $\dfrac{9x^2y - 12x^3y^2 + 15y^3}{2xy^2}$

32. $\dfrac{a^2b^2c - 6abc^2 + 5a^3b^5}{2abc^2}$

33. $\dfrac{3xyz + 6xyz^2 - 9x^3y^5z^7}{6xy}$

34. $\dfrac{6abc^3 - 5a^2b^3c^4 + 13ab^5c}{3ab^2c^3}$

Divida utilizando la división larga.

35. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

36. $\dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5}$

37. $\dfrac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$

38. $\dfrac{2x^2 + 13x + 20}{x + 4}$

39. $\dfrac{6x^2 + x - 2}{2x - 1}$

40. $\dfrac{12x^2 - 17x - 7}{3x + 1}$

41. $\dfrac{x^2 + 6x + 3}{x + 1}$

42. $\dfrac{a^2 - a - 17}{a + 3}$

43. $\dfrac{2b^2 + b - 8}{b - 2}$

44. $\dfrac{2c^2 + c + 1}{2c + 5}$

45. $\dfrac{8x^2 + 6x - 25}{2x - 3}$

46. $\dfrac{8z^2 - 18z - 7}{4z + 1}$

47. $\dfrac{4x^2 - 36}{2x - 6}$

48. $\dfrac{16p^2 - 9}{4p + 3}$

49. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 4}{x + 1}$

50. $\dfrac{-a^3 - 6a^2 + 2a - 4}{a - 1}$

51. $\dfrac{4y^3 + 12y^2 + 7y - 9}{2y + 3}$

52. $\dfrac{9b^3 - 3b^2 - 3b + 4}{3b + 2}$

53. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$

54. $(2x^3 + 6x + 33) \div (x + 4)$

55. $\dfrac{3x^5 + 2x^2 - 12x - 4}{x^2 - 2}$

56. $\dfrac{4b^5 - 18b^3 + 14b^2 + 18b - 21}{2b^2 - 3}$

57. $\dfrac{3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20}{3x^3 - 8x^2 - 5}$

58. $\dfrac{3a^4 - 9a^3 + 13a^2 - 11a + 4}{a^2 - 2a + 1}$

59. $\dfrac{2c^4 - 8c^3 + 19c^2 - 33c + 15}{c^2 - c + 5}$

60. $\dfrac{2y^5 + 2y^4 - 3y^3 - 15y^2 + 18}{2y^2 - 3}$

Divida usando la división sintética.

61. $(x^2 + 7x + 6) \div (x + 1)$

62. $(x^2 - 7x + 6) \div (x - 1)$

63. $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$

64. $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

65. $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 4)$

66. $(x^2 + 17x + 72) \div (x + 9)$

67. $(x^2 + 5x - 14) \div (x - 3)$

68. $(x^2 - 2x - 39) \div (x + 5)$

69. $(3x^2 - 7x - 10) \div (x - 4)$

70. $(2b^2 - 9b + 1) \div (b - 6)$

71. $(4x^3 - 3x^2 + 2x) \div (x - 1)$

72. $(z^3 - 7z^2 - 13z + 25) \div (z - 2)$

73. $(3c^3 + 7c^2 - 4c + 16) \div (c + 3)$

74. $(3y^4 - 25y^2 - 29) \div (y - 3)$

75. $(y^4 - 1) \div (y - 1)$

76. $(a^4 - 16) \div (a - 2)$

77. $\dfrac{x^4 + 16}{x + 4}$

78. $\dfrac{z^4 + 81}{z + 3}$

79. $\dfrac{x^5 + x^4 - 9}{x + 1}$

80. $\dfrac{a^7 - 2a^6 + 13}{a - 2}$

81. $\dfrac{b^5 + 4b^4 - 14}{b + 1}$

82. $\dfrac{z^5 - 3z^3 - 7z}{z - 2}$

83. $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

84. $(8x^3 - 6x^2 - 5x + 3) \div \left(x + \dfrac{3}{4}\right)$

85. $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 7) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

86. $(9y^3 + 9y^2 - y + 2) \div \left(y + \dfrac{2}{3}\right)$

Determine el residuo de las siguientes divisiones mediante el teorema del residuo. Si el divisor es un factor del dividendo, indíquelo.

87. $(4x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

88. $(-2x^2 + 3x - 2) \div (x + 3)$

89. $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \div (x - 2)$

90. $(x^4 + 3x^3 + x^2 + 22x + 8) \div (x + 4)$

91. $(-2x^3 - 6x^2 + 2x - 4) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

92. $(-5x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{5}\right)$

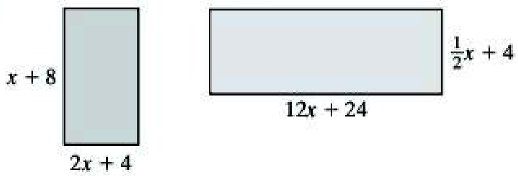
Resolución de problemas

93. **Área** El área de un rectángulo es $6x^2 - 8x - 8$. Si su longitud es $2x - 4$, determine su ancho.

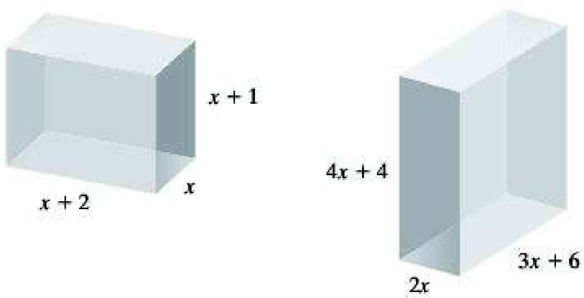
94. **Área** El área de un rectángulo es $15x^2 - 29x - 14$. Si su ancho es $5x + 2$, determine su longitud.

Área y volumen *En los ejercicios 95 y 96, ¿cuántas veces es mayor el área o volumen de la figura de la derecha que el de la figura de la izquierda? Explique cómo determinó su respuesta.*

95.



96.



97. ¿Es posible dividir un binomio entre un monomio y obtener un monomio como cociente? Explique.

98. **a)** ¿La suma, diferencia y producto de dos polinomios es siempre un polinomio?

b) ¿El cociente de dos polinomios es siempre un polinomio? Explique.

99. Explique cómo puede determinarse, mediante la división sintética, si una expresión con la forma $x - a$ es un factor de un polinomio en x.

100. Dados $P(x) = ax^2 + bx + c$ y un valor d tal que $P(d) = 0$, explique por qué d es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

101. Si $\dfrac{P(x)}{x - 4} = x + 2$, determine $P(x)$.

102. Si $\dfrac{P(x)}{2x + 4} = 2x - 3$, determine $P(x)$.

103. Si $\dfrac{P(x)}{x + 4} = x + 5 + \dfrac{6}{x + 4}$, determine $P(x)$.

104. Si $\dfrac{P(x)}{2x - 3} = 2x - 1 - \dfrac{8}{2x - 3}$, determine $P(x)$.

En los ejercicios 105 y 106, divida.

105. $\dfrac{2x^3 - x^2y - 7xy^2 + 2y^3}{x - 2y}$

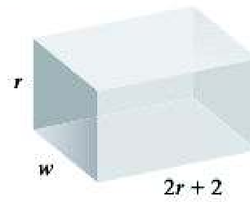
106. $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

En los ejercicios 107 y 108, divida. Las respuestas contienen fracciones.

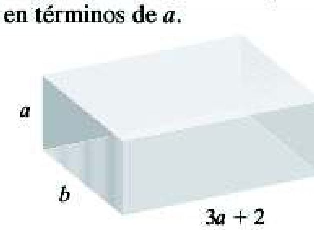
107. $\dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x - 3}$

108. $\dfrac{3x^3 - 7}{3x - 2}$

109. **Volumen** El volumen de la siguiente caja es $2r^3 + 4r^2 + 2r$. Determine w en términos de r.



110. **Volumen** El volumen de la siguiente caja es $6a^3 + a^2 - 2a$. Determine b en términos de a.



111. Cuando un polinomio se divide entre $x - 3$, el cociente es $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{5}{x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explique cómo determinó su respuesta.

112. Cuando un polinomio se divide entre $2x - 3$, el cociente es $2x^2 + 6x - 5 + \dfrac{5}{2x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explique cómo determinó su respuesta.

En los ejercicios 113 y 114, divida. Suponga que todas las variables de los exponentes son números naturales.

113. $\dfrac{4x^{n+1} + 2x^n - 3x^{n-1} - x^{n-2}}{2x^n}$

114. $\dfrac{3x^n + 6x^{n-1} - 2x^{n-2}}{2x^{n-1}}$

115. ¿Es $x - 1$ factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

116. ¿Es $x + 1$ factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

117. ¿Es $x + 1$ factor de $x^{99} + x^{98} + \cdots + x^1 + 1$? Explique.

118. Divida $0.2x^3 - 4x^2 + 0.32x - 0.64$ entre $x - 0.4$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **119.** Divida $\dfrac{8.45 \times 10^{23}}{4.225 \times 10^{13}}$ y exprese la respuesta en notación científica.

[2.3] **120.** **Triángulo** Determine los tres ángulos de un triángulo, si uno de ellos mide el doble del ángulo más pequeño, y el tercero mide 60° más que el ángulo más pequeño.

[2.6] **121.** Determine el conjunto solución para $\left|\dfrac{5x - 3}{2}\right| + 4 = 8$.

[3.6] **122.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 3$. Determine $f(6) \cdot g(6)$.

[5.1] **123.** Sume $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 7t)$.

5.4 Cómo factorizar un monomio de un polinomio y factorización por agrupación

1. Determinar el máximo factor común.
2. Factorizar un monomio de un polinomio.
3. Factorizar un factor binomial común.
4. Factorizar por agrupación.

La factorización es la operación opuesta a la multiplicación. Factorizar una expresión significa escribirla como un producto de otras expresiones. Por ejemplo, en la sección 5.2 aprendimos a realizar las multiplicaciones siguientes:

$$3x^2(6x + 3y + 4x^3) = 18x^3 + 9x^2y + 12x^5$$

y

$$(6x + 3y)(2x - 5y) = 12x^2 - 24xy - 15y^2$$

En esta sección aprenderemos a determinar los *factores* de una expresión dada. Por ejemplo, aprenderemos cómo realizar cada una de las factorizaciones siguientes.

$$18x^3 + 9x^2y + 12x^5 = 3x^2(6x + 3y + 4x^3)$$

y

$$12x^2 - 24xy - 15y^2 = (6x + 3y)(2x - 5y)$$

1 Determinar el máximo factor común

Para factorizar un monomio de un polinomio, factorizamos al **máximo factor común** (MFC) de cada término del polinomio. El MFC es el producto de los factores comunes a todos los términos del polinomio. Por ejemplo, el MFC para $6x + 21$ es 3, ya que 3 es el número más grande que es factor tanto de $6x$ como de 21. Para factorizar, utilizamos la propiedad distributiva.

$$6x + 21 = 3(2x + 7)$$

El 3 y el $2x + 7$ son *factores* del polinomio $6x + 21$.

Considere los términos x^3, x^4, x^5 y x^6. El MFC de estos términos es x^3, ya que x^3 es la potencia de x más alta que divide a los cuatro términos.

EJEMPLO 1 ▸ Determine el MFC de los términos siguientes.

a) y^{12}, y^4, y^9, y^7 **b)** x^3y^2, xy^4, x^5y^6 **c)** $6x^2y^3z, 9x^3y^4, 24x^2z^5$

Solución

a) Observe que y^4 es la potencia más alta de y común a los cuatro términos. Por lo tanto, el MFC es y^4.

b) La potencia más alta de x común a los tres términos es x (o x^1). La potencia más alta de y común a los tres términos es y^2. Así, el MFC de los tres términos es xy^2.

c) El MFC es $3x^2$. Como y no aparece en $24x^2z^5$, no es parte del MFC; como z no aparece en $9x^3y^4$, no es parte del MFC.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 3

EJEMPLO 2 ▸ Determine el MFC de los términos siguientes.

$$6(x - 2)^2, 5(x - 2), 18(x - 2)^7$$

Solución Los tres números 6, 5 y 18, no tienen factor común distinto de 1. La potencia más alta de $(x - 2)$ común a los tres términos es $(x - 2)$. Así, el MFC de los tres términos es $(x - 2)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 5

2 Factorizar un monomio de un polinomio

Cuando factorizamos un monomio de un polinomio estamos factorizando el máximo factor común. *El primer paso en cualquier problema de factorización consiste en determinar y luego factorizar el MFC.*

Para factorizar un monomio de un polinomio

1. Determine el máximo factor común de todos los términos del polinomio.
2. Escriba cada término como el producto del MFC y otro factor.
3. Use la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.

EJEMPLO 3 Factorice $15x^4 - 5x^3 + 25x^2$.

Solución El MFC es $5x^2$. Escriba cada término como producto del MFC y otro producto. Luego factorice el MFC.

$$\begin{aligned} 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 &= 5x^2 \cdot 3x^2 - 5x^2 \cdot x + 5x^2 \cdot 5 \\ &= 5x^2(3x^2 - x + 5) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 15

Para comprobar el procedimiento de factorización, multiplique los factores utilizando la propiedad distributiva. El producto debe ser la expresión con la que se inició. Pongamos el ejemplo 3,

Comprobación $$\begin{aligned} 5x^2(3x^2 - x + 5) &= 5x^2(3x^2) + 5x^2(-x) + 5x^2(5) \\ &= 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Factorice $20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5$.

Solución El MFC es $2xy^3$. Escriba cada término como producto del MFC y otro producto. Luego factorice el MFC.

$$\begin{aligned} 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5 &= 2xy^3 \cdot 10x^2 + 2xy^3 \cdot 3xy - 2xy^3 \cdot 6y^2 \\ &= 2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^2) \end{aligned}$$

Comprobación $2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^2) = 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^5$

Ahora resuelva el ejercicio 19

Cuando el coeficiente principal de un polinomio es negativo, por lo general factorizamos un factor común con un coeficiente negativo. Esto da como resultado que el polinomio restante tenga un coeficiente principal positivo.

EJEMPLO 5 Factorice **a)** $-12a - 18$ **b)** $-2b^3 + 6b^2 - 16b$

Solución Como los coeficientes principales en las partes **a)** y **b)** son negativos, factorizamos factores comunes con un coeficiente negativo.

a) $-12a - 18 = -6(2a + 3)$ Factorizar -6.

b) $-2b^3 + 6b^2 - 16b = -2b(b^2 - 3b + 8)$ Factorizar $-2b$.

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 6 **Lanzamiento de una pelota** Cuando se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 32 pies por segundo desde la parte más alta de un edificio de 160 pies de altura, su distancia, d, respecto del piso en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$.

a) Determine la distancia de la pelota respecto del piso después de 3 segundos; es decir, determine $d(3)$.

b) Factorice el MFC del lado derecho de la función.

c) Evalúe $d(3)$ en la forma factorizada.

d) Compare sus respuestas de las partes **a)** y **c)**.

Solución

a)
$$\begin{aligned} d(t) &= -16t^2 + 32t + 160 \\ d(3) &= -16(3)^2 + 32(3) + 160 && \text{Sustituya } t \text{ por } 3. \\ &= -16(9) + 96 + 160 \\ &= 112 \end{aligned}$$

La distancia es 112 pies.

b) Factorice -16 de los tres términos a la derecha del signo igual.

$$d(t) = -16(t^2 - 2t - 10)$$

c)
$$\begin{aligned} d(t) &= -16(t^2 - 2t - 10) \\ d(3) &= -16[3^2 - 2(3) - 10] && \text{Sustituya } t \text{ por } 3. \\ &= -16(9 - 6 - 10) \\ &= -16(-7) \\ &= 112 \end{aligned}$$

d) Las respuestas son iguales. Puede determinar los cálculos de la parte **c)** con mayor facilidad que los cálculos de la parte **a)**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

3 Factorizar un factor binomial común

Algunas veces la factorización exige factorizar un binomio como el máximo factor común, como se ilustra en los ejemplos 7 a 9.

EJEMPLO 7 ▸ Factorice $3x(5x - 6) + 4(5x - 6)$.

Solución El MFC es $(5x - 6)$. Al factorizar el MFC se obtiene

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (5x - 6)(3x + 4)$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 37

En el ejemplo 7 también podríamos haber colocado el factor común a la derecha para obtener

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (3x + 4)(5x - 6)$$

Las formas factorizadas $(5x - 6)(3x + 4)$ y $(3x + 4)(5x - 6)$ son equivalentes de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación, y ambas son correctas. Por lo general, cuando listamos la respuesta a un ejemplo o ejercicio, colocamos el término común que se ha factorizado a la izquierda.

EJEMPLO 8 ▸ Factorice $9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2$.

Solución EL MFC es $3(2x - 5)$. Reescriba cada término como producto del MFC y otro factor.

$$\begin{aligned} 9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2 &= 3(2x - 5)\cdot 3 + 3(2x - 5)\cdot 2(2x - 5) \\ &= 3(2x - 5)[3 + 2(2x - 5)] && \text{Factorizar } 3(2x-5). \\ &= 3(2x - 5)[3 + 4x - 10] && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 3(2x - 5)(4x - 7) && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 9 ▸ Factorice $(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b)$.

Solución El binomio $a + b$ es el MFC de los dos términos. Por lo tanto, lo factorizamos.

$$
\begin{aligned}
(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b) &= (a + b)[(3x - 4) - (x - 1)] && \text{Factorizar } (a + b). \\
&= (a + b)(3x - 4 - x + 1) && \text{Simplificar.} \\
&= (a + b)(2x - 3) && \text{Factores.}
\end{aligned}
$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

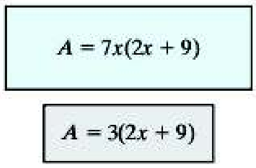


FIGURA 5.13

EJEMPLO 10 ▸ **Área** En la **figura 5.13**, el área del rectángulo grande es $7x(2x + 9)$, y el área del rectángulo pequeño es $3(2x + 9)$. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de estos dos rectángulos.

Solución Para determinar la diferencia entre las áreas, reste el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande.

$$
\begin{aligned}
&7x(2x + 9) - 3(2x + 9) && \text{Restar las áreas.} \\
&= (2x + 9)(7x - 3) && \text{Factorizar } (2x + 9).
\end{aligned}
$$

La diferencia de las áreas para los dos rectángulos es $(2x + 9)(7x - 3)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 59**

4 Factorizar por agrupación

Cuando un polinomio tiene *cuatro términos*, se le podría factorizar por agrupación. Para **factorizar por agrupación**, quitamos los factores comunes de grupos de términos. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 ▸ Factorice $ax + ay + bx + by$.

Solución No hay factor común (diferente de 1) para todos los términos. Sin embargo, a es común a los primeros dos términos, y b es común a los últimos dos. Factorice a de los primeros dos términos y b de los últimos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Ahora $(x + y)$ es común a ambos términos. Factorice $(x + y)$.

$$a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Así, $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ o $(a + b)(x + y)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

Para factorizar cuatro términos por agrupación

1. Determine si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factorice el máximo factor común de cada término.
2. Acomode los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo debe tener un MFC.
3. Factorice el MFC de cada grupo de dos términos.
4. Si los dos términos formados en el paso 2 tienen un MFC, factorícelo.

EJEMPLO 12 ▸ Factorice por agrupación $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$.

Solución No hay factores comunes a los cuatro términos. Sin embargo, x^2 es común a los primeros dos términos, y 2 es común a los últimos dos.

$$
\begin{aligned}
x^3 - 5x^2 + 2x - 10 &= x^2(x - 5) + 2(x - 5) \\
&= (x - 5)(x^2 + 2)
\end{aligned}
$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 55**

En el ejemplo 12, $(x^2 + 2)(x - 5)$ también es una respuesta aceptable. ¿Cambiaría la respuesta del ejemplo 12 si intercambiamos el orden de $2x$ y $-5x^2$? Inténtelo en el ejemplo 13.

EJEMPLO 13 ▸ Factorice $x^3 + 2x - 5x^2 - 10$.

Solución No hay factor común para los cuatro términos. Factorice x de los primeros dos términos y -5 de los últimos dos.

$$x^3 + 2x - 5x^2 - 10 = x(x^2 + 2) - 5(x^2 + 2)$$
$$= (x^2 + 2)(x - 5)$$

Observe que obtuvimos resultados equivalentes en los ejemplos 12 y 13.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

Sugerencia útil

Cuando utilizamos la agrupación para factorizar cuatro términos, si los términos *primero* y *tercero* son positivos debemos factorizar una expresión positiva tanto de los primeros dos términos como de los segundos dos términos para obtener un factor común para los dos términos restantes (vea el ejemplo 12). Si el *primer* término es positivo y el *tercero* es negativo, debemos factorizar una expresión positiva de los primeros dos términos y una expresión negativa de los últimos dos términos para obtener un factor común para los dos términos restantes (vea el ejemplo 13).

El primer paso para resolver cualquier problema de factorización consiste en determinar si todos los términos tienen un factor común. Si es así, empiece por factorizar el factor común. Por ejemplo, para factorizar $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$, primero factorizamos x de cada término. Luego factorizamos los cuatro términos restantes por agrupación, como se hizo en el ejemplo 12.

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x = x(x^3 - 5x^2 + 2x - 10) \quad \text{Factorizar el MFC, } x\text{, de los cuatro términos.}$$
$$= x(x - 5)(x^2 + 2) \quad \text{Factores del ejemplo 12.}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es el primer paso en *cualquier* problema de factorización?
2. ¿Qué es el máximo factor común de los términos de una expresión?
3. a) Explique cómo determinar el máximo factor común de los términos de un polinomio.
   b) Utilizando su procedimiento de la parte **a)**, determine el máximo factor común del polinomio
   $$6x^2y^5 - 2x^3y + 12x^9y^3$$
   c) Factorice el polinomio de la parte **b)**.
4. Determine el MFC de los siguientes términos:
   $$x^4y^6, x^3y^5, xy^6, x^2y^4$$
   Explique cómo determinó su respuesta.
5. Determine el MFC de los siguientes términos:
   $$12(x - 4)^3, 6(x - 4)^6, 3(x - 4)^9$$
   Explique cómo determinó su respuesta.
6. Si uno de los términos de un polinomio es también el MFC, ¿qué se escribe en lugar de ese término cuando se factoriza el MFC? Explique.
7. a) Explique cómo factorizar por agrupación un polinomio de cuatro términos.
   b) Factorice $6x^3 - 2xy^3 + 3x^2y^2 - y^5$ mediante el procedimiento que indicó en la parte **a)**.
8. ¿Cuál es el primer paso para factorizar $-x^2 + 8x - 15$? Explique su respuesta.

Práctica de habilidades

Factorice el máximo factor común.

9. $7n + 14$
10. $15p + 25$
11. $2x^2 - 4x + 10$
12. $6x^2 - 12x + 27$
13. $12y^2 - 16y + 28$
14. $12x^3 - 8x^2 - 6x$
15. $9x^4 - 3x^3 + 11x^2$
16. $45y^{12} + 60y^{10}$
17. $-24a^7 + 9a^6 - 3a^2$
18. $-16c^5 - 12c^4 + 6c^3$
19. $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy$
20. $24a^2b^2 + 16ab^4 + 72ab^3$
21. $80a^5b^4c - 16a^4b^2c^2 + 24a^2c$
22. $36xy^2z^3 + 36x^3y^2z + 9x^2yz$
23. $9p^4q^5r - 3p^2q^2r^2 + 12pq^5r^3$
24. $24m^6 + 8m^4 - 4m^3n$
25. $-22p^2q^2 - 16pq^3 + 26r$
26. $-15y^3z^5 - 28y^3z^6 + 9xy^2z^2$

Factorice un factor con un coeficiente negativo.

27. $-8x + 4$
28. $-20a - 30$
29. $-x^2 - 4x + 22$
30. $-y^5 - 6y^2 - 4$
31. $-3r^2 - 6r + 9$
32. $-12t^2 + 48t - 60$
33. $-6r^4s^3 + 4r^2s^4 + 2rs^5$
34. $-5p^6q^3 - 10p^4q^4 + 25pq^7$
35. $-a^4b^2c + 5a^3bc^2 + a^2b$
36. $-20x^5y^3z - 4x^4yz^2 - 8x^2y^5$

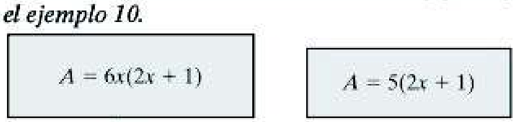
Factor.

37. $x(a + 3) + 1(a + 3)$
38. $y(b - 2) - 5(b - 2)$
39. $7x(x - 4) + 2(x - 4)^2$
40. $4y(y + 1) - 7(y + 1)^2$
41. $(x - 2)(3x + 5) - (x - 2)(5x - 4)$
42. $(z + 4)(z + 3) + (z - 1)(z + 3)$
43. $(2a + 4)(a - 3) - (2a + 4)(2a - 1)$
44. $(6b - 1)(b + 4) + (6b - 1)(2b + 5)$
45. $x^2 + 4x - 5x - 20$
46. $a^2 + 3a - 6a - 18$
47. $8y^2 - 4y - 20y + 10$
48. $18m^2 + 30m + 9m + 15$
49. $am + an + bm + bn$
50. $cx - cy - dx + dy$
51. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
52. $2z^3 + 4z^2 - 5z - 10$
53. $10m^2 - 12mn - 25mn + 30n^2$
54. $12x^2 + 9xy - 4xy - 3y^2$
55. $5a^3 + 15a^2 - 10a - 30$
56. $2r^4 - 2r^3 - 7r^2 + 7r$
57. $c^5 - c^4 + c^3 - c^2$
58. $b^4 - b^3 - b + b^2$

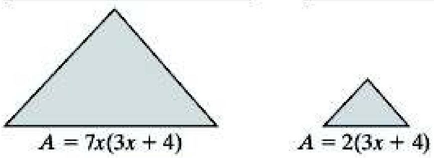
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 59 a 62, A representa una expresión para el área de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de las figuras geométricas. Vea el ejemplo 10.*

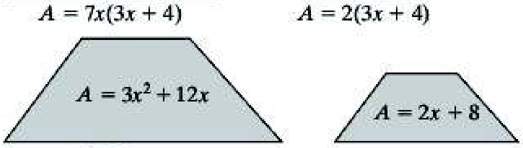
59.



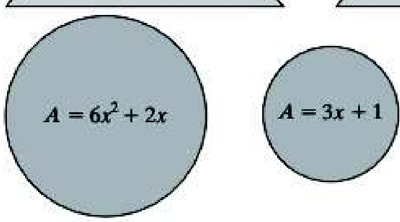
60.



61.

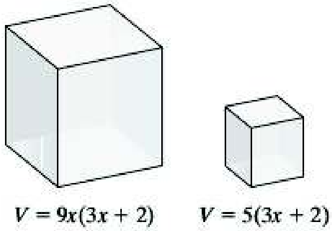


62.

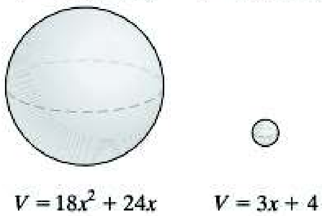


Volumen *En los ejercicios 63 y 64, V representa una expresión para el volumen de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de los sólidos geométricos.*

63.



64.



65. **Bengala** Cuando se dispara hacia arriba una bengala con una velocidad de 80 pies por segundo, su altura, h, en pies, respecto del piso a los t segundos, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 80t$.

a) Determine la altura de la bengala tres segundos después de ser disparada.

b) Exprese la función con el lado derecho en forma factorizada.

c) Evalúe $h(3)$ usando la forma factorizada de la parte **b)**.

66. **Tiro en movimiento** Cuando un basquetbolista lanza un tiro mientras salta, la altura, h, en pies, del balón por encima del piso en cualquier instante t, bajo ciertas circunstancias, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 20t + 8$.

a) Determine la altura del balón en el segundo 1.

b) Exprese la función con el lado derecho en forma factorizada.

c) Evalúe $h(1)$ utilizando la forma factorizada en la parte **b)**.

67. **Pista de patinaje** El área de la pista de patinaje con extremos semicirculares que se muestra es $A = \pi r^2 + 2rl$.

a) Determine A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies.

b) Escriba el área, A, en forma factorizada.

c) Determine A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies; utilice la forma factorizada que indicó en la parte **b)**.

68. Área La fórmula para determinar el área de un trapecio puede escribirse como $A = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$. Exprese esta fórmula en forma factorizada.

69. Compra de una computadora Fred Yang acaba de comprar una computadora en \$975 mediante un préstamo sin interés. Fred debe pagar \$75 cada mes hasta que se liquide la computadora. El monto adeudado de la computadora es una función del tiempo, donde.

$$A(t) = 975 - 75t$$

y t es el número de meses desde que Fred compró la computadora.

a) Determine el monto adeudado 6 meses después de que Fred compró la computadora.
b) Escriba la función en forma factorizada.
c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el monto que se adeuda 6 meses después de que Fred compró la computadora.

70. Salario El 2 de enero de 2006, Jill Ferguson inició un nuevo empleo con un salario anual de \$33,000. Su salario se incrementará \$1500 cada año. Así, su salario es una función del número de años que ella trabaja, donde

$$S(n) = 33{,}000 + 1500n$$

y n es los años desde 2006.

a) Determine el salario de Jill en 2010.
b) Escriba la función en forma factorizada.
c) Utilice el resultado de la parte **b)** para determinar el salario de Jill en 2010.

71. Precio de automóviles Cuando salieron a la venta los automóviles modelo 2006, su precio de lista era superior en 6% respecto del de los modelos 2005. Más tarde, el precio de todos los automóviles 2006 se redujo en 6%. El precio de venta puede representarse mediante $(x + 0.06x) - 0.06(x + 0.06x)$, donde x es el precio de lista del modelo 2005.

a) Factorice $(x + 0.06x)$ de cada término.
b) ¿El precio es mayor o menor que el precio del modelo 2005?

Lea el ejercicio 71 antes de resolver los ejercicios 72 a 74.

72. Precio de un vestido El precio de un vestido se reduce en 10%, y luego se le aplica un nuevo descuento de 10%.

a) Escriba una expresión para calcular el precio final del vestido.
b) Compare el precio final con el precio normal del vestido; ¿cómo son? Utilice factorización para obtener su respuesta.

73. Precio de una segadora El precio de una segadora aumentó 15%. Más tarde, en una venta especial, su precio se redujo en 20%.

a) Escriba una expresión para calcular el precio final de la segadora.
b) Compare el precio final con el precio normal; ¿cómo son? Utilice factorización para obtener su respuesta.

74. Determinación de precio ¿En cuál de las siguientes partes, **a)** o **b)**, el precio final será menor y por cuánto?

a) Disminuya el precio de un artículo en 6% y luego auméntelo en 8%.
b) Aumente el precio de un artículo en 6% y luego disminúyalo en 8%.

Factorice.

75. $5a(3x + 2)^5 + 4(3x + 2)^4$

76. $4p(2r - 3)^7 - 3(2r - 3)^6$

77. $4x^2(x - 3)^3 - 6x(x - 3)^2 + 4(x - 3)$

78. $12(p + 2q)^4 - 40(p + 2q)^3 + 12(p + 2q)^2$

79. $ax^2 + 2ax - 3a + bx^2 + 2bx - 3b$

80. $6a^2 - a^2c + 18a - 3ac + 6ab - abc$

Factorice. Suponga que todas las variables de los exponentes representan números naturales.

81. $x^{6m} - 2x^{4m}$

82. $x^{2mn} + x^{6mn}$

83. $3x^{4m} - 2x^{3m} + x^{2m}$

84. $r^{y+4} + r^{y+3} + r^{y+2}$

85. $a^rb^r + c^rb^r - a^rd^r - c^rd^r$

86. $6a^kb^k - 2a^kc^k - 9b^k + 3c^k$

87. a) $6x^3 - 3x^2 + 9x = 3x(2x^2 - x + 3)$?

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $6x^3 - 3x^2 + 9x - [3x(2x^2 - x + 3)]$ para cualquier valor de x? Explique.

c) Seleccione un valor para x y evalúe la expresión de la parte **b)**. ¿Obtuvo lo que esperaba? Si no, explique por qué.

88. a) Determine si la siguiente factorización es correcta.

$$\begin{aligned} 3(x - 2)^2 - 6(x - 2) &= 3(x - 2)[(x - 2) - 2] \\ &= 3(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $3(x - 2)^2 - 6(x - 2) - [3(x - 2)(x - 4)]$ para cualquier valor de x? Explique.

c) Seleccione un valor para x y evalúe la expresión de la parte **b)**. ¿Obtuvo lo que esperaba? Si no, explique por qué.

89. Considere la factorización $8x^3 - 16x^2 - 4x = 4x(2x^2 - 4x - 1)$.

a) Si hacemos
$$y_1 = 8x^3 - 16x^2 - 4x$$
$$y_2 = 4x(2x^2 - 4x - 1)$$
y graficamos cada función, ¿qué debería suceder? Explique.

b) En su calculadora graficadora, grafique y_1 y y_2, cómo se dieron en la parte **a)**.

c) ¿Obtuvo los resultados que esperaba?

d) Al verificar un procedimiento de factorización mediante esta técnica, ¿qué significa si las gráficas no se intersecan? Explique.

90. Considere la factorización $2x^4 - 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$.

a) Introduzca
$$y_1 = 2x^4 - 6x^3 - 8x^2$$
$$y_2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$$
en su calculadora.

b) Si utiliza la característica TABLE de su calculadora, al comparar la tabla de valores para y_1 con la tabla de valores para y_2, ¿qué esperaría? Explique.

c) Utilice la característica TABLE para mostrar los valores de y_1 y y_2 para valores de x de 0 a 6.

d) ¿Obtuvo los resultados que esperaba?

e) Cuando comprueba un proceso de factorización utilizando la característica TABLE, ¿qué significa que los valores de y_1 y y_2 sean diferentes?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **91.** Evalúe $\dfrac{\left(\left|\frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{3}\right|\right)^2}{-\left|\frac{1}{3}\right| \cdot \left|-\frac{2}{5}\right|}$.

[2.1] **92.** Resuelva $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$.

[3.1] **93.** Grafique $y = x^2 - 1$.

[4.3] **94.** **Ejercicio** Jason Richter hace ejercicio todos los días: camina a 3 mph y luego trota a 5 mph. Si tarda 0.9 horas en recorrer un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo trota?

[5.2] **95.** Multiplique $(7a - 3)(-2a^2 - 4a + 1)$.

Examen de mitad de capítulo: 5.1-5.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

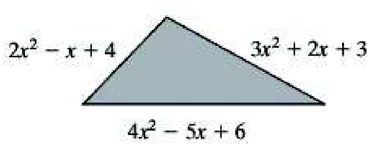
1. Escriba el polinomio $-7 + 2x + 5x^4 - 1.5x^3$, en orden descendente. Proporcione el grado de este polinomio.

2. Evalúe $P\left(\frac{1}{2}\right)$ dado que $P(x) = 8x^2 - 7x + 3$.

3. Simplifique $(2n^2 - n - 12) + (-3n^2 - 6n + 8)$.

4. Reste $(7x^2y - 10xy)$ de $(-9x^2y + 4xy)$.

5. Determine una expresión polinomial, en forma simplificada, para el perímetro del triángulo.



Multiplique.

6. $2x^5(3xy^4 + 5x^2 - 7x^3y)$

7. $(7x - 6y)(3x + 2y)$

8. $(3x + 1)(2x^3 - x^2 + 5x + 9)$

9. $\left(8p - \frac{1}{5}\right)\left(8p + \frac{1}{5}\right)$

10. $(4m - 3n)(3m^2 + 2mn - 6n^2)$

11. Escriba $x^2 - 14x + 49$ como el cuadrado de un binomio. Explique cómo determinó su respuesta.

Divida.

12. $\dfrac{4x^4y^3 + 6x^2y^2 - 11x}{2x^2y^2}$

13. $\dfrac{12x^2 + 23x + 7}{4x + 1}$

14. $\dfrac{2y^3 - y^2 + 7y - 10}{2y - 3}$

Utilice división sintética para dividir.

15. $\dfrac{x^2 - x - 72}{x + 8}$

16. $\dfrac{3a^4 - 2a^3 - 14a^2 + 11a + 2}{a - 2}$

17. Factorice el máximo factor común en $32b^3c^3 + 16b^2c + 24b^5c^4$.

Factorice completamente.

18. $7b(2x + 9) - 3c(2x + 9)$

19. $2b^4 - b^3c + 4b^3c - 2b^2c^2$

20. $5a(3x - 2)^5 - 4(3x - 2)^6$

5.5 Factorización de trinomios

1. Factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$.
2. Factorizar un factor común.
3. Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 1$, mediante prueba y error.
4. Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 1$ mediante agrupación.
5. Factorizar trinomios mediante sustitución.

1 Factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$

En esta sección aprenderemos a **factorizar trinomios** con la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Observe que a representa el coeficiente del término x al cuadrado, b representa el coeficiente del término x, y c representa el término constante.

Trinomios	Coeficientes
$3x^2 + 2x - 5$	$a = 3, \quad b = 2, \quad c = -5$
$-\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$	$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -4, \quad c = 3$

Para factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$ (nota: $a = 1$)

1. Determine dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
2. Los factores del trinomio tendrán la forma

$$(x + \underbrace{\quad}_{\substack{\text{Un factor}\\ \text{determinado}\\ \text{en el paso 1}}})(x + \underbrace{\quad}_{\substack{\text{Otro factor}\\ \text{determinado}\\ \text{en el paso 1}}})$$

Si los números determinados en el paso 1 son, por ejemplo, 3 y -5, los factores se escribirían $(x + 3)(x - 5)$. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Factorice $x^2 - x - 12$.

Solución $a = 1, b = -1, c = -12$. Debemos determinar dos números cuyo producto sea c, que es -12, y cuya suma es b, que es -1. Iniciamos listando los factores de -12 para intentar encontrar un par cuya suma sea -1.

Factores de -12	Suma de factores
$(1)(-12)$	$1 + (-12) = -11$
$(2)(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$(3)(-4)$	$3 + (-4) = -1$
$(4)(-3)$	$4 + (-3) = 1$
$(6)(-2)$	$6 + (-2) = 4$
$(12)(-1)$	$12 + (-1) = 11$

Los números que estamos buscando son 3 y -4, ya que su producto es -12 y su suma es -1. Ahora factorizamos el trinomio utilizando estos números.

$$x^2 - x - 12 = (x + \underbrace{3}_{\substack{\text{Un factor}\\ \text{de } -12}})(x \underbrace{- 4}_{\substack{\text{Otro factor}\\ \text{de } -12}})$$

Ahora resuelva el ejercicio 13

Observe que, en el ejemplo 1, listamos todos los factores de -12. Sin embargo, después de que se han encontrado dos factores cuyo producto es c y cuya suma es b, no hay necesidad de listar los demás factores. Los factores se listaron para mostrar, por ejemplo, que $(2)(-6)$ es un conjunto de factores diferente que $(-2)(6)$. Observe que conforme el factor positivo aumenta, también lo hace la suma de los factores.

Sugerencia útil

Considere los factores $(2)(-6)$ y $(-2)(6)$ y sus sumas.

Factores	Suma de factores
$2(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$-2(6)$	$-2 + 6 = 4$

Observe que si se cambia el signo de cada número del producto, el signo de la suma de los factores se modifica. Podemos utilizar este hecho para determinar con más rapidez los factores que estamos buscando. Si al buscar una suma específica obtiene el opuesto de esa suma, cambie el signo de cada factor para obtener la suma que está buscando.

EJEMPLO 2 ▸ Factorice $p^2 - 7p + 6$.

Solución Debemos determinar dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea -7. Puesto que la suma de dos números negativos es un número negativo, y el producto de dos números negativos es un número positivo, ambos números deben ser negativos. Los factores negativos de 6 son $(-1)(-6)$ y $(-2)(-3)$. Como se muestra a continuación, los números que estamos buscando son -1 y -6.

Factores de 6	Suma de los factores
$(-1)(-6)$	$-1 + (-6) = -7$
$(-2)(-3)$	$-2 + (-3) = -5$

Por lo tanto,

$$p^2 - 7p + 6 = (p - 1)(p - 6)$$

Como los factores pueden colocarse en cualquier orden, $(p - 6)(p - 1)$ también es una respuesta aceptable.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

Sugerencia útil

Comprobación de la factorización

Las respuestas a problemas de factorización pueden verificarse multiplicando los factores que se obtuvieron. Si la factorización es correcta, usted obtendrá el polinomio con el que inició. Para comprobar el ejemplo 2, multiplicaremos los factores utilizando el método PIES.

$$(p - 1)(p - 6) = p^2 - 6p - p + 6 = p^2 - 7p + 6$$

Como el producto de los factores es el trinomio con el que empezamos, nuestra factorización es correcta. No olvide verificar siempre su factorización.

El procedimiento utilizado para factorizar trinomios con la forma $x^2 + bx + c$ puede utilizarse con otros trinomios, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ▸ Factorice $x^2 + 2xy - 15y^2$.

Solución Debemos determinar dos números cuyo producto sea -15 y cuya suma sea 2. Los dos números son 5 y -3.

Factores de -15	Suma de los factores
$5(-3)$	$5 + (-3) = 2$

Como el último término del trinomio contiene a y^2, el segundo término de cada factor debe contener a y.

$$x^2 + 2xy - 15y^2 = (x + 5y)(x - 3y)$$

Comprobación $\quad (x + 5y)(x - 3y) = x^2 - 3xy + 5xy - 15y^2$

$$= x^2 + 2xy - 15y^2$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

2 Factorizar un factor común

El primer paso para factorizar cualquier trinomio consiste en determinar si los tres términos tienen un factor común. Si es así, factorice ese factor común y luego el polinomio restante.

EJEMPLO 4 ▸ Factorice $3x^4 - 6x^3 - 72x^2$.

Solución El factor $3x^2$ es común a los tres términos del trinomio. Primero factorícelo.

$$3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 24) \qquad \text{Factorizar } 3x^2.$$

El término $3x^2$ que se factorizó es parte de la respuesta, pero ya no desempeña papel alguno en el procedimiento de factorización. Ahora continúe factorizando $x^2 - 2x - 24$. Determine dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea -2. Los números son -6 y 4.

$$3x^2(x^2 - 2x - 24) = 3x^2(x - 6)(x + 4)$$

Por lo tanto, $3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x - 6)(x + 4)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 33**

3 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error

A continuación analizaremos algunos ejemplos de factorización de trinomios con la forma

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 1$$

Se ilustrarán dos métodos para factorizar este tipo de trinomios. El primer método, llamado de prueba y error, implica ensayar diferentes combinaciones hasta encontrar la correcta. El segundo método hace uso de la factorización por agrupación, un procedimiento que se presentó en la sección 5.4.

Analicemos primero el método de prueba y error para factorizar trinomios. En ocasiones, a este procedimiento se le denomina el método PIES (o PIES inverso). Para facilitar nuestra explicación, multiplicaremos $(2x + 3)(x + 1)$ mediante el método PIES.

Producto de primeros términos

Producto de segundos términos

$$(2x + 3)(x + 1) = \overset{\text{P}}{2x(x)} + \overset{\text{I}}{3(x)} + \overset{\text{E}}{2x(1)} + \overset{\text{S}}{3(1)} = 2x^2 + 5x + 3$$

Suma de los productos de los términos externos e internos

Por lo tanto, si factoriza el trinomio $2x^2 + 5x + 3$ se dará cuenta de que el producto de los primeros términos de los factores debe ser $2x^2$, el producto de los segundos términos debe ser 3, y la suma de los productos de los términos externos e internos debe ser $5x$.

Para factorizar $2x^2 + 5x + 3$, empezamos como se muestra aquí.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x \qquad)(x \qquad) \quad \text{El producto de los primeros términos es } 2x^2.$$

Ahora completamos los segundos términos utilizando enteros positivos cuyo producto sea 3. Sólo tomaremos en cuenta enteros positivos, ya que el producto de los últimos términos es positivo y la suma de los productos de los términos externos e internos también lo es. Las dos posibilidades son

$$\left.\begin{array}{l}(2x + 1)(x + 3)\\(2x + 3)(x + 1)\end{array}\right\} \quad \text{El producto de los segundos términos es 3.}$$

Para determinar cuál factorización es correcta, determinamos la suma de los productos de los términos externos e internos. Si alguna de las sumas da por resultado $5x$, el término central del trinomio, la factorización es correcta.

$$(2x + 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3 \quad \text{Término central incorrecto}$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3 \quad \text{Término central correcto}$$

Por consiguiente, los factores de $2x^2 + 5x + 3$ son $2x + 3$ y $x + 1$. Así,

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1).$$

Observe que si hubiésemos empezado la factorización escribiendo

$$2x^2 + 5x + 3 = (x \qquad)(2x \qquad)$$

también habríamos obtenido los factores correctos.

A continuación se indican algunas directrices para utilizar el método de **prueba y error** de factorización de un trinomio, en donde $a \neq 1$ y los tres términos carecen de factores comunes.

Para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error

1. Escriba todos los pares de factores del coeficiente del término cuadrático, a.
2. Escriba todos los pares de factores de la constante, c.
3. Intente diferentes combinaciones con estos factores hasta encontrar el término central correcto, bx.

EJEMPLO 5 Factorice $3t^2 - 13t + 10$.

Solución Primero comprobamos si los tres términos carecen de factor común. Luego determinamos que a es 3 y que los únicos factores de 3 son 1 y 3. Por consiguiente, escribimos

$$3t^2 - 13t + 10 = (3t \qquad)(t \qquad)$$

El número 10 tiene factores positivos y negativos. Sin embargo, ya que el producto de los segundos términos debe ser positivo $(+10)$ y la suma de los productos de los términos exterior e interior debe ser negativa (-13), los dos factores del 10 deben ser negativos. (¿Por que?) Los factores negativos de 10 son $(-1)(-10)$ y $(-2)(-5)$. A continuación se ofrece una lista de los factores posibles. Buscamos los factores que nos proporcionen el término central correcto, $-13t$.

Factores posibles	Suma de productos de términos externos e internos	
$(3t - 1)(t - 10)$	$-31t$	
$(3t - 10)(t - 1)$	$-13t$	⟵ Término central correcto
$(3t - 2)(t - 5)$	$-17t$	
$(3t - 5)(t - 2)$	$-11t$	

Por lo tanto, $3t^2 - 13t + 10 = (3t - 10)(t - 1)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

La siguiente sugerencia es muy importante. Estúdiela cuidadosamente.

Sugerencia útil

Factorización por prueba y error

Al factorizar un trinomio con la forma $ax^2 + bx + c$, el signo del término constante, c, es muy útil para determinar la solución. Si $a > 0$, entonces:

1. Cuando el término constante, c, es positivo y el coeficiente numérico del término x, b, es positivo, ambos factores numéricos serán positivos.

   Ejemplo

   $$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

   Positivo Positivo Positivo Positivo

2. Cuando c es positivo y b es negativo, ambos factores numéricos serán negativos.

   Ejemplo

   $$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

   Negativo Positivo Negativo Negativo

   Siempre que la constante c sea positiva (como en los dos ejemplos anteriores) el signo en ambos factores será igual que el signo del término x del trinomio.

3. Cuando c es negativa, uno de los factores numéricos será positivo y el otro será negativo.

   Ejemplo

   $$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

   Negativo Positivo Negativo

EJEMPLO 6 Factorice $8x^2 + 8x - 30$.

Solución Primero verificamos si los tres términos tienen un factor común. Observe que 2 puede factorizarse.

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(4x^2 + 4x - 15)$$

Los factores de 4, el coeficiente principal, son $4 \cdot 1$ y $2 \cdot 2$. Por lo tanto, la factorización será de la forma $(4x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(2x \quad)$. No importa si inicia con el primer conjunto de factores o con el segundo. Por lo general, iniciaremos primero con factores de tamaño medio, por lo que comenzaremos con $(2x \quad)(2x \quad)$. Si al emplear estos factores no se obtiene la respuesta, trabajaremos con el otro conjunto. Los factores de -15 son $(1)(-15)$, $(3)(-5)$, $(5)(-3)$ y $(15)(-1)$. Necesitamos que el término central sea $4x$.

Factores posibles	Suma de productos de los términos externos e internos
$(2x + 1)(2x - 15)$	$-28x$
$(2x + 3)(2x - 5)$	$-4x$
$(2x + 5)(2x - 3)$	$4x$

Como encontramos el conjunto de factores que proporciona el término correcto para x, podemos detenernos. Así,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

Ahora resuelva el ejercicio 37

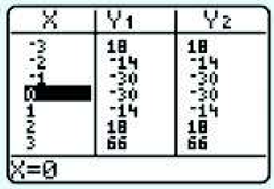
En el ejemplo 6, si comparamos el segundo y tercer conjuntos de factores, vemos que están constituidos por los mismos números, excepto por los signos de los segundos términos. Observe que cuando los signos del segundo término de cada factor se intercambian, la suma de los productos de los términos externos e internos también cambia de signo.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

La calculadora graficadora puede utilizarse para comprobar problemas de factorización. Para verificar la factorización del ejemplo 6,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

hacemos $Y_1 = 8x^2 + 8x - 30$ y $Y_2 = 2(2x + 5)(2x - 3)$. Luego utilizamos la característica TABLE para comparar resultados, como se muestra en la **figura 5.14**.



X	Y1	Y2
-3	18	18
-2	-14	-14
-1	-30	-30
0	-30	-30
1	-14	-14
2	18	18
3	66	66

X=0

FIGURA 5.14

Como Y_1 y Y_2 tienen los mismos valores para cada valor de x, no se han cometido errores. Este procedimiento sólo puede indicarle si se han cometido equivocaciones, pero no si ha factorizado por completo. Por ejemplo, $8x^2 + 8x - 30$ y $(4x + 10)(2x - 3)$ darán el mismo conjunto de valores.

EJERCICIOS

Utilice su graficadora para determinar si cada trinomio se ha factorizado correctamente.

1. $30x^2 + 37x - 84 \stackrel{?}{=} (6x - 7)(5x + 12)$ **2.** $72x^2 + 20x - 35 \stackrel{?}{=} (9x - 5)(8x + 7)$

EJEMPLO 7 Factorice $6x^2 - 11xy - 10y^2$.

Solución Los factores de 6 son $6 \cdot 1$ o $2 \cdot 3$. Por lo tanto, los factores del trinomio pueden ser de la forma $(6x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(3x \quad)$. Comenzaremos con los factores de tamaño medio; escribimos

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x \quad)(3x \quad)$$

Los factores de -10 son $(-1)(10)$, $(1)(-10)$, $(-2)(5)$ y $(2)(-5)$. Como hay ocho factores de -10, habrá ocho parejas de posibles factores por probar. ¿Puede enumerarlos? La factorización correcta es

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x - 5y)(3x + 2y)$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

En el ejemplo 7 fuimos afortunados de encontrar los factores correctos usando la forma $(2x \quad)(3x \quad)$. Si no hubiésemos encontrado los factores correctos empleando esa forma, tendríamos que haber probado $(6x \quad)(x \quad)$.

Al factorizar un trinomio cuyo coeficiente principal es negativo, empezamos factorizando un número negativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} -24x^3 - 60x^2 + 36x &= -12x(2x^2 + 5x - 3) && \text{Factorizar } -12x. \\ &= -12x(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -3x^2 + 8x + 16 &= -1(3x^2 - 8x - 16) && \text{Factorizar } -1. \\ &= -(3x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 **Área de una región sombreada** Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en la **figura 5.15**.

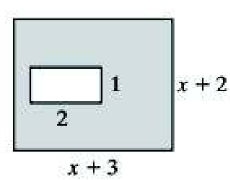


FIGURA 5.15

Solución Para calcular el área de la región sombreada, necesitamos restar el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande. Recuerde que el área del rectángulo es largo · ancho.

$$\begin{aligned}
\text{Área del rectángulo grande} &= (x + 3)(x + 2)\\
&= x^2 + 2x + 3x + 6\\
&= x^2 + 5x + 6\\
\text{Área del rectángulo pequeño} &= (2)(1) = 2\\
\text{Área de la región sombreada} &= \text{área grande} - \text{área pequeña}\\
&= x^2 + 5x + 6 - 2\\
&= x^2 + 5x + 4 \quad \text{Simplificar.}\\
&= (x + 4)(x + 1) \quad \text{Factorizar.}
\end{aligned}$$

El área de la región sombreada es $(x + 4)(x + 1)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 89**

4 Factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ mediante agrupación

Ahora estudiaremos el método por **agrupación** para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$.

Para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ mediante agrupación

1. Determine dos números cuyo producto sea $a \cdot c$, y cuya suma sea b.
2. Reescriba el término central, bx, mediante los números determinados en el paso 1.
3. Factorice por agrupación.

EJEMPLO 9 ▸ Factorice $2x^2 - 5x - 12$.

Solución Vemos que $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ o $2(-12) = -24$, y cuya suma sea b, -5. Los dos números son -8 y 3, ya que $(-8)(3) = -24$, y $-8 + 3 = -5$. Ahora reescriba el término central, $-5x$, utilizando $-8x$ y $3x$.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 \overbrace{- 8x + 3x}^{-5x} - 12$$

Ahora, factorice por agrupación como se explicó en la sección 5.4. Factorice $2x$ de los primeros dos términos, y 3 de los últimos dos.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x + 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12\\
&= 2x(x - 4) + 3(x - 4)\\
&= (x - 4)(2x + 3) \quad \text{Factorizar } (x - 4).
\end{aligned}$$

Por tanto, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 61**

Observe que en el ejemplo 9 escribimos $-5x$ como $-8x + 3x$. Como se demuestra enseguida, se tendrían los mismos factores si escribiéramos $-5x$ como $3x - 8x$. Por lo tanto, cuando se factoriza por agrupación no importa cuál factor se liste primero. A continuación factorizamos x de los primeros dos términos y -4 de los últimos dos.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 \overbrace{+ 3x - 8x}^{-5x} - 12\\
&= x(2x + 3) - 4(2x + 3)\\
&= (2x + 3)(x - 4) \quad \text{Factorizar } (2x + 3).
\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 ▸ Factorice $12a^2 - 19ab + 5b^2$.

Solución Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $(12)(5) = 60$, y cuya suma sea -19. Como el producto de los números es positivo y su suma es negativa, los dos números deben ser negativos. (¿Por qué?).

Los dos números son -15 y -4 ya que $(-15)(-4) = 60$ y $-15 + (-4) = -19$. Ahora reescribimos el término central, $-19ab$, utilizando $-15ab$ y $-4ab$. Luego factorizamos por agrupación.

$$\begin{aligned} 12a^2 - 19ab + 5b^2 &= 12a^2 \overbrace{- 15ab - 4ab}^{-19ab} + 5b^2 \\ &= 3a(4a - 5b) - b(4a - 5b) \\ &= (4a - 5b)(3a - b) \end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

Resuelva nuevamente el ejemplo 10, pero esta vez escribiendo $-19ab$ como $-4ab - 15ab$. Si lo hace de la manera correcta, obtendrá los mismos factores.

Es importante que sepa que no todos los trinomios pueden factorizarse por los métodos que se presentaron en esta sección. En las secciones 8.1 y 8.2 se explicarán algunos procedimientos para factorizar polinomios que no pueden factorizarse usando sólo enteros (o sobre el conjunto de enteros). Un polinomio que no puede factorizarse (sobre un conjunto específico de números) se denomina **polinomio primo**.

EJEMPLO 11 ▸ Factorice $2x^2 + 6x + 5$.

Solución Cuando trate de factorizar este polinomio verá que no es posible hacerlo por los métodos de prueba y error o agrupación. Éste es un polinomio primo sobre el conjunto de enteros.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 47

5 Factorizar trinomios mediante sustitución

En ocasiones un trinomio más complicado puede factorizarse sustituyendo una variable por otra. Los tres ejemplos siguientes ilustran la **factorización mediante sustitución**.

EJEMPLO 12 ▸ Factorice $y^4 - y^2 - 6$.

Solución Si podemos reescribir esta expresión en la forma $ax^2 + bx + c$, será más fácil factorizarla. Como $(y^2)^2 = y^4$, si sustituimos y^2 por x, el trinomio se convierte en

$$\begin{aligned} y^4 - y^2 - 6 &= (y^2)^2 - y^2 - 6 \\ &= x^2 - x - 6 \qquad \text{Sustituir } y^2 \text{ por } x. \end{aligned}$$

Ahora factorice $x^2 - x - 6$.

$$= (x + 2)(x - 3)$$

Finalmente, sustituya x con y^2 para obtener

$$= (y^2 + 2)(y^2 - 3) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } y^2.$$

Así, $y^4 - y^2 - 6 = (y^2 + 2)(y^2 - 3)$. Observe que y^2 se sustituyó por x, y después x se sustituyó nuevamente por y^2.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

EJEMPLO 13 Factorice $3z^4 - 17z^2 - 28$.

Solución Sea $x = z^2$. Entonces el trinomio puede escribirse

$$\begin{aligned} 3z^4 - 17z^2 - 28 &= 3(z^2)^2 - 17z^2 - 28 \\ &= 3x^2 - 17x - 28 && \text{Sustituir } z^2 \text{ por } x. \\ &= (3x + 4)(x - 7) && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$

Ahora sustituya x por z^2.

$$= (3z^2 + 4)(z^2 - 7) \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } z^2.$$

Así, $3z^4 - 17z^2 - 28 = (3z^2 + 4)(z^2 - 7)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 14 Factorice $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12$.

Solución Nuevamente usaremos una sustitución, como en los ejemplos 12 y 13. Al sustituir $a = x + 5$ en la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} &2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 \\ &= 2a^2 - 5a - 12 && \text{Sustituir } (x + 5) \text{ por } a. \end{aligned}$$

Ahora factorice $2a^2 - 5a - 12$.

$$= (2a + 3)(a - 4)$$

Por último, reemplace a con $x + 5$ para obtener

$$\begin{aligned} &= [2(x + 5) + 3][(x + 5) - 4] && \text{Sustituir } a \text{ por } (x + 5). \\ &= [2x + 10 + 3][x + 1] \\ &= (2x + 13)(x + 1) \end{aligned}$$

Así, $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 = (2x + 13)(x + 1)$. Observe que $x + 5$ se sustituyó por a, y luego a por $x + 5$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

En los ejemplos 12 y 13 usamos x en nuestra sustitución, mientras que en el ejemplo 14 utilizamos a. La letra seleccionada no afecta la respuesta final.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Al factorizar un trinomio, ¿cuál debe ser siempre el primer paso?
2. En un examen, Tom Phu escribió la siguiente factorización, pero el profesor la consideró incompleta. Explique por qué la factorización de Tom no es completa.
$$15x^2 - 21x - 18 = (5x + 3)(3x - 6)$$
3. **a)** Explique paso a paso el procedimiento para factorizar $6x^2 + x - 12$.
   b) Factorice $6x^2 + x - 12$ mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**.
4. **a)** Explique paso a paso el procedimiento para factorizar $8x^2 - 20x - 12$.
   b) Factorice $8x^2 - 20x - 12$ mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**.
5. El polinomio $2x^2 + 8x + 6 = (x + 3)(2x + 2)$, ¿se ha factorizado completamente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
6. El polinomio $x^3 - 3x^2 - 10x = (x^2 + 2x)(x - 5)$, ¿se ha factorizado completamente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
7. El polinomio $3x^3 + 6x^2 - 24x = x(x + 4)(3x - 6)$, ¿se ha factorizado por completo? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.
8. El polinomio $x^4 + 11x^3 + 30x^2 = x^2(x + 5)(x + 6)$, ¿se ha factorizado totalmente? Si no es así, proporcione la factorización completa. Explique.

Al factorizar un trinomio con la forma $ax^2 + bx + c$, ¿cuál será el signo entre los términos de los factores binomiales? si:

9. $a > 0, b > 0$ y $c > 0$
10. $a > 0, b > 0$ y $c < 0$
11. $a > 0, b < 0$ y $c < 0$
12. $a > 0, b < 0$ y $c > 0$

Práctica de habilidades

Factorice de forma completa cada trinomio. Si el polinomio es primo, indíquelo.

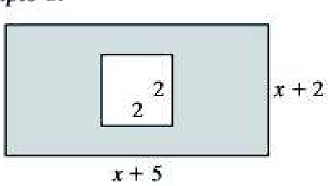
13. $x^2 + 7x + 12$
14. $a^2 - 2a - 15$
15. $b^2 + 8b - 9$
16. $y^2 - 9y + 20$
17. $z^2 + 4z + 4$
18. $c^2 - 12c + 36$
19. $r^2 + 24r + 144$
20. $y^2 - 18y + 81$
21. $x^2 + 30x - 64$
22. $x^2 + 11x - 210$
23. $x^2 - 13x - 30$
24. $p^2 - 6p - 19$
25. $-a^2 + 18a - 45$
26. $-x^2 - 15x - 56$
27. $x^2 + xy + 7y^2$
28. $a^2 + 7ab + 12b^2$
29. $-2m^2 - 14m - 20$
30. $-3x^2 - 12x - 9$
31. $4r^2 + 12r - 16$
32. $b^2 - 12bc - 45c^2$
33. $x^3 + 3x^2 - 18x$
34. $x^4 + 14x^3 + 33x^2$
35. $5a^2 - 8a + 3$
36. $4w^2 + 9w + 2$
37. $3x^2 - 3x - 6$
38. $-3b^2 - 14b + 5$
39. $6c^2 - 13c - 63$
40. $30z^2 - 71z + 35$
41. $8b^2 - 2b - 3$
42. $4a^2 + 43a + 30$
43. $6c^2 + 11c - 10$
44. $5z^2 - 11z + 6$
45. $16p^2 - 16pq - 12q^2$
46. $6r^4 + 5r^3 - 4r^2$
47. $4x^2 + 4xy + 9y^2$
48. $6r^2 + 7rs + 8s^2$
49. $18a^2 + 18ab - 8b^2$
50. $9y^2 - 104y - 48$
51. $8x^2 + 30xy - 27y^2$
52. $32x^2 - 22xy + 3y^2$
53. $100b^2 - 90b + 20$
54. $x^5y - 3x^4y - 18x^3y$
55. $a^3b^5 - a^2b^5 - 12ab^5$
56. $a^3b + 2a^2b - 35ab$
57. $3b^4c - 18b^3c^2 + 27b^2c^3$
58. $6p^3q^2 - 24p^2q^3 - 30pq^4$
59. $8m^8n^3 + 4m^7n^4 - 24m^6n^5$
60. $18x^2 + 9x - 20$
61. $30x^2 - x - 20$
62. $36x^2 - 23x - 8$
63. $8x^4y^5 + 24x^3y^5 - 32x^2y^5$
64. $8b^3c^2 + 28b^2c^3 + 12bc^4$

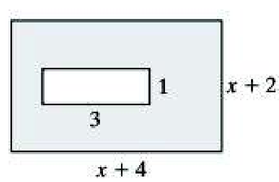
Factorice de forma completa cada trinomio.

65. $x^4 + x^2 - 6$
66. $y^4 + y^2 - 12$
67. $b^4 + 9b^2 + 20$
68. $c^4 + 8c^2 + 12$
69. $6a^4 + 5a^2 - 25$
70. $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1) - 15$
71. $4(x + 1)^2 + 8(x + 1) + 3$
72. $(2y + 3)^2 - (2y + 3) - 6$
73. $6(a + 2)^2 - 7(a + 2) - 5$
74. $6(p - 5)^2 + 11(p - 5) + 3$
75. $x^2y^2 + 9xy + 14$
76. $a^2b^2 + 6ab - 27$
77. $2x^2y^2 - 9xy - 11$
78. $3b^2c^2 - bc - 2$
79. $2y^2(2 - y) - 7y(2 - y) + 5(2 - y)$
80. $2y^2(y + 3) + 13y(y + 3) + 15(y + 3)$
81. $2p^2(p - 4) + 7p(p - 4) + 6(p - 4)$
82. $3x^2(x - 1) + 5x(x - 1) - 2(x - 1)$
83. $a^6 - 7a^3 - 30$
84. $2y^6 - 9y^3 - 5$
85. $x^2(x + 5) + 3x(x + 5) + 2(x + 5)$
86. $x^2(x + 6) - x(x + 6) - 30(x + 6)$
87. $5a^5b^2 - 8a^4b^3 + 3a^3b^4$
88. $2x^4y^6 + 3x^3y^5 - 9x^2y^4$

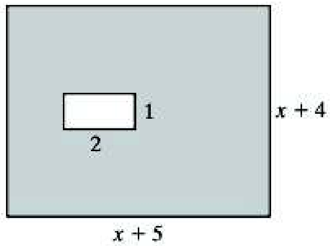
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 89 a 92 determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de cada región sombreada. Vea el ejemplo 8.*

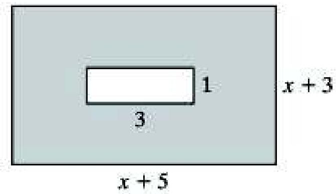
89.


90.


91.



92.



93. Si los factores de un polinomio son $(2x + 3y)$ y $(x - 4y)$, encuentre el polinomio. Explique cómo determinó su respuesta.

94. Si los factores de un polinomio son 3, $(4x + 5)$ y $(2x + 3)$, encuentre el polinomio. Explique cómo determinó su respuesta.

95. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 + 4x - 21$ es $x - 3$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determine el otro factor.

96. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 - xy - 6y^2$ es $x - 3y$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determine el otro factor.

97. **a)** De los siguientes trinomios, ¿cuál será más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explique su respuesta.

$$30x^2 + 23x - 40 \quad \text{o} \quad 49x^2 - 98x + 13$$

b) Factorice ambos trinomios.

98. **a)** De los siguientes trinomios, ¿cuál cree que será más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explique su respuesta.

$$48x^2 + 26x - 35 \quad \text{o} \quad 35x^2 - 808x + 69$$

b) Factorice ambos trinomios.

99. Determine todos los valores enteros de b para los que $2x^2 + bx - 5$ es factorizable.

100. Determine todos los valores enteros de b para los que $3x^2 + bx - 7$ es factorizable.

101. Si $x^2 + bx + 5$ es factorizable, ¿cuáles son los únicos dos valores posibles de b? Explique.

102. Si $x^2 + bx + c$ es factorizable y c es un número primo, ¿cuáles son los únicos dos factores posibles de b? Explique.

Considere el trinomio $ax^2 + bx + c$. Más adelante en el curso aprenderá que si la expresión $b^2 - 4ac$, denominada el ***discriminante****, no es un cuadrado perfecto, el trinomio no puede factorizarse en el conjunto de enteros.* ***Cuadrados perfectos*** *son 1, 4, 9, 16, 25, 49, etcétera. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es un número entero no negativo. En los ejercicios 103 a 106,* **a)** *determine el valor de $b^2 - 4ac$.* **b)** *Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, factorice el polinomio; si $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, indique que el polinomio no puede factorizarse.*

103. $x^2 - 8x + 15$

104. $6y^2 - 5y - 6$

105. $x^2 - 4x + 6$

106. $3t^2 - 6t + 2$

107. Construya un trinomio, que se pueda factorizar, con la forma $x^2 + (c + 1)x + c$, en donde c es un número real.

108. Construya un trinomio, que se pueda factorizar, con la forma $x^2 - (c + 1)x + c$, en donde c es un número real.

En los ejercicios 109 a 114, factorice completamente. Suponga que las variables en los exponentes representan enteros positivos.

109. $4a^{2n} - 4a^n - 15$

110. $a^2(a + b) - 2ab(a + b) - 3b^2(a + b)$

111. $x^2(x + y)^2 - 7xy(x + y)^2 + 12y^2(x + y)^2$

112. $3m^2(m - 2n) - 4mn(m - 2n) - 4n^2(m - 2n)$

113. $x^{2n} + 3x^n - 10$

114. $9r^{4y} + 3r^{2y} - 2$

115. Considere $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

a) Explique cómo puede comprobar esta factorización mediante gráficas en su calculadora graficadora.

b) Compruebe si la factorización es correcta siguiendo el procedimiento que explicó en la parte **a)**.

116. Considere $6x^3 - 11x^2 - 10x = x(2x - 5)(3x + 2)$.

a) Explique cómo puede comprobar esta factorización utilizando la característica TABLE de una calculadora graficadora.

b) Compruebe si la factorización es correcta siguiendo el procedimiento que explicó en la parte **a)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **117.** Resuelva $F = \frac{9}{5}C + 32$ por C.

[3.3] **118.** Grafique $y = -3x + 4$.

[4.5] **119.** Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

[5.2] **120.** Multiplique $[(x + y) + 6]^2$.

[5.3] **121.** Factorice $2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$.

5.6 Fórmulas especiales de factorización

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados.

2 Factorizar trinomios cuadrados perfectos.

3 Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

En esta sección se presentan algunas fórmulas especiales para factorizar la diferencia de dos cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, y la suma y diferencia de dos cubos. Le será de utilidad memorizar estas fórmulas.

La expresión $x^2 - 9$ es un ejemplo de la diferencia de dos cuadrados.

$$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$$

Para factorizar la diferencia de dos cuadrados, es conveniente usar la **fórmula para la diferencia de dos cuadrados**. Esta fórmula se estudió por primera vez en la sección 5.2.

Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EJEMPLO 1 Factorice las siguientes expresiones mediante la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

a) $x^2 - 16$ **b)** $25x^2 - 36y^2$

Solución Reescriba cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utilice la fórmula.

a) $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2$
$= (x + 4)(x - 4)$

b) $25x^2 - 36y^2 = (5x)^2 - (6y)^2$
$= (5x + 6y)(5x - 6y)$

Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Factorice las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^6 - y^4$ **b)** $2z^4 - 162x^6$

Solución Reescriba cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utilice la fórmula.

a) $x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2$
$= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$

b) $2z^4 - 162x^6 = 2(z^4 - 81x^6)$
$= 2[(z^2)^2 - (9x^3)^2]$
$= 2(z^2 + 9x^3)(z^2 - 9x^3)$

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Factorice $x^4 - 81y^4$.

Solución

$$x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2)$$

Observe que $(x^2 - 9y^2)$ también es una diferencia de dos cuadrados. Utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados una segunda vez para obtener

$$= (x^2 + 9y^2)[(x)^2 - (3y)^2]$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$$

Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 4 ▸ Factorice $(x - 5)^2 - 4$ utilizando la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.

Solución Primero expresamos $(x - 5)^2 - 4$ como una diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 - 4 &= (x - 5)^2 - 2^2\\ &= [(x - 5) + 2][(x - 5) - 2]\\ &= (x - 3)(x - 7)\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

Observación: **No es posible factorizar la suma de dos cuadrados con la forma $a^2 + b^2$ en el conjunto de los números reales.**

Por ejemplo, no es posible factorizar $x^2 + 4$, ya que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$, es una suma de dos cuadrados y no una diferencia de cuadrados.

2 Factorizar trinomios cuadrados perfectos

En la sección 5.2, vimos que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si invertimos los lados izquierdo y derecho de estas dos fórmulas, obtenemos dos **fórmulas especiales de factorización.**

Trinomios cuadrados perfectos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Estos dos trinomios se denominan **trinomios cuadrados perfectos**, ya que cada uno es el cuadrado de un binomio. *Para ser un trinomio cuadrado perfecto, el primero y el último términos deben ser el cuadrado de alguna expresión, y el término central debe ser el doble del producto de las raíces cuadradas del primero y último términos.* Cuando se le pida factorizar un trinomio, determine si es un trinomio cuadrado perfecto antes de tratar de factorizarlo mediante los procedimientos explicados en la sección 5.5. Si es un trinomio cuadrado perfecto, puede factorizarlo mediante las fórmulas indicadas con anterioridad.

Ejemplos de trinomios cuadrados perfectos

$$y^2 + 6y + 9 \quad \text{o} \quad y^2 + 2(y)(3) + 3^2$$
$$9a^2b^2 - 24ab + 16 \quad \text{o} \quad (3ab)^2 - 2(3ab)(4) + 4^2$$
$$(r + s)^2 + 10(r + s) + 25 \quad \text{o} \quad (r + s)^2 + 2(r + s)(5) + 5^2$$

Ahora factorizaremos algunos trinomios cuadrados perfectos.

EJEMPLO 5 ▸ Factorice $x^2 - 8x + 16$.

Solución Como el primer término, x^2, y el último término, 4^2, son cuadrados, este trinomio podría ser un trinomio cuadrado perfecto. Para determinar si lo es, tome el doble del producto de x y 4 para ver si obtiene $8x$.

$$2(x)(4) = 8x$$

Como $8x$ es el término central, y como su signo es negativo, factorice como sigue:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

EJEMPLO 6 Factorice $9x^4 - 12x^2 + 4$.

Solución El primer término es un cuadrado, $(3x^2)^2$, lo mismo que el último término, 2^2. Como $2(3x^2)(2) = 12x^2$, factorizamos como sigue:

$$9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - 2)^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 37

EJEMPLO 7 Factorice $(a + b)^2 + 12(a + b) + 36$.

Solución El primer término, $(a + b)^2$, es un cuadrado. El último término, 36 o 6^2, también. El término central es $2(a + b)(6) = 12(a + b)$. Por lo tanto, éste es un trinomio cuadrado perfecto. Así,

$$(a + b)^2 + 12(a + b) + 36 = [(a + b) + 6]^2 = (a + b + 6)^2$$

Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 8 Factorice $x^2 - 6x + 9 - y^2$.

Solución Como $x^2 - 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x - 3)^2$, escribimos

$$(x - 3)^2 - y^2$$

Ahora $(x - 3)^2 - y^2$ es una diferencia de cuadrados; por lo tanto

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 - y^2 &= [(x - 3) + y][(x - 3) - y]\\ &= (x - 3 + y)(x - 3 - y)\end{aligned}$$

Así, $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x - 3 + y)(x - 3 - y)$.

Ahora resuelva el ejercicio 45

El polinomio del ejemplo 8 tiene cuatro términos. En la sección 5.4 aprendimos a factorizar por agrupación los polinomios con cuatro términos. Si analiza el ejemplo 8, verá que sin importar de cuánto se trate, los cuatro términos no pueden acomodarse de modo que tanto los primeros dos términos como los últimos dos tengan un factor común. Siempre que un polinomio con cuatro términos no pueda factorizarse por agrupación, trate de reescribir tres de los términos como el cuadrado de un binomio, y luego factorice mediante la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

EJEMPLO 9 Factorice $4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25$.

Solución Primero comprobamos que este polinomio de cuatro términos no puede factorizarse por agrupación. Después, lo analizamos para determinar si tres de los términos que lo conforman pueden expresarse como el cuadrado de un binomio. Ya que esto es posible, escribimos los tres términos como el cuadrado de un binomio. Para completar la factorización, utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25 &= (2a + 3b)^2 - 5^2\\ &= [(2a + 3b) + 5][(2a + 3b) - 5]\\ &= (2a + 3b + 5)(2a + 3b - 5)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 47

3 Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos

Al principio de esta sección factorizamos la diferencia de dos cuadrados. Ahora factorizaremos la suma y la diferencia de dos cubos. Considere el producto de $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\begin{array}{rrrr} & a^2 & -\ ab & +\ b^2 \\ & & a & +\ b \\ \hline & a^2b & -\ ab^2 & +\ b^3 \\ a^3 & -\ a^2b & +\ ab^2 & \\ \hline a^3 & & & +\ b^3 \end{array}$$

Así, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. También mediante la multiplicación podemos mostrar que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Las fórmulas para factorizar **la suma y la diferencia de dos cubos** aparecen en los siguientes recuadros.

Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferencia de dos cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

EJEMPLO 10 ▸ Factorice la siguiente suma de cubos $x^3 + 64$.

Solución Reescriba $x^3 + 64$ como una suma de dos cubos, $x^3 + 4^3$. Haga que x corresponda a a y 4 a b. Luego factorice mediante la fórmula de la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - a\ b + b^2) \\ x^3 + 4^3 &= (x + 4)[x^2 - x(4) + 4^2] \\ &= (x + 4)(x^2 - 4x + 16) \end{aligned}$$

Así, $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 11 ▸ Factorice la siguiente diferencia de cubos $27x^3 - 8y^6$.

Solución Primero observamos que $27x^3$ y $8y^6$ no tienen factores comunes distintos de 1. Como podemos expresar a $27x^3$ y a $8y^6$ como cubos, podemos factorizar mediante la fórmula para la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 27x^3 - 8y^6 &= (3x)^3 - (2y^2)^3 \\ &= (3x - 2y^2)[(3x)^2 + (3x)(2y^2) + (2y^2)^2] \\ &= (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4) \end{aligned}$$

Así, $27x^3 - 8y^6 = (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 12 ▸ Factorice $8y^3 - 64x^6$.

Solución Primero factorice 8, que es común a los dos términos.

$$8y^3 - 64x^6 = 8(y^3 - 8x^6)$$

Ahora factorice $y^3 - 8x^6$ escribiéndolo como una diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 8(y^3 - 8x^6) &= 8[(y)^3 - (2x^2)^3] \\ &= 8(y - 2x^2)[y^2 + y(2x^2) + (2x^2)^2] \\ &= 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4) \end{aligned}$$

Así, $8y^3 - 64x^6 = 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 13 ▸ Factorice $(x - 2)^3 + 125$.

Solución Escriba $(x - 2)^3 + 125$ como una suma de dos cubos; luego factorice utilizando la fórmula para la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned}(x-2)^3 + (5)^3 &= [(x-2)+5][(x-2)^2 - (x-2)(5) + (5)^2]\\ &= (x - 2 + 5)(x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 25)\\ &= (x+3)(x^2 - 9x + 39)\end{aligned}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

Sugerencia útil

El cuadrado de un binomio tiene un 2 como parte del término central del trinomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La suma o la diferencia de dos cubos tiene un factor similar al del trinomio en el cuadrado del binomio. Sin embargo, el término central no incluye un 2.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + \underbrace{ab}_{\text{no es } 2ab} + b^2)$$

EJEMPLO 14 ▸ **Volumen** Utilizando los cubos de la **figura 5.16**, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre sus volúmenes.

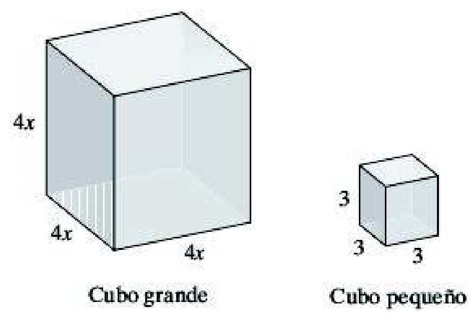


FIGURA 5.16

Solución Para encontrar la diferencia entre los volúmenes, reste el volumen del cubo pequeño del volumen del cubo grande.

$$\begin{aligned}\text{Volumen del cubo grande} &= (4x)^3\\ \text{Volumen del cubo pequeño} &= 3^3\\ \text{Diferencia entre los volúmenes} &= (4x)^3 - 3^3 && \textit{Restar volúmenes.}\\ &= (4x-3)[(4x)^2 + (4x)3 + 3^2] && \textit{Factorizar.}\\ &= (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) && \textit{Simplificar.}\end{aligned}$$

La diferencia entre los volúmenes de los dos cubos es $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 87

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Explique cómo factorizar la diferencia de dos cuadrados.

   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte a), factorice $x^2 - 16$.

2. Explique por qué una suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no puede factorizarse en el conjunto de los números reales.

3. Explique cómo se determina si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

4. a) Explique cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.
   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte a), factorice $x^2 + 12x + 36$.
5. Proporcione la fórmula para factorizar la suma de dos cubos.
6. Proporcione la fórmula para factorizar la diferencia de dos cubos.
7. El polinomio $x^2 + 14x - 49 = (x + 7)(x - 7)$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
8. El polinomio $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
9. El polinomio $x^2 - 81 = (x - 9)^2$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.
10. El polinomio $x^2 - 64 = (x + 8)(x - 8)$, ¿está factorizado de manera correcta? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice la fórmula para la diferencia de dos cuadrados o la fórmula del trinomio cuadrado perfecto para factorizar cada polinomio.

11. $x^2 - 81$
12. $x^2 - 25$
13. $a^2 - 100$
14. $1 - 9x^2$
15. $1 - 49b^2$
16. $x^2 - 81z^2$
17. $25 - 16y^4$
18. $49 - 144b^4$
19. $\frac{1}{100} - y^2$
20. $\frac{1}{25} - z^2$
21. $x^2y^2 - 121c^2$
22. $5a^2c^2 - 20x^2y^2$
23. $0.04x^2 - 0.09$
24. $0.16p^2 - 0.81q^2$
25. $36 - (x - 6)^2$
26. $144 - (a + b)^2$
27. $a^2 - (3b + 2)^2$
28. $(2c + 3)^2 - 9$
29. $x^2 + 10x + 25$
30. $b^2 - 18b + 81$
31. $49 - 14t + t^2$
32. $4 + 4a + a^2$
33. $36p^2q^2 + 12pq + 1$
34. $4x^2 - 20xy + 25y^2$
35. $0.81x^2 - 0.36x + 0.04$
36. $0.25x^2 - 0.40x + 0.16$
37. $y^4 + 4y^2 + 4$
38. $b^4 - 16b^2 + 64$
39. $(a + b)^2 + 6(a + b) + 9$
40. $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$
41. $(y - 3)^2 + 8(y - 3) + 16$
42. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
43. $x^2 + 6x + 9 - y^2$
44. $p^2 + 2pq + q^2 - 16r^2$
45. $25 - (x^2 + 4x + 4)$
46. $49 - (c^2 - 8c + 16)$
47. $9a^2 - 12ab + 4b^2 - 9$
48. $(4a - 3b)^2 - (2a + 5b)^2$
49. $y^4 - 6y^2 + 9$
50. $z^6 + 14z^3 + 49$

Factorice mediante la fórmula para la suma o diferencia de dos cubos.

51. $a^3 + 125$
52. $x^3 - 27$
53. $64 - a^3$
54. $8 - b^3$
55. $p^3 - 27a^3$
56. $w^3 - 216$
57. $27y^3 - 8x^3$
58. $6x^3 + 48y^3$
59. $16a^3 - 54b^3$
60. $2b^3 - 250c^3$
61. $x^6 + y^9$
62. $16x^6 - 250y^3$
63. $(x + 1)^3 + 1$
64. $(a - 3)^3 + 8$
65. $(a - b)^3 - 27$
66. $(2x + y)^3 - 64$
67. $b^3 - (b + 3)^3$
68. $(m - n)^3 - (m + n)^3$

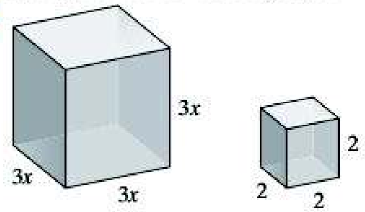
Factorice usando una de las fórmulas especiales para factorizar.

69. $a^4 - 4b^4$
70. $121y^4 - 49x^2$
71. $49 - 64x^2y^2$
72. $25y^2 - 81x^2$
73. $(x + y)^2 - 16$
74. $25x^4 - 81y^6$
75. $x^3 - 64$
76. $3a^2 - 36a + 108$
77. $9x^2y^2 + 24xy + 16$
78. $a^4 + 12a^2 + 36$
79. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
80. $8y^3 - 125x^6$
81. $x^2 - 2x + 1 - y^2$
82. $16x^2 - 8xy + y^2 - 4$
83. $(x + y)^3 + 1$
84. $4r^2 + 4rs + s^2 - 9$
85. $(m + n)^2 - (2m - n)^2$
86. $(r + p)^3 + (r - p)^3$

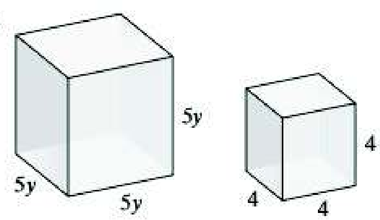
Resolución de problemas

Volumen *En los ejercicios 87 a 90, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de cada pareja de cubos. Vea el ejemplo 14.*

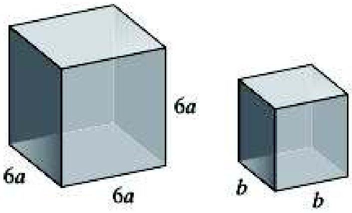
87.



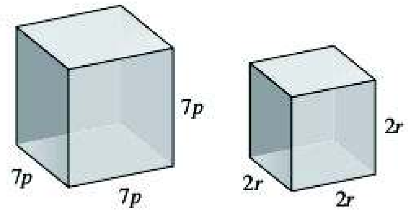
88.



89.

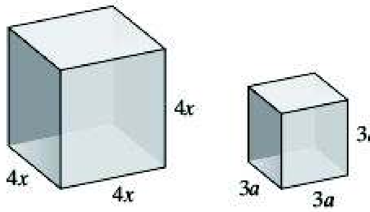


90.

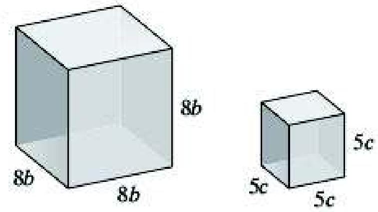


Volumen *En los ejercicios 91 y 92, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la suma de los volúmenes de cada pareja de cubos.*

91.

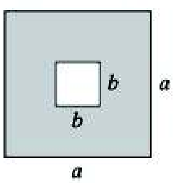


92.



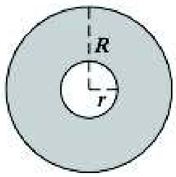
Área o volumen *En los ejercicios 93 a 97,* **a)** *determine el área o volumen de la figura sombreada mediante la sustracción del área o volumen más pequeño del más grande. La fórmula para encontrar el área o volumen se indica debajo de cada figura.* **b)** *Escriba la expresión obtenida en la parte* **a)** *en forma factorizada. Parte del MFC de los ejercicios 94, 96 y 97 es π.*

93. Cuadrados



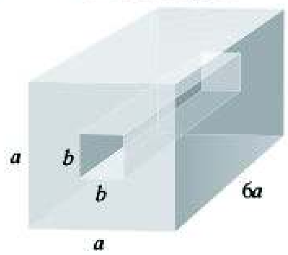
$A = s^2$

94. Círculos



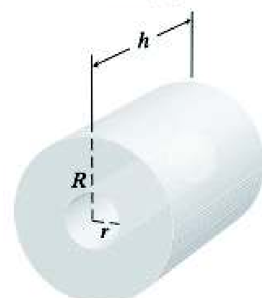
$A = \pi r^2$

95. Sólido rectangular



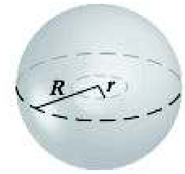
$V = lwh$

96. Cilindro



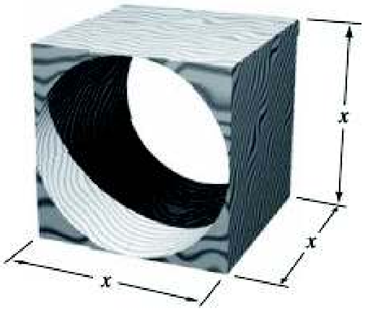
$V = \pi r^2 h$

97. Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

98. Área y volumen Se hace un agujero circular en un cubo de madera, tal como se muestra en la figura.



a) Escriba una expresión en forma factorizada, en términos de x, para calcular el área de la sección transversal de la madera restante.

b) Escriba una expresión en forma factorizada, en términos de x, para calcular el volumen de la madera restante.

99. Determine dos valores de b que hagan de $4x^2 + bx + 9$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

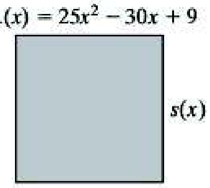
100. Determine dos valores de c que hagan de $16x^2 + cx + 4$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

101. Determine el valor de c que harán de $25x^2 + 20x + c$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

102. Determine el valor de d que hace de $49x^2 - 42x + d$ un trinomio cuadrado perfecto. Explique cómo determinó su respuesta.

103. Área Una fórmula para calcular el área de un cuadrado es $A = s^2$, donde s es la longitud de un lado. Suponga que el área de un cuadrado es la que se indica a continuación.

$A(x) = 25x^2 - 30x + 9$



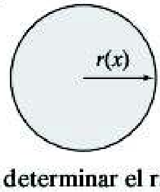
a) explique cómo determinar la longitud del lado x, $s(x)$,

b) determine $s(x)$,

c) determine $s(2)$.

104. Área La fórmula para calcular el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio. Suponga que el área de un círculo es la que se indica a continuación,

$$A(x) = 9\pi x^2 + 12\pi x + 4\pi$$



a) explique cómo determinar el radio, $r(x)$,
b) determine $r(x)$,
c) determine $r(4)$.

105. Factorice $x^4 + 64$ escribiendo la expresión como $(x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2$, que es una diferencia de dos cuadrados.

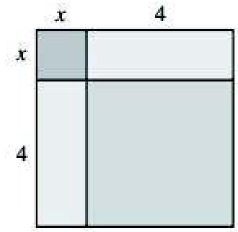
106. Factorice $x^4 + 4$ sumando y restando $4x^2$. (Vea el ejercicio 105).

107. Si $P(x) = x^2$, utilice la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + h) - P(a)$.

108. Si $P(x) = x^2$, utilice la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + 1) - P(a)$.

109. Suma de áreas La figura muestra cómo *completar el cuadrado*. La suma de las áreas de las tres partes del cuadrado que están sombreadas en gris es

$$x^2 + 4x + 4x \quad \text{o} \quad x^2 + 8x$$



a) Determine el área de la cuarta parte (en rojo) para completar el cuadrado.
b) Determine la suma de las áreas de las cuatro partes del cuadrado.
c) Este procedimiento ha dado como resultado un trinomio cuadrado perfecto en la parte **b)**. Escriba el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

110. Factorice $(m - n)^3 - (9 - n)^3$.

Factorice completamente.

111. $64x^{4a} - 9y^{6a}$

112. $16p^{8w} - 49p^{6w}$

113. $a^{2n} - 16a^n + 64$

114. $144r^{8k} + 48r^{4k} + 4$

115. $x^{3n} - 8$

116. $27x^{3m} + 64x^{6m}$

En los ejercicios 117 y 118 utilice su calculadora graficadora para comprobar la factorización. Indique si la factorización es correcta o no. Explique sus respuestas.

117. $2x^2 - 18 \stackrel{?}{=} 2(x + 3)(x - 3)$

118. $8x^3 + 27 \stackrel{?}{=} 2x(4x^2 + 5x + 9)$

Reto

119. La expresión $x^6 - 1$ puede factorizarse usando la diferencia de dos cuadrados o la diferencia de dos cubos. Al principio los factores no parecen ser los mismos, pero con un poco de manipulación algebraica puede demostrarse que son iguales. Factorice $x^6 - 1$ mediante **a)** la diferencia de dos cuadrados, y **b)** la diferencia de dos cubos. **c)** Muestre que ambas respuestas son iguales, factorizando completamente las respuestas obtenidas en la parte **a)**. Luego multiplique los dos binomios por los dos trinomios.

Actividad en grupo

Analice y responda en equipo el ejercicio 120.

120. Más adelante en el curso necesitaremos construir trinomios cuadrados perfectos. Examinen algunos trinomios cuadrados perfectos con coeficiente principal igual a 1.

a) Si el trinomio $x^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto, expliquen cómo están relacionados b y c.
b) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 + 6x$.
c) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 - 10x$.
d) Construyan un trinomio cuadrado perfecto, si los primeros dos términos son $x^2 - 14x$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **121.** Simplifique $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + 3y$.

[3.6] **122.** Si $f(x) = x^2 - 3x + 6$ y $g(x) = 5x - 2$, determine $(g - f)(-1)$.

[4.4] **123. Ángulos** Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. El más grande de los tres mide el doble del más pequeño. El ángulo restante mide 10° más que el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada ángulo.

[5.4] **124.** Factorice el máximo factor común de $45y^{12} + 60y^{10}$.

125. Factorice $12x^2 - 9xy + 4xy - 3y^2$.

5.7 Repaso general de factorización

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas.

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas

Hemos presentado varios métodos para factorizar. Ahora combinaremos problemas y técnicas de las secciones anteriores.

Un procedimiento general para factorizar cualquier polinomio es el siguiente.

Para factorizar un polinomio

1. Determine si todos los términos del polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factorice el MFC.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determine si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. En cualquiera de estos casos, factorice utilizando la fórmula adecuada.
3. Si el polinomio tiene tres términos, determine si es un trinomio cuadrado perfecto. Si lo es, factorícelo como corresponde. De lo contrario, factorice el trinomio utilizando el método de prueba y error, por agrupación o por sustitución, como se explicó en la sección 5.5.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, trate de factorizarlo mediante agrupación. Si eso no funciona, vea si tres de los términos son el cuadrado de un binomio.
5. Como paso final, examine el polinomio factorizado para ver si los factores enumerados tienen un factor común y se pueden factorizar más. Si encuentra un factor común, factorícelo.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo utilizar este procedimiento.

EJEMPLO 1 Factorice $2x^4 - 50x^2$.

Solución Primero verifique si existe un máximo factor común distinto de 1. Como $2x^2$ es común a ambos términos, factorícelo.

$$2x^4 - 50x^2 = 2x^2(x^2 - 25) = 2x^2(x + 5)(x - 5)$$

Observe que $x^2 - 25$ se factoriza como una diferencia de dos cuadrados.

Ahora resuelva el ejercicio 3

EJEMPLO 2 Factorice $3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2$.

Solución Comience factorizando el MFC, $3y^2$, de cada término.

$$3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2 = 3y^2(x^2 - 8x + 16) = 3y^2(x - 4)^2$$

Observe que $x^2 - 8x + 16$ es un trinomio cuadrado perfecto. Si no lo reconoce, también podrá obtener la respuesta correcta factorizando el trinomio en $(x - 4)(x - 4)$.

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Factorice $24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2$.

Solución Como siempre, comience por determinar si todos los términos del polinomio tienen un factor común. En este ejemplo, el número 2 es común a todos los términos. Factorice el 2; después factorice el polinomio de cuatro términos resultante mediante agrupación.

$$\begin{aligned} 24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2 &= 2(12x^2 - 3xy + 20xy - 5y^2) \\ &= 2[3x(4x - y) + 5y(4x - y)] \\ &= 2(4x - y)(3x + 5y) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Factorice $12a^2b - 18ab + 24b$.

Solución $$12a^2b - 18ab + 24b = 6b(2a^2 - 3a + 4)$$

Como $2a^2 - 3a + 4$ no puede factorizarse, concluimos aquí.

Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 5 Factorice $2x^4y + 54xy$.

Solución $$\begin{aligned} 2x^4y + 54xy &= 2xy(x^3 + 27) \\ &= 2xy(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

Observe que factorizamos $x^3 + 27$ como una suma de dos cubos.

Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 6 Factorice $3x^2 - 18x + 27 - 3y^2$.

Solución Primero factorizamos el 3 de los cuatro términos.

$$3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 = 3(x^2 - 6x + 9 - y^2)$$

Ahora veremos si podemos factorizar los cuatro términos dentro de los paréntesis mediante agrupación. Como puede ver, esto no es posible, así que analizaremos si podemos escribir tres de los términos como el cuadrado de un binomio. Como esto puede hacerse, expresamos $x^2 - 6x + 9$, como $(x - 3)^2$ y luego utilizar la fórmula de la diferencia de dos cuadrados. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 &= 3[(x - 3)^2 - y^2] \\ &= 3[(x - 3 + y)(x - 3 - y)] \\ &= 3(x - 3 + y)(x - 3 - y) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 43

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En esta sección hemos repasado todas las técnicas para la factorización de expresiones. Si todavía tiene problemas para factorizar, vuelva a estudiar el material de las secciones 5.4 a 5.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.7

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique los procedimientos que pueden utilizarse para factorizar un polinomio de **a)** dos términos, **b)** tres términos y **c)** cuatro términos.

2. ¿Cuál es el primer paso en el procedimiento de factorización?

Práctica de habilidades

Factorice completamente cada uno de los siguientes polinomios.

3. $3x^2 - 75$
4. $4x^2 - 24x + 36$
5. $10s^2 + 19s - 15$
6. $-8r^2 + 26r - 15$
7. $6x^3y^2 + 10x^2y^3 + 14x^2y^2$
8. $24m^3n - 12m^2n^2 + 16mn^3$
9. $0.8x^2 - 0.072$
10. $0.5x^2 - 0.08$
11. $6x^5 - 54x$
12. $8x^2y^2z^2 - 32x^2y^2$
13. $3x^6 - 3x^5 + 12x^5 - 12x^4$
14. $2x^2y^2 + 6xy^2 - 10xy^2 - 30y^2$
15. $5x^4y^2 + 20x^3y^2 + 15x^3y^2 + 60x^2y^2$
16. $6x^2 - 15x - 9$
17. $x^4 - x^2y^2$
18. $5x^3 + 135$
19. $x^7y^2 - x^4y^2$
20. $x^4 - 81$

21. $x^5 - 16x$
22. $12x^2y^2 + 33xy^2 - 9y^2$
23. $4x^6 + 32y^3$
24. $8x^4 - 4x^3 - 4x^3 + 2x^2$
25. $5(a + b)^2 - 20$
26. $12x^3y^2 + 4x^2y^2 - 40xy^2$
27. $6x^2 + 36xy + 54y^2$
28. $3x^2 - 30x + 75$
29. $(x + 2)^2 - 4$
30. $5y^4 - 45x^6$
31. $6x^2 + 24xy - 3xy - 12y^2$
32. $pq - 8q + pr - 8r$
33. $(y + 5)^2 + 4(y + 5) + 4$
34. $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$
35. $b^4 + 2b^2 + 1$
36. $45a^4 - 30a^3 + 5a^2$
37. $x^3 + \dfrac{1}{64}$
38. $8y^3 - \dfrac{1}{27}$
39. $6y^3 + 14y^2 + 4y$
40. $3x^3 + 2x^2 - 27x - 18$
41. $a^3b - 81ab^3$
42. $x^6 + y^6$
43. $49 - (x^2 + 2xy + y^2)$
44. $x^2 - 2xy + y^2 - 25$
45. $24x^2 - 34x + 12$
46. $40x^2 + 52x - 12$
47. $18x^2 + 39x - 15$
48. $7(a - b)^2 + 4(a - b) - 3$
49. $x^4 - 16$
50. $(x + 5)^2 - 12(x + 5) + 36$
51. $5bc - 10cx - 7by + 14xy$
52. $16y^4 - 9y^2$
53. $3x^4 - x^2 - 4$
54. $x^2 + 16x + 64 - 100y^2$
55. $z^2 - (x^2 - 12x + 36)$
56. $4a^3 + 32$
57. $2(y + 4)^2 + 5(y + 4) - 12$
58. $x^6 + 15x^3 + 54$
59. $a^2 + 12ab + 36b^2 - 16c^2$
60. $y^2 - y^4$
61. $10x^4y + 25x^3y - 15x^2y$
62. $4x^2y^2 + 12xy + 9$
63. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
64. $12r^2s^2 + rs - 1$

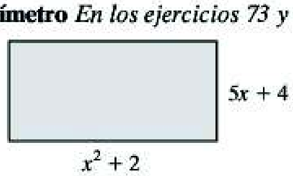
Resolución de problemas

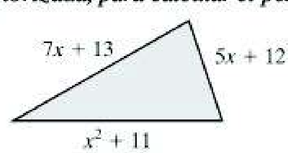
Relacione cada ejercicio del 65 al 72 con las expresiones etiquetadas con las letras **a)** *a* **h)** *a la derecha de ellas.*

65. $a^2 + b^2$
66. $a^2 - b^2$
67. $a^2 + 2ab + b^2$
68. $a^3 + b^3$
69. $a^3 - b^3$
70. $a^2 - 2ab + b^2$
71. un factor de $a^3 + b^3$
72. un factor de $a^3 - b^3$

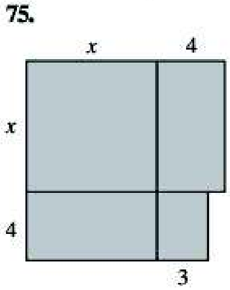
a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
b) $(a - b)^2$
c) $a^2 - ab + b^2$
d) $(a + b)^2$
e) no es factorizable
f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
g) $(a + b)(a - b)$
h) $a^2 + ab + b^2$

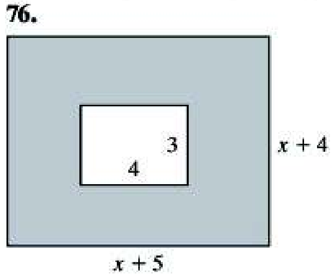
Perímetro *En los ejercicios 73 y 74, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el perímetro de cada figura.*

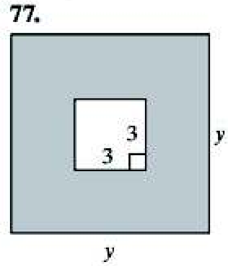
73.


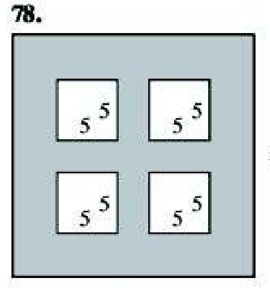
74.


Área *En los ejercicios 75 a 78, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada de cada figura.*

75.


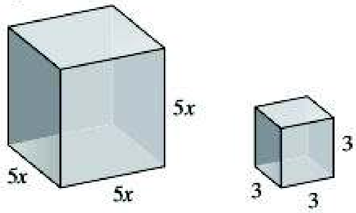
76.


77.


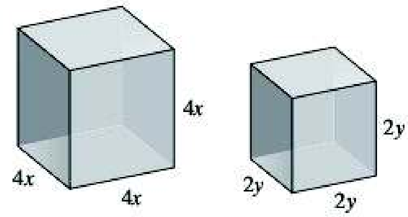
78.


Volumen *En los ejercicios 79 y 80, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de cada par de cubos.*

79.

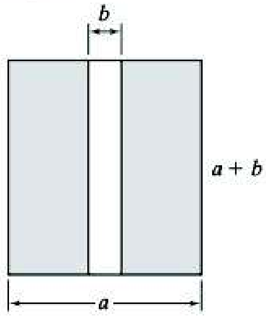


80.

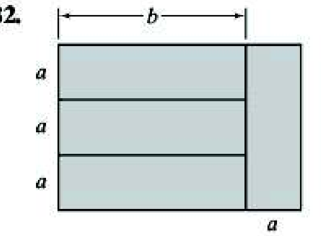


Área *En los ejercicios 81 a 84,* **a)** *escriba una expresión para calcular el área sombreada de la figura, y* **b)** *escriba la expresión en forma factorizada.*

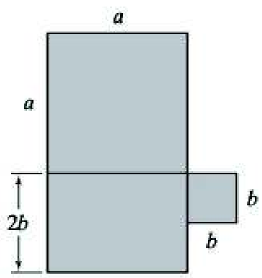
81.



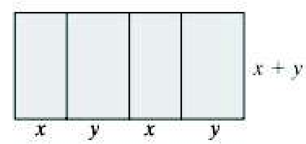
82.



83.



84.



85. Área de la superficie

a) Escriba una expresión para calcular el área de la superficie de los cuatro lados de la caja que se ilustra a continuación (no tome en cuenta la tapa ni la base).

b) Escriba la expresión en forma factorizada.

86. Explique cómo puede utilizarse la fórmula de factorización de la *diferencia* de dos cubos para factorizar $x^3 + 27$.

87. a) Explique cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construya un trinomio cuadrado perfecto y luego muestre sus factores.

Retos

En este capítulo sólo hemos trabajado con exponentes enteros; sin embargo, en una expresión también pueden factorizarse los exponentes fraccionarios. Las expresiones siguientes no son polinomios. **a)** *En cada expresión factorice la variable con el exponente menor (o más negativo). (Los exponentes fraccionarios se analizarán en la sección 7.2.)* **b)** *Factorice completamente.*

88. $x^{-2} - 5x^{-3} + 6x^{-4}$, factorice x^{-4}.

89. $x^{-3} - 2x^{-4} - 3x^{-5}$, factorice x^{-5}.

90. $x^{5/2} + 3x^{3/2} - 4x^{1/2}$, factorice $x^{1/2}$

91. $5x^{1/2} + 2x^{-1/2} - 3x^{-3/2}$, factorice $x^{-3/2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **92.** Resuelva $6(x + 4) - 4(3x + 3) = 6$.

[2.6] **93.** Determine el conjunto solución para $\left|\frac{6 + 2z}{3}\right| > 2$.

[4.3] **94. Mezcla de cafés** Dennos Reissing dirige una tienda de abarrotes, y desea mezclar 30 libras de café para vender a un costo total de \$170. Para obtener la mezcla, utilizará café que vende a \$5.20 por libra y café que vende a \$6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada café debe utilizar?

[5.2] **95.** Multiplique $(5x + 4)(x^2 - x + 4)$.

[5.4] **96.** Factorice $2x^3 + 6x^2 - 5x - 15$.

5.8 Ecuaciones polinomiales

1 Usar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones.

2 Usar la factorización para resolver ecuaciones.

3 Usar la factorización para resolver problemas de aplicación.

4 Usar la factorización para determinar las intersecciones con el eje x de una función cuadrática.

Siempre que se establece que dos polinomios son iguales entre sí, tenemos una **ecuación polinomial**.

Ejemplos de ecuaciones polinomiales

$$x^2 + 2x = x - 5$$
$$y^3 + 3y - 2 = 0$$
$$4x^4 + 2x^2 = -3x + 2$$

El **grado de una ecuación polinomial** es el mismo que el del término con mayor grado. Por ejemplo, las tres ecuaciones anteriores tienen grados 2, 3 y 4, respectivamente. Con frecuencia, una ecuación de segundo grado con una variable se denomina **ecuación cuadrática**.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 6x - 4 = 0$$
$$5x = 2x^2 - 4$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cualquier ecuación cuadrática puede escribirse en la **forma general**.

Forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

donde a, b y c son números reales.

Antes de continuar, asegúrese de que puede convertir cada una de las tres ecuaciones cuadráticas dadas anteriormente a su forma general, con $a > 0$.

1 Usar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones

Para resolver ecuaciones utilizando factorización, empleamos la **propiedad del factor nulo**.

Propiedad del factor nulo (factor cero)

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien a y $b = 0$.

La propiedad del factor nulo indica que, *si el producto de dos factores es igual a cero, uno o ambos factores deben ser cero*.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Solución Como el producto de los factores es igual a 0, según la propiedad del factor nulo, uno o ambos factores deben ser iguales a cero. Igualamos cada factor a 0 y resolvemos cada ecuación por separado.

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 3$$

Por lo tanto, si x es -5 o 3, el producto de los factores es 0.

Compruebe

$x = -5$		$x = 3$	
$(x + 5)(x - 3) = 0$		$(x + 5)(x - 3) = 0$	
$(-5 + 5)(-5 - 3) \stackrel{?}{=} 0$		$(3 + 5)(3 - 3) \stackrel{?}{=} 0$	
$0(-8) \stackrel{?}{=} 0$		$8(0) \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$	Verdadero	$0 = 0$	Verdadero

Ahora resuelva el ejercicio 21

2 Usar la factorización para resolver ecuaciones

A continuación se indica un procedimiento que se puede utilizar para obtener la solución de una ecuación mediante factorización.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utilice la propiedad de la suma para eliminar todos los términos de un lado de la ecuación. Con esto se obtendrá un lado de la ecuación igual a 0.
2. Sume los términos semejantes en la ecuación y después factorice.
3. Iguale a cero cada factor que *contenga una variable*. Resuelva las ecuaciones y determine las soluciones.
4. Verifique las soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 2 ▶ Resuelva la ecuación $4x^2 = 24x$.

Solución Primero igualamos a cero el lado derecho de la ecuación, restando $24x$ en ambos lados. Después factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$4x^2 - 24x = 0$$
$$4x(x - 6) = 0$$

Ahora igualamos a cero cada factor y despejamos x.

$$4x = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 6$$

Una verificación mostrará que los números 0 y 6 satisfacen la ecuación $4x^2 = 24x$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 27

Cómo evitar errores comunes

La propiedad del factor nulo sólo puede utilizarse cuando un lado de la ecuación es igual a 0.

CORRECTA	INCORRECTA
$(x - 4)(x + 3) = 0$	~~$(x - 4)(x + 3) = 2$~~
$x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$	~~$x - 4 = 2$ o $x + 3 = 2$~~
$x = 4$ $\quad$ $x = -3$	~~$x = 6$ $\quad$ $x = -1$~~

En el procedimiento incorrecto, ilustrado a la derecha, no se puede utilizar la propiedad del factor nulo, ya que el lado derecho de la ecuación no es igual a 0. El ejemplo 3 muestra cómo resolver estos problemas correctamente.

EJEMPLO 3 ▶ Resuelva la ecuación $(x - 1)(3x + 2) = 4x$.

Solución Como el lado derecho de la ecuación no es igual a 0, no podemos utilizar aún la propiedad del factor nulo; en lugar de eso comenzamos por multiplicar los factores del lado izquierdo de la ecuación. Después restamos $4x$ en ambos lados para obtener 0 del lado derecho. Luego factorizamos y resolvemos la ecuación.

$$(x - 1)(3x + 2) = 4x$$
$$3x^2 - x - 2 = 4x \qquad \textit{Multiplicar los factores.}$$
$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \qquad \textit{Hacer un lado igual a 0.}$$
$$(3x + 1)(x - 2) = 0 \qquad \textit{Factorizar el trinomio.}$$
$$3x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \qquad \textit{Propiedad del factor nulo.}$$
$$3x = -1 \qquad x = 2 \qquad \textit{Resolver las ecuaciones.}$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Las soluciones son $-\frac{1}{3}$ y 2. Compruebe estos valores en la ecuación original.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 4 ▸ Resuelva la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 12 &= -13x \\ 3x^2 + 15x + 12 &= 0 && \text{Haga un lado igual a 0.} \\ 3(x^2 + 5x + 4) &= 0 && \text{Factorizar 3.} \\ 3(x+4)(x+1) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.} \end{aligned}$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo.}$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = -1 \qquad \text{Despejar } x.$$

Como el factor 3 no tiene una variable, no tenemos que igualarlo a cero. Sólo los números -4 y -1 satisfacen la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

Sugerencia útil

Al resolver una ecuación cuyo término principal tiene un coeficiente *negativo*, por lo general lo convertimos en positivo multiplicando ambos lados de la ecuación por -1. Esto facilita el procedimiento de factorización, como se muestra en el ejemplo siguiente.

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ -1(-x^2 + 5x + 6) &= -1 \cdot 0 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos resolver la ecuación $x^2 - 5x - 6 = 0$ factorizando.

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$
$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = -1$$

Los números 6 y –1 satisfacen la ecuación original: $-x^2 + 5x + 6 = 0$.

Todas las ecuaciones de los ejemplos 1 a 4 fueron ecuaciones cuadráticas que se reescribieron en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se resolvieron por factorización. Otros métodos que pueden usarse para resolver ecuaciones cuadráticas son: completar el cuadrado y la fórmula cuadrática; en el capítulo 8 analizaremos estos métodos.

La propiedad del factor nulo puede extenderse a tres o más factores, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva la ecuación $2p^3 + 5p^2 - 3p = 0$.

Solución Primero factorizamos, y después igualamos a 0 cada factor que tenga p.

$$\begin{aligned} 2p^3 + 5p^2 - 3p &= 0 \\ p(2p^2 + 5p - 3) &= 0 && \text{Factorizar } p. \\ p(2p - 1)(p + 3) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.} \end{aligned}$$

$$p = 0 \quad \text{o} \quad 2p - 1 = 0 \quad \text{o} \quad p + 3 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo.}$$
$$2p = 1 \qquad\qquad p = -3 \qquad \text{Despejar } p.$$
$$p = \frac{1}{2}$$

Los números $0, \frac{1}{2}$ y -3 son soluciones de la ecuación.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

Observe que la ecuación del ejemplo 5 no es una ecuación cuadrática, ya que el exponente del término principal es 3, no 2. Ésta es una **ecuación cúbica** o **de tercer grado**.

EJEMPLO 6 En la función $f(x) = 2x^2 - 13x - 16$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = 8$.

Solución Primero reescribimos la función como $f(a) = 2a^2 - 13a - 16$. Como $f(a) = 8$, escribimos

$$
\begin{aligned}
2a^2 - 13a - 16 &= 8 && \text{Determine } f(a) \text{ igual a 8.}\\
2a^2 - 13a - 24 &= 0 && \text{Haga que un lado sea igual a 0.}\\
(2a + 3)(a - 8) &= 0 && \text{Factorice el trinomio.}\\
2a + 3 = 0 \quad \text{o} \quad a - 8 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo.}\\
2a = -3 \qquad\qquad a &= 8 && \text{Despeje } a.\\
a = -\frac{3}{2} \qquad\qquad &
\end{aligned}
$$

Si comprueba estas respuestas, encontrará que $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$ y $f(8) = 8$.

Ahora resuelva el ejercicio 69

3 Usar la factorización para resolver problemas de aplicación

Ahora veamos algunos problemas de aplicación para cuya solución se utiliza la factorización.

EJEMPLO 7 **Triángulo** En una exhibición, una gran tienda de campaña tendrá una entrada en forma triangular (vea la **figura 5.17**).

Determine la base y la altura de la entrada, si la altura medirá 3 pies menos que el doble de la base, y el área total de la entrada es de 27 pies cuadrados.

Solución **Entienda el problema** Haga un dibujo de la entrada e incluya la información indicada (**figura 5.18**).

FIGURA 5.17

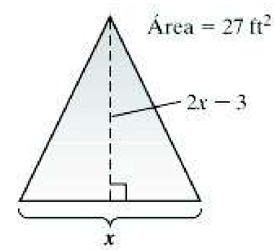


FIGURA 5.18

Traduzca Para resolver el problema, usaremos la fórmula para calcular el área de un triángulo.

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$27 = \frac{1}{2}(x)(2x - 3) \qquad \text{Sustituir expresiones para la base, la altura y el área.}$$

Realice los cálculos

$$2(27) = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x)(2x - 3)\right] \qquad \text{Multiplicar ambos lados por 2 para eliminar fracciones.}$$

$$
\begin{aligned}
54 &= x(2x - 3)\\
54 &= 2x^2 - 3x\\
\text{o} \quad 2x^2 - 3x - 54 &= 0 && \text{Hacer que un lado sea igual a 0.}\\
(2x + 9)(x - 6) &= 0 && \text{Factorizar el trinomio.}\\
2x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo.}\\
2x = -9 \qquad\qquad x &= 6 && \text{Despejar } x.\\
x = -\frac{9}{2} \qquad\qquad &
\end{aligned}
$$

Responda Como las dimensiones de una figura geométrica no pueden ser negativas, podemos eliminar $x = -\frac{9}{2}$ como una respuesta para nuestro problema. Por lo tanto,

$$\text{base} = x = 6 \text{ pies}$$
$$\text{altura} = 2x - 3 = 2(6) - 3 = 9 \text{ pies}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 99

EJEMPLO 8 ▸ Altura de una bala de cañón Un cañón se coloca en la cima de un risco cuya altura es de 288 pies sobre el nivel de un lago que se encuentra junto a su base. Se dispara una bala, directamente hacia arriba, con una velocidad de 112 pies por segundo. La altura, h, en pies, en que se encuentra la bala de cañón respecto del nivel del lago en cualquier instante, t, se determina mediante la función

$$h(t) = -16t^2 + 112t + 288$$

Determine el tiempo que le toma a la bala de cañón para golpear el agua después de haber sido disparada.

Solución **Entienda el problema** Necesitamos hacer un dibujo para analizar mejor el problema (vea la **figura 5.19**). Cuando la bala golpea el agua, su altura respecto del lago es de 0 pies.

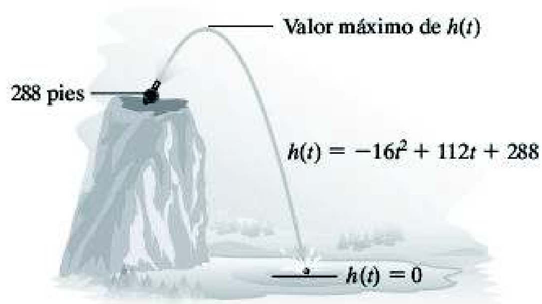


FIGURA 5.19

Traduzca Para resolver el problema necesitamos determinar el tiempo, t, cuando $h(t) = 0$. Para ello establecemos que la función indicada sea igual a cero y despejamos t.

$$-16t^2 + 112t + 288 = 0 \quad \textit{Determinar } h(t) = 0.$$
$$-16(t^2 - 7t - 18) = 0 \quad \textit{Factorizar } -16.$$
$$-16(t + 2)(t - 9) = 0 \quad \textit{Factorizar el trinomio.}$$
$$t + 2 = 0 \quad \text{o} \quad t - 9 = 0 \quad \textit{Propiedad del factor nulo.}$$
$$t = -2 \qquad t = 9 \quad \textit{Despejar } t.$$

Responda Como t es el número de segundos, -2 no es una respuesta posible. La bala de cañón golpeará el agua 9 segundos después de haber sido disparada.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 105

Teorema de Pitágoras

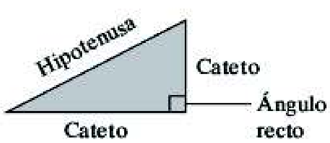


FIGURA 5.20

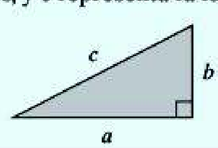
El siguiente problema de aplicación utiliza el teorema de Pitágoras. Los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo (vea la **figura 5.20**) se denominan **catetos**, y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. El **teorema de Pitágoras** expresa la relación entre los catetos y la hipotenusa del triángulo.

Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus dos catetos; esto es

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

Si a y b representan las longitudes de los catetos, y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces



$$a^2 + b^2 = c^2$$

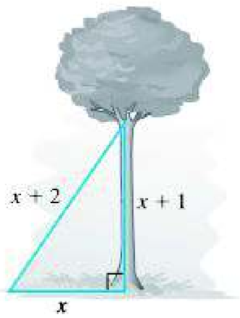


FIGURA 5.21

EJEMPLO 9 ▸ Cable para un árbol Para ayudarle a crecer recto, Jack Keating coloca un cable tirante en un árbol. La localización de los puntos de donde se amarra el cable (una estaca sobre el suelo y la parte superior e inferior del árbol), se indica en la **figura 5.21**. Determine la longitud del cable. Observe que la longitud del cable es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se forma con el árbol y el piso.

Solución **Entienda el problema** Para resolver este problema utilizamos el teorema de Pitágoras. De acuerdo con la figura, vemos que los catetos son x y $x + 1$, y que la hipotenusa es $x + 2$.

Traduzca

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 \qquad \textit{Teorema de Pitágoras}$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \qquad \textit{Sustituir expresiones para los catetos y la hipotenusa.}$$

Realice los cálculos

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \qquad \textit{Elevar al cuadrado los términos.}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \qquad \textit{Simplificar.}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \textit{Hacer que un lado sea igual a 0.}$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \qquad \textit{Factorizar.}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \qquad \textit{Resolver.}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -1$$

Responda Con base en la figura, sabemos que x no puede tener un valor negativo. Por lo tanto, la única respuesta posible es 3. La estaca está colocada a tres pies de distancia respecto del árbol. En la parte superior, el cable se sujeta al árbol a $x + 1$ o 4 pies de altura respecto del piso. La longitud del cable es igual a $x + 2$ o 5 pies.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 109

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Tanto las aplicaciones dadas en esta sección como el conjunto de ejercicios, se han escrito de modo que las ecuaciones cuadráticas sean factorizables. En la vida real, las ecuaciones cuadráticas por lo general no se pueden factorizar (en el conjunto de los números enteros), y necesitan resolverse de otras formas. En las secciones 8.1 y 8.2, analizaremos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas que no son factorizables.

Puede determinar soluciones aproximadas a ecuaciones cuadráticas que no son factorizables por medio de su calculadora graficadora. Considere el siguiente ejemplo de la vida real.

EJEMPLO **Antenas de celulares** En Estados Unidos, el número de antenas repetidoras de señales de telefonía celular ha estado creciendo. Desde 1996 a 2002, el número de estas antenas, N, en miles, puede aproximarse de forma muy precisa por medio de la función

$$N(t) = -1.45t^2 + 21.88t + 25.44$$

donde t es el número de años desde 1996. Determine el año en que el número de antenas repetidoras llegó a 80,000.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Para responder esta pregunta necesitamos que la función $N(t)$ sea igual a 80, y despejar t.

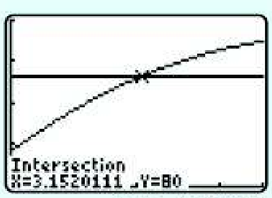
$$-1.45t^2 + 21.88t + 25.44 = 80 \qquad \textit{Determinar } N(t) = 80.$$

No podemos resolver esta ecuación mediante factorización, pero sí utilizando una calculadora graficadora. Para hacerlo, denominamos a un lado de la ecuación Y_1 y al otro Y_2.

$$Y_1 = -1.45x^2 + 21.88x + 25.44$$

$$Y_2 = 80$$

Realice los cálculos Ahora grafique las dos funciones en su calculadora graficadora y utilice las teclas TRACE y ZOOM u otras teclas (por ejemplo la tecla CALC con la opción 5, *intersect*, en la TI-84 Plus) para obtener su respuesta. La **figura 5.22** ilustra la pantalla de una TI-84 Plus, mostrando que la coordenada x de la intersección de las ecuaciones está aproximadamente en $x = 3.1520$.



[0, 6, 1, 0, 120, 30]

FIGURA 5.22

Responda Por consiguiente, 3 años a partir de 1996, o 1999, había casi 80,000 antenas repetidoras.

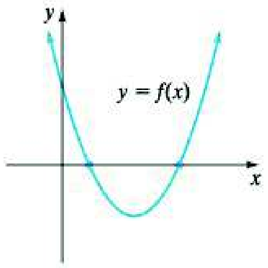


FIGURA 5.23

4 Usar la factorización para determinar las intersecciones con el eje x de una función cuadrática

Considere la gráfica de la **figura 5.23**.

En las intersecciones con el eje x, el valor de la función, o y, es 0. Así, si deseamos determinar las **intersecciones con el eje x de una gráfica**, podemos establecer la función igual a 0 y despejar x.

EJEMPLO 10 ▶ Determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$.

Solución En las intersecciones con el eje x, y tiene un valor de 0. Por lo tanto, para determinar las intersecciones con el eje x escribimos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x - 4)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -2$$

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$, son 4 y -2. Las intersecciones con el eje x de la gráfica que se obtiene de $y = x^2 - 2x - 8$ son $(4, 0)$ y $(-2, 0)$, como se ilustra en la **figura 5.24**.

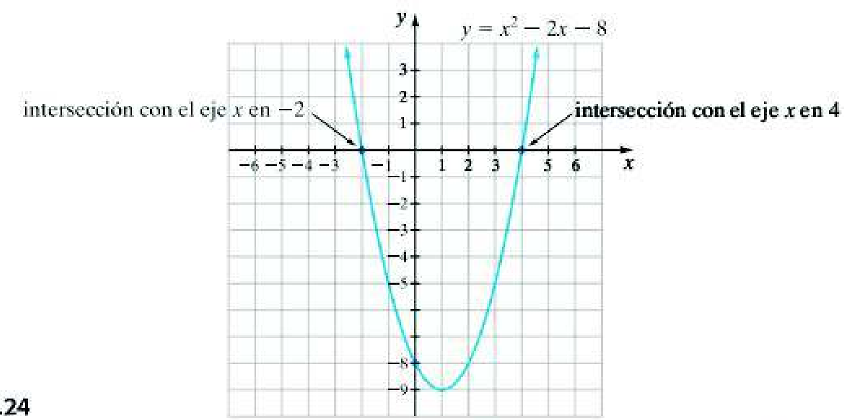


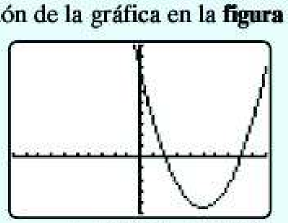
FIGURA 5.24

▶ Ahora resuelva el ejercicio 75

Si conocemos las intersecciones con el eje x de una gráfica, podemos determinar la ecuación de la gráfica. Lea el siguiente recuadro para aprender cómo hacerlo con ayuda de su calculadora graficadora.

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Determine la ecuación de la gráfica en la **figura 5.25**.



$[-10, 10, 1, -10, 20, 2]$ FIGURA 5.25

Si suponemos que las intersecciones son valores enteros, entonces las intersecciones con el eje x están en 2 y en 8. Por lo tanto,

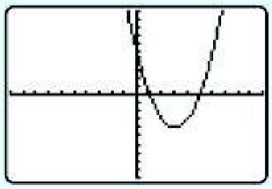
Intersecciones con el eje x en	Factores	Posible ecuación de la gráfica
2 y 8	$(x - 2)(x - 8)$	$y = (x - 2)(x - 8)$ o $y = x^2 - 10x + 16$

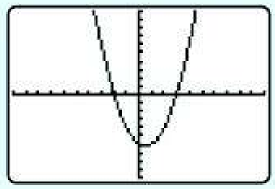
Como la intersección con el eje y de la gráfica en la **figura 5.25** está en 16, $y = x^2 - 10x + 16$ es la ecuación de la gráfica. El ejemplo 11 explica por qué utilizamos las palabras *posible ecuación de la gráfica*.

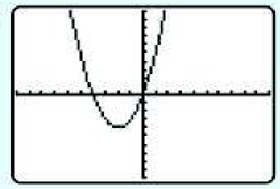
(*continúa en la página siguiente*)

EJERCICIOS

Escriba una ecuación para cada gráfica que se ilustra. Suponga que todas las intersecciones con el eje x tienen valores enteros y que se muestra la ventana estándar.

1. 

2. 

3. 

EJEMPLO 11 ▸ Escriba una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en -2 y en 4.

Solución: Si las intersecciones están en -2 y 4, entonces un conjunto de factores que se obtienen con base en estas intersecciones son $(x + 2)$ y $(x - 4)$, respectivamente. Por lo tanto, una ecuación que tendrá intersecciones con x en -2 y 4 es

$$y = (x + 2)(x - 4) \text{ o } y = x^2 - 2x - 8.$$

Observe que otras ecuaciones pueden tener gráficas con las mismas intersecciones con el eje x. Por ejemplo, la gráfica de $y = 2(x^2 - 2x - 8)$ o $y = 2x^2 - 4x - 16$ también tiene intersecciones con x en -2 y en 4. De hecho, la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$, para cualquier número real a distinto de cero, tendrá intersecciones con el eje x en -2 y 4.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 93

En el ejemplo 11, aunque las intersecciones con x de la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$ siempre estarán en -2 y 4, la intersección con y de la gráfica dependerá del valor de a. Por ejemplo, si $a = 1$, la intersección con el eje y estará en 1(8) u 8. Si $a = 2$, la intersección estará en 2(8) o 16 y así sucesivamente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.8

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo determina el grado de una función polinomial?
2. ¿Qué es una ecuación cuadrática?
3. ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática?
4. **a)** Explique la propiedad del factor nulo.
   b) Resuelva la ecuación $(3x - 7)(2x + 3) = 0$ por medio de la propiedad del factor nulo.
5. **a)** Explique por qué la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$ *no puede* resolverse escribiendo $x + 3 = 2$ o $x + 4 = 2$.
   b) Resuelva la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$.
6. Cuando se factoriza una constante de una ecuación, ¿por qué no es necesario determinar que la constante sea igual a 0 al resolver la ecuación?
7. **a)** Explique cómo resolver una ecuación polinomial mediante factorización.
   b) Resuelva la ecuación $-x - 20 = -12x^2$ mediante el procedimiento explicado en la parte **a)**.
8. **a)** ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 35 = 0$?
   b) Resuelva la ecuación de la parte **a)**.
9. **a)** ¿Cómo se denominan los lados más cortos de un triángulo rectángulo?
   b) ¿Cómo se denomina al lado más largo de un triángulo rectángulo?
10. Escriba el teorema de Pitágoras y explique su significado.
11. Si la gráfica de $y = x^2 + 10x + 16$ tiene intersecciones con el eje x en -8 y -2, ¿cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$? Explique.
12. Si las soluciones para la ecuación $2x^2 - 15x + 18 = 0$ son $\frac{3}{2}$ y 6, ¿cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = 2x^2 - 15x + 18$? Explique.
13. ¿Es posible que una función cuadrática no tenga intersecciones con el eje x? Explique.
14. ¿Es posible que una función cuadrática tenga sólo una intersección con el eje x? Explique.
15. ¿Es posible que una función cuadrática tenga dos intersecciones con el eje x? Explique.
16. ¿Es posible que una función cuadrática tenga tres intersecciones con el eje x? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva.

17. $x(x + 3) = 0$

18. $x(x - 4) = 0$

19. $4x(x - 1) = 0$

20. $8x(x + 6) = 0$

21. $2(x + 1)(x - 7) = 0$

22. $3(a - 5)(a + 2) = 0$

23. $x(x - 9)(x - 4) = 0$

24. $2a(a + 3)(a + 8) = 0$

25. $(3x - 2)(7x - 1) = 0$

26. $(2x + 3)(4x + 5) = 0$

27. $4x^2 = 12x$

28. $3y^2 = -24y$

29. $x^2 + 5x = 0$

30. $2a^2 - 8a = 0$

31. $-x^2 + 6x = 0$

32. $-3x^2 - 21x = 0$

33. $3x^2 = 27x$

34. $18a^2 = -36a$

35. $a^2 + 6a + 5 = 0$

36. $x^2 - 6x + 5 = 0$

37. $x^2 + x - 12 = 0$

38. $b^2 + b - 72 = 0$

39. $x^2 + 8x + 16 = 0$

40. $c^2 - 10c = -25$

41. $(2x + 5)(x - 1) = 12x$

42. $a(a + 2) = 48$

43. $2y^2 = -y + 6$

44. $3a^2 = -a + 2$

45. $3x^2 - 6x - 72 = 0$

46. $2a^2 + 18a + 40 = 0$

47. $x^3 - 3x^2 = 18x$

48. $x^3 = -19x^2 + 42x$

49. $4c^3 + 4c^2 - 48c = 0$

50. $3b^3 - 8b^2 - 3b = 0$

51. $18z^3 = 15z^2 + 12z$

52. $12a^3 = 16a^2 + 3a$

53. $x^2 - 25 = 0$

54. $2y^2 = 98$

55. $4x^2 = 9$

56. $49c^2 = 81$

57. $4y^3 - 36y = 0$

58. $3x^4 - 48x^2 = 0$

59. $-x^2 = 2x - 99$

60. $-x^2 + 16x = 63$

61. $(x + 7)^2 - 16 = 0$

62. $(x - 6)^2 - 4 = 0$

63. $(2x + 5)^2 - 9 = 0$

64. $(x + 1)^2 - 3x = 7$

65. $6a^2 - 12 - 4a = 19a - 32$

66. $4(a^2 - 3) = 6a + 4(a + 3)$

67. $2b^3 + 16b^2 = -30b$

68. $(a - 1)(3a + 2) = 4a$

69. Para $f(x) = 3x^2 + 7x + 9$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = 7$.

70. Para $f(x) = 4x^2 - 11x + 2$, determine todos los valores de a para los que $f(a) = -4$.

71. Para $g(x) = 10x^2 - 31x + 16$, determine todos los valores de a para los que $g(a) = 1$.

72. Para $g(x) = 6x^2 + x - 3$, determine todos los valores de a para los que $g(a) = -2$.

73. Para $r(x) = x^2 - x$, determine todos los valores de a para los que $r(a) = 30$.

74. Para $r(x) = 10x^2 - 19x - 5$, determine todos los valores de a para los que $r(a) = -11$.

Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de las gráficas de cada ecuación (vea el ejemplo 10).

75. $y = x^2 - 10x + 24$

76. $y = x^2 - 13x + 42$

77. $y = x^2 + 16x + 64$

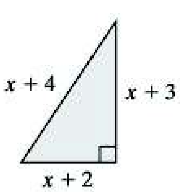
78. $y = 15x^2 - 14x - 8$

79. $y = 12x^3 - 46x^2 + 40x$

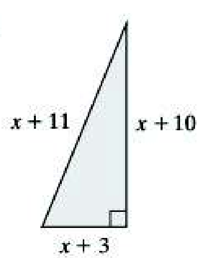
80. $y = 12x^3 - 39x^2 + 30x$

Triángulo rectángulo *En los ejercicios 81 a 86, utilice el teorema de Pitágoras para determinar x.*

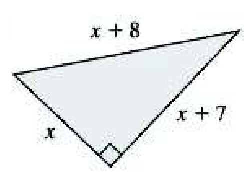
81.



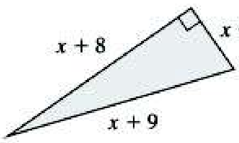
82.



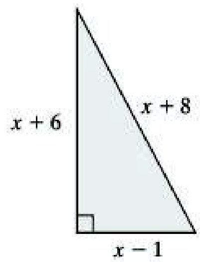
83.



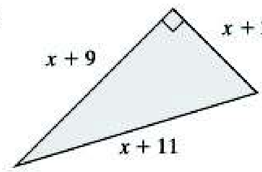
84.



85.



86.



Resolución de problemas

En los ejercicios 87 a 90, determine las intersecciones con el eje x de cada gráfica; luego relacione la ecuación con la gráfica apropiada, marcada con las letras **a)** *a* **d)**.

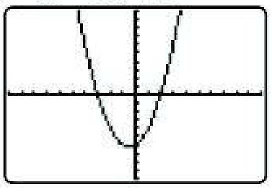
87. $y = x^2 - 5x + 6$

88. $y = x^2 - x - 6$

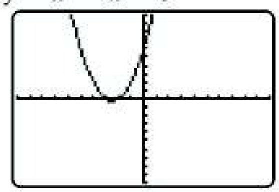
89. $y = x^2 + 5x + 6$

90. $y = x^2 + x - 6$

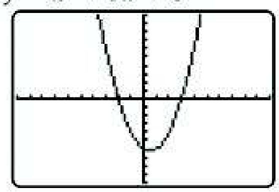
a)



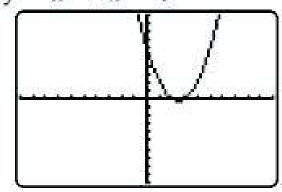
b)



c)



d)



Escriba una ecuación cuya gráfica tenga las intersecciones con el eje x en los valores dados.

91. 1 y 5.

92. 3 y −7.

93. 4 y −2.

94. $\frac{3}{2}$ y 6.

95. $-\frac{5}{6}$ y 2.

96. −0.4 y 2.6.

97. **Mesa rectangular para café** Una mesa para café es rectangular; si el largo mide 1 pie más que el doble de su ancho, y el área superficial de la tabla superior mide 10 pies cuadrados, determine su largo y ancho.

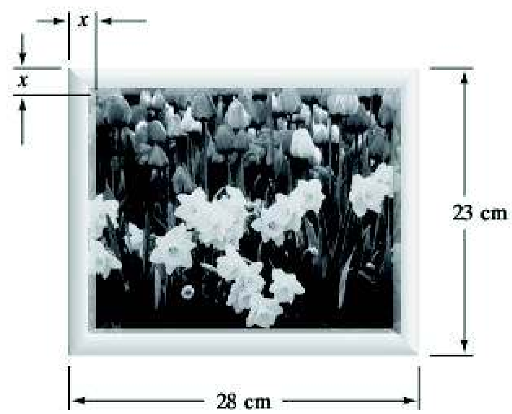
98. **Cobertizo rectangular** El piso de un cobertizo tiene un área de 60 pies cuadrados. Determine el largo y ancho, si el largo mide dos pies menos que el doble de su ancho.

99. **Vela triangular** La vela de un bote es triangular y su altura mide seis pies más que su base. Si el área de la vela es 80 pies cuadrados, determine su base y su altura.

100. **Tienda triangular** Una tienda de campaña triangular tiene una altura que mide 4 pies menos que su base. Si el área de un lado es 70 pies cuadrados, determine la base y la altura de la tienda.

101. **Rectángulo** El jardín de Frank Bullock está rodeado por un pasillo de ancho uniforme. El jardín y el pasillo juntos cubren un área de 320 pies cuadrados. Si el jardín mide 12 pies por 16 pies, determine el ancho del pasillo.

102. **Marco de una pintura** El marco de una pintura mide 28 cm por 23 cm. El área de la pintura es de 414 centímetros cuadrados. Determine el ancho del marco.



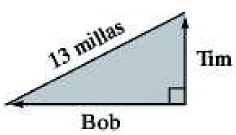
103. **Hortaliza** La hortaliza de Sally Yang es rectangular y mide 20 pies por 30 pies. Además para cubrir el terreno con mantillo, ella quiere hacer un pasillo de ancho uniforme alrededor de la hortaliza. Si ella tiene suficiente mantillo para cubrir un área de 936 pies cuadrados, ¿cuál debe ser el ancho del pasillo?

104. **Jardín cuadrado** Ronnie Tucker tiene un jardín cuadrado, a cuyo alrededor agrega un pasillo de 2 pies de ancho. Si el área total del pasillo y el jardín es de 196 pies cuadrados, determine las dimensiones del jardín.

105. **Esculturas de agua** En un edificio en Navy Pier en Chicago, una fuente de agua, dispara pequeños chorros sobre un pasillo. Los chorros de agua alcanzan una altura máxima, y luego caen en un estanque al otro lado del pasillo. La altura respecto del disparador, h, de un chorro de agua t segundos después de que sale puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 32t$. Determine el tiempo que le toma al chorro de agua regresar a la altura del disparador; esto es, cuando $h(t) = 0$.

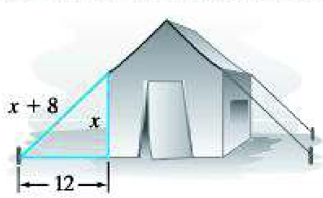
106. Proyectil Un modelo de cohete será lanzado desde una colina que se encuentra a 80 pies sobre el nivel del mar. El lugar del lanzamiento está cercano al océano (nivel del mar) y el cohete caerá en él. La distancia del cohete, s, por encima del nivel del mar en cualquier instante, t, se determina mediante la ecuación $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$. Determine el tiempo que le toma al cohete para caer en el océano.

107. Paseo en bicicleta Dos ciclistas, Bob y Tim, inician su paseo en el mismo punto. Bob conduce hacia el oeste y Tim hacia el norte. En algún momento, se encuentran separados entre sí por una distancia de 13 millas. Si Bob recorrió 7 millas más que Antonio, determine la distancia que recorrió cada uno de ellos.

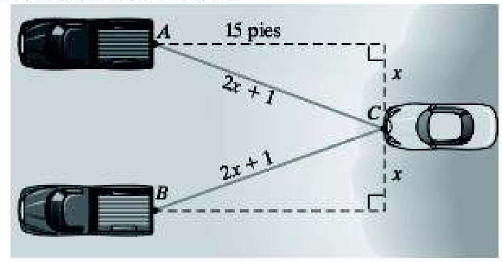


108. Marco para pintura Abril está haciendo un marco para una pintura rectangular que le regalará a su mamá. La diagonal del marco es de 20 pulgadas. Determine las dimensiones del marco, si su longitud mide 4 pulgadas más que su ancho.

109. Cables de una tienda de campaña Una tienda de campaña se estabiliza mediante cables. Un cable se sujeta al suelo a 12 pies de distancia de la tienda. La longitud del cable utilizado mide 8 pies más que la altura a donde se sujeta el otro extremo del cable. ¿Cuál es la longitud del cable?



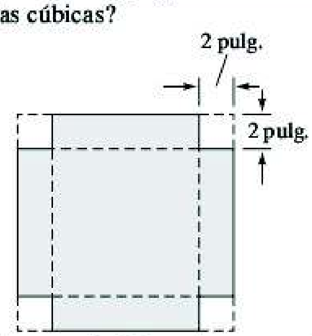
110. Automóvil atascado en el barro Suponga que dos automóviles, indicados mediante los puntos A y B en la figura, jalan a un tercer automóvil, C, fuera del barro. Determine la distancia del automóvil A al B.



111. Tienda de bicicletas Una tienda de bicicletas utiliza una ecuación para calcular sus ingresos mensuales, $R(x) = 70x - x^2$, y otra para determinar sus costos mensuales, $C(x) = 17x + 150$, en donde x es el número de bicicletas vendidas y $x \geq 10$. Determine el número de bicicletas que debe vender la tienda para alcanzar el punto de equilibrio (no ganar ni perder); esto es, el punto en donde los ingresos son iguales a los costos.

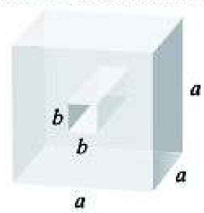
112. Flores de seda Edith Hall fabrica flores de seda y las vende a diferentes tiendas. Su compañía tiene una ecuación para calcular sus ingresos, $R(x) = 40x - x^2$, y otra para determinar sus costos, $C(x) = 14x + 25$, en donde x es el número de flores vendidas y $x \geq 5$. Determine el número de flores que debe venderse para alcanzar el punto de equilibrio.

113. Fabricación de una caja Monique Sidding fabrica una caja cortando piezas de 2 por 2 pulgadas de un cartón cuadrado, doblando hacia arriba los lados, para crear una caja de 2 pulgadas de altura. ¿Cuál es el tamaño del cartón necesario para fabricar una caja de 2 pulgadas de altura con un volumen de 162 pulgadas cúbicas?



114. Fabricación de una caja Una caja rectangular se formará cortando cuadrados de cada esquina de una pieza rectangular de hojalata y doblando hacia arriba los lados. La caja tendrá 3 pulgadas de altura, el largo será el doble del ancho, y el volumen será de 96 pulgadas cúbicas. Determine el largo y el ancho de la caja.

115. Cubo A un cubo sólido con dimensiones a^3, se le quita un sólido rectangular con dimensiones ab^2.

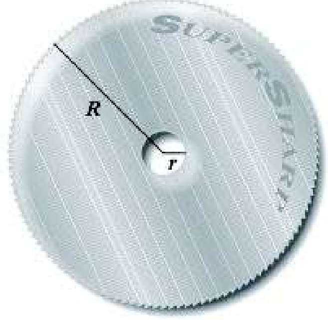


a) Escriba una fórmula para determinar el volumen que queda, V.

b) Factorice el lado derecho de la fórmula de la parte **a)**.

c) Si el volumen es de 1620 pulgadas cúbicas y a es igual a 12 pulgadas, determine b.

116. Hoja de una sierra circular Una sierra circular de acero tiene un agujero en su centro, como se muestra en la figura.

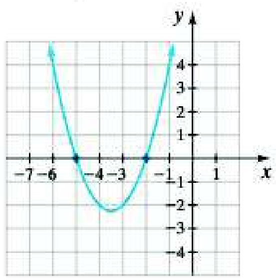


a) Escriba una fórmula para calcular el área de la hoja.

b) Factorice el lado derecho de la fórmula de la parte **a)**.

c) Determine A, si $R = 10$ cm y $r = 3$ cm.

117. Considere la gráfica siguiente de una función cuadrática.



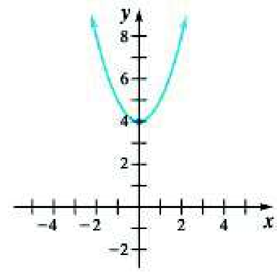
a) Escriba una función cuadrática que tenga las intersecciones con el eje x indicadas.

b) Escriba una ecuación cuadrática con una variable cuya solución sea -2 y -5.

c) ¿Cuántas funciones cuadráticas diferentes pueden tener intersecciones con el eje x de -2 y -5? Explique.

d) ¿Cuántas ecuaciones cuadráticas diferentes con una variable pueden tener soluciones de -2 y -5? Explique.

118. La gráfica de la ecuación $y = x^2 + 4$ se ilustra a continuación.



a) ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^2 + 4 = 0$? Explique su respuesta.

119. Considere la función cuadrática

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a > 0.$$

a) La gráfica de este tipo de función puede no tener intersecciones con el eje x, una intersección con el eje x o dos intersecciones con el eje x. Bosqueje cada una de estas posibilidades.

b) ¿Cuántas posibles soluciones reales puede tener la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$? Explique su respuesta a la parte **b)** utilizando los bosquejos de la parte **a)**.

120. Distancia para detenerse La distancia, d en pies, para detener un automóvil común que viaja sobre pavimento seco puede calcularse mediante la función $d(s) = 0.034s^2 + 0.56s - 17.11$, en donde s es la velocidad del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. Si un automóvil requiere de 190 pies para detenerse después de aplicar los frenos, ¿qué tan rápido va el automóvil?

121. Distancia para detenerse La distancia, d en pies, para detener un automóvil común que viaja sobre pavimento mojado puede calcularse mediante la función $d(s) = -0.31s^2 + 59.82s - 2180.22$, en donde s es la velocidad del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. Si un automóvil requiere de 545 pies para detenerse después de aplicar los frenos, ¿qué tan rápido va el automóvil?

Retos

Resuelva.

122. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ **123.** $x^4 - 13x^2 = -36$ **124.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Actividad en grupo

En cursos más avanzados de matemáticas podría necesitar despejar y' (se lee "y prima") en una ecuación. Cuando esto ocurra, trate a y' como una variable diferente de y. De forma individual despeje a y' de cada ecuación. En equipo, compare sus respuestas y obtenga las respuestas correctas en equipo.

125. $xy' + yy' = 1$ **126.** $xy - xy' = 3y' + 2$ **127.** $2xyy' - xy = x - 3y'$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **128.** Simplifique $(4x^{-2}y^3)^{-2}$.

[2.5] **129.** Resuelva la desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

$$-1 < \frac{4(3x - 2)}{3} \le 5$$

[4.1] **130.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[5.2] **131.** Si $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 + 5$, determine $(f \cdot g)(4)$.

[5.7] **132.** Factorice $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 5

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.1	
Términos son las partes que se suman o restan en una expresión matemática.	Los términos de $-3x^2 + 1.6x + 15$ son $-3x^2$, $1.6x$ y 15
Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y ninguna variable aparece en el denominador.	$9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$ es un polinomio.
El **grado de un término** es la suma de los exponentes en las variables	El término $3x^2y^9$ es de grado 11.
El **término principal** de un polinomio es el término del grado mayor. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.	En el polinomio $9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$, el término principal es $9x^7$ y el coeficiente principal es 9.
Un **monomio** es un polinomio con un término. Un **binomio** es un polinomio con dos términos. Un **trinomio** es un polinomio con tres términos.	$-13mn^2p^3$ $x^4 - 1$ $1.9x^3 - 28.3x^2 - 101.5x$
Un polinomio es **lineal** si es de grado 0 o 1. Un polinomio con una variable es **cuadrático** si es de grado 2. Un polinomio con una variable es **cúbico** si es de grado 3.	19, $8y + 17$ $x^2 - 5x + 16$ $-4x^3 + 11x^2 - 9x + 6$
Una **función polinomial** tiene la forma $y = P(x)$. Para evaluar $P(a)$, reemplace x por a.	$P(x) = 2x^2 - x + 3$ es una función polinomial. Para evaluar $P(x)$ en $x = 10$, $P(10) = 2(10)^2 - 10 + 3$ $= 200 - 10 + 3 = 193$
Para **sumar o restar polinomios** reduzca los términos semejantes.	$(5x^2 - 9x + 10) + (2x^2 + 17x - 8)$ $= 5x^2 - 9x + 10 + 2x^2 + 17x - 8 = 7x^2 + 8x + 2$
Sección 5.2	
Para **multiplicar polinomios**, multiplique cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.	$3a(a - 2) = 3a \cdot a - 3a \cdot 2$ $= 3a^2 - 6a$
Propiedad distributiva, forma desarrollada $a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$	$x(2x^2 + 8x - 5) = 2x^3 + 8x^2 - 5x$
Para **multiplicar dos binomios**, utilice el **método PIES**; multiplique los términos **P**rimeros, **I**nternos, **E**xternos, **S**egundos.	$(3x - 1)(4x + 9) = 12x^2 - 4x + 27x - 9$ $= 12x^2 + 23x - 9$
Para multiplicar un polinomio por un polinomio, puede utilizar el formato vertical.	Multiplique $(2x^2 - x + 8)(5x + 1)$ $\begin{array}{r} 2x^2 - x + 8 \\ 5x + 1 \\ \hline 2x^2 - x + 8 \\ 10x^3 - 5x^2 + 40x \\ \hline 10x^3 - 3x^2 + 39x + 8 \end{array}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.2 (continuación)	
Cuadrado de un binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(7x+4)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(4) + 4^2$ $= 49x^2 + 56x + 16$ $\left(\frac{1}{2}m - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}m\right)(3) + 3^2 = \frac{1}{4}m^2 - 3m + 9$
Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(5c+6)(5c-6) = (5c)^2 - 6^2 = 25c^2 - 36$
Sección 5.3	
Para dividir un polinomio entre un monomio, divida cada término del polinomio entre el monomio.	$\frac{6y + 10x^2y^5 - 17x^9y^8}{2xy^2} = \frac{6y}{2xy^2} + \frac{10x^2y^5}{2xy^2} - \frac{17x^9y^8}{2xy^2}$ $= \frac{3}{xy} + 5xy^3 - \frac{17x^8y^6}{2}$
Para dividir dos polinomios, utilice la división larga.	Divida $(8x^2 + 6x - 9) \div (2x + 1)$. $\begin{array}{r} 4x + 1 \\ 2x+1 \overline{) 8x^2 + 6x - 9} \\ \underline{8x^2 + 4x} \\ 2x - 9 \\ \underline{2x + 1} \\ -10 \end{array}$ Así que, $\frac{8x^2 + 6x - 9}{2x+1} = 4x + 1 - \frac{10}{2x+1}$
Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, utilice la **división sintética**.	Utilice la división para dividir $(x^3 + 2x^2 - 11x + 5) \div (x + 4)$ $\begin{array}{r\|rrrr} -4 & 1 & 2 & -11 & 5 \\ & & -4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 17 \end{array}$ Por tanto, $\frac{x^3 + 2x^2 - 11x + 5}{x+4} = x^2 - 2x - 3 + \frac{17}{x+4}$
Teorema del residuo Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es $P(a)$.	Determine el residuo cuando $2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$ se divide entre $x + 2$. Sea $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$; entonces $P(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 11(-2) + 29$ $= -16 - 24 + 22 + 29$ $= 11.$ El residuo es 11.
Sección 5.4	
El **máximo factor común** (MFC) es el producto de los factores comunes de todos los términos en el polinomio.	El MFC de z^5, z^4, z^9, z^2 es z^2. El MFC de $9(x-4)^3, 6(x-4)^{10}$ es $3(x-4)^3$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.4 (continuación)	
Para factorizar un monomio de un polinomio 1. Determine el máximo factor común de todos los términos en el polinomio. 2. Escriba cada término como el producto del MFC y otro factor. 3. Utilice la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.	$35x^6 + 15x^4 + 5x^3 = 5x^3(7x^3) + 5x^3(3x) + 5x^3(1)$ $= 5x^3(7x^3 + 3x + 1)$ $4n(7n + 10) - 13(7n + 10) = (7n + 10)(4n - 13)$
Para factorizar por agrupación cuatro términos. 1. Determine si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factorice el MFC de cada término. 2. Acomode los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo de dos términos debe tener un MFC. 3. Factorice el MFC de cada grupo de dos términos. 4. Si los dos términos formados en el paso 3 tienen MFC, factorícelo.	$cx + cy + dx + dy = c(x + y) + d(x + y)$ $= (x + y)(c + d)$ $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = x^2(x + 6) - 5(x + 6)$ $= (x + 6)(x^2 - 5)$
Sección 5.5	
Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ 1. Determine dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b. 2. Los factores del trinomio serán de la forma $(x + \underbrace{\quad}_{\text{Un factor determinado en el paso 1}})(x + \underbrace{\quad}_{\text{Otro factor determinado en el paso 1}})$	Factorice $m^2 - m - 42$. Los factores de -42 cuya suma es -1 son -7 y 6. Observe que $(-7)(6) = -42$ y $-7 + 6 = -1$. Por lo tanto, $m^2 - m - 42 = (m - 7)(m + 6)$
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante prueba y error 1. Escriba todas las parejas de factores del coeficiente del término cuadrado, a. 2. Escriba todas las parejas de factores de la constante, c. 3. Pruebe diferentes combinaciones de estos factores hasta que se determine el término central correcto, bx.	$4t^2 + 9t + 5 = (4t + 5)(t + 1)$ Observe que $4t + 5t = 9t$. $2a^2 - 15ab + 28b^2 = (2a - 7b)(a - 4b)$ Observe que $-8ab - 7ab = -15ab$.
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante agrupación 1. Determine dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ y cuya suma sea b. 2. Reescriba el término de en medio, bx, mediante los números que encontró en el paso 1. 3. Factorice por agrupación.	Factorice mediante agrupación $2y^2 + 9y - 18$. Dos números cuyo producto es -36 y cuya suma es 9 son 12 y -3. Por lo tanto, $2y^2 + 9y - 18 = 2y^2 + 12y - 3y - 18$ $= 2y(y + 6) - 3(y + 6)$ $= (y + 6)(2y - 3)$
Un **polinomio primo** es un polinomio que no puede factorizarse.	$x^2 + 5x + 9$ es un polinomio primo.
La **factorización por sustitución** ocurre cuando se sustituye una variable por otra variable o expresión.	Factorice $a^6 - 2a^3 - 3$. $a^6 - 2a^3 - 3 = (a^3)^2 - 2a^3 - 3$ $= x^2 - 2x - 3$ Sustituya x por a^3. $= (x - 3)(x + 1)$ $= (a^3 - 3)(a^3 + 1)$ Sustituya a^3 por x.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.5 (continuación)	
Diferencia de dos cuadrados $$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$	$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$
Trinomios cuadrados perfectos $$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$ $$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$	$d^2 + 8d + 16 = d^2 + 2(d)(4) + 4^2 = (d + 4)^2$ $4m^2 - 12m + 9 = (2m)^2 - 2(2m)(3) + 3^2 = (2m - 3)^2$
Suma de dos cubos $$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$	$y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$
Diferencia de dos cubos $$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$	$27z^3 - 64x^3 = (3z)^3 - (4x)^3 = (3z - 4x)(9z^2 + 12xz + 16x^2)$
Sección 5.7	
Para factorizar un polinomio **1.** Determine si todos los términos en el polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factorice el MFC. **2.** Si el polinomio tiene dos términos, determine si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. Si es así, factorice mediante la fórmula apropiada. **3.** Si el polinomio tiene tres términos, determine si es un trinomio cuadrado perfecto. De serlo, factorice de acuerdo con esto. Si no es así, factorice el trinomio mediante prueba y error, agrupación, o sustitución como se explicó en la sección 5.5. **4.** Si el polinomio tiene más de tres términos, intente factorizar mediante agrupación. Si no funciona, vea si tres de los términos son el cuadrado de un binomio. **5.** Como paso final, examine su polinomio factorizado para ver si algún factor listado tiene un factor común que pueda factorizarse más. Si determina un factor común, factorícelo en este momento.	$2x^7 + 16x^6 + 24x^5 = 2x^5(x^2 + 8x + 12)$ $= 2x^5(x + 6)(x + 2)$ $36a^6 - 100a^4b^2 = 4a^4(9a^2 - 25b^2)$ $= 4a^4[(3a)^2 - (5b)^2]$ $= 4a^4(3a + 5b)(3a - 5b)$ $125m^3 - 64 = (5m)^3 - 4^3$ $= (5m - 4)(25m^2 + 20m + 16)$
Sección 5.8	
Una **ecuación polinomial** se forma cuando dos polinomios se igualan entre sí.	$x^2 - 5x = 2x + 7$
Una **ecuación cuadrática** es una ecuación polinomial de segundo grado (con una variable). **Forma general de una ecuación cuadrática** $$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$ donde a, b y c son números reales.	$2x^2 - 6x + 11 = 0$ $x^2 - 4 = x + 2$ $x^2 - 3x + 5 = 0$ es una ecuación cuadrática en la forma general.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 5.8 (continuación)

Propiedad del factor nulo

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien los dos a y b son iguales a 0.

Ejemplo: Resuelva $(x + 6)(x - 1) = 0$.

$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -6 \qquad\qquad x = 1$$

Las soluciones son -6 y 1.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utilice la propiedad de la suma para quitar todos los términos de un lado de la ecuación. Esto resultará en un lado de la ecuación igual a cero.
2. Reduzca los términos semejantes de la ecuación y luego factorice.
3. Haga cada factor, *que tenga una variable*, igual a 0, resuelva las ecuaciones y determine las soluciones.
4. Compruebe las soluciones en la ecuación *original*.

Ejemplo: Resuelva $3x^2 + 13x - 4 = 2x$.

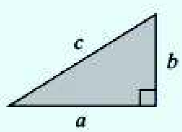
$$3x^2 + 11x - 4 = 0$$
$$(3x - 1)(x + 4) = 0$$
$$3x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0$$
$$x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = -4$$

Una comprobación muestra que $\frac{1}{3}$ y -4 son soluciones.

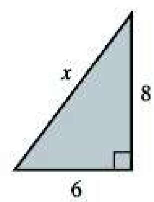
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Ejemplo: Determine la longitud de la hipotenusa en el triángulo rectángulo siguiente.



$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$
$$6^2 + 8^2 = x^2$$
$$36 + 64 = x^2$$
$$100 = x^2$$
$$10 = x$$

Observación: -10 no es una respuesta posible.

Ejercicios de repaso del capítulo 5

[5.1] *Determine si cada expresión es un polinomio. Si la expresión es un polinomio,* **a)** *proporcione el nombre especial del polinomio, si lo tiene,* **b)** *escriba el polinomio en orden descendente de la variable x, y* **c)** *indique el grado del polinomio.*

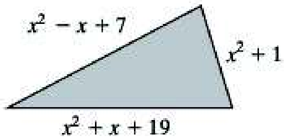
1. $3x^2 + 9$
2. $5x + 4x^3 - 7$
3. $8x - x^{-1} + 6$
4. $-3 - 10x^2y + 6xy^3 + 2x^4$

Realice cada operación indicada.

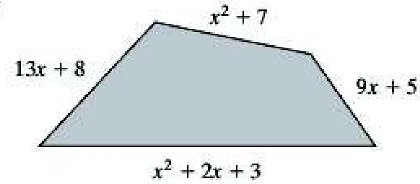
5. $(x^2 - 5x + 8) + (2x + 6)$
6. $(7x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 9x - 1)$
7. $(2a - 3b - 2) - (-a + 5b - 9)$
8. $(4x^3 - 4x^2 - 2x) + (2x^3 + 4x^2 - 7x + 13)$
9. $(3x^2y + 6xy - 5y^2) - (4y^2 + 3xy)$
10. $(-8ab + 2b^2 - 3a) + (-b^2 + 5ab + a)$
11. Sume $x^2 - 3x + 12$ con $4x^2 + 10x - 9$.
12. Reste $3a^2b - 2ab$ de $-7a^2b - ab$.
13. Determine $P(2)$, si $P(x) = 2x^2 - 3x + 19$.
14. Determine $P(-3)$, si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 10$.

Perímetro *En los ejercicios 15 y 16, determine una expresión polinomial para calcular el perímetro de cada figura.*

15.

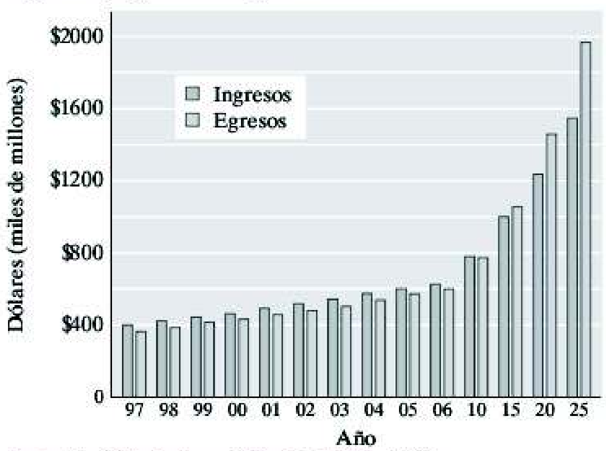


16.



En los ejercicios 17 y 18 de la página 379, utilizamos la siguiente gráfica, donde se muestran los ingresos y egresos de la Administración de Seguridad Social de Estados Unidos entre 1997 y 2025.

Ingresos y egresos de seguridad social



Fuente: Administración de seguridad social de Estados Unidos.

17. Ingresos en seguridad social
La función $R(t) = 0.78t^2 + 20.28t + 385.0$, en donde t representa los años desde 1997 y $0 \leq t \leq 28$, sirve para aproximar los ingresos la seguridad social en Estados Unidos, $R(t)$, en miles de millones de dólares.

a) Mediante la función proporcionada, estime los ingresos en 2010.

b) Compare su respuesta en la parte **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya su respuesta?

18. Egresos en seguridad social
La función $G(t) = 1.74t^2 + 7.32t + 383.91$, en donde t representa años desde 1997 y $0 \leq t \leq 28$, sirve para aproximar los egresos de la industria de seguridad social, $G(t)$, en miles de millones de dólares.

a) Mediante la función proporcionada, estime los egresos en 2010.

b) Compare su respuesta de la parte **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya su respuesta?

[5.2] *Multiplique.*

19. $2x(3x^2 - 7x + 5)$

20. $-3xy^2(x^3 + xy^4 - 4y^5)$

21. $(3x - 5)(2x + 9)$

22. $(5a + 1)(10a - 3)$

23. $(x + 8y)^2$

24. $(a - 11b)^2$

25. $(2xy - 1)(5x + 4y)$

26. $(2pq - r)(3pq + 7r)$

27. $(2a + 9b)^2$

28. $(4x - 3y)^2$

29. $(7x + 5y)(7x - 5y)$

30. $(2a - 5b^2)(2a + 5b^2)$

31. $(4xy + 6)(4xy - 6)$

32. $(9a^2 - 2b^2)(9a^2 + 2b^2)$

33. $[(x + 3y) + 2]^2$

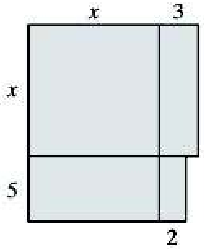
34. $[(2p - q) - 5]^2$

35. $(3x^2 + 4x - 6)(2x - 3)$

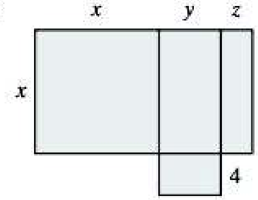
36. $(4x^3 + 6x - 2)(x + 3)$

Área *En los ejercicios 37 y 38, determine una expresión para calcular el área total de cada figura.*

37.



38.



Para cada par de funciones, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(3)$.

39. $f(x) = x + 1, g(x) = x - 3$

40. $f(x) = 2x - 4, g(x) = x^2 - 3$

41. $f(x) = x^2 + x - 3, g(x) = x - 2$

42. $f(x) = x^2 - 2, g(x) = x^2 + 2$

[5.3] *Divida.*

43. $\dfrac{4x^7y^5}{20xy^3}$

44. $\dfrac{3s^5t^8}{12s^5t^3}$

45. $\dfrac{45pq - 25q^2 - 15q}{5q}$

46. $\dfrac{7a^2 - 16a + 32}{4}$

47. $\dfrac{2x^3y^2 + 8x^2y^3 + 12xy^4}{8xy^3}$

48. $(8x^2 + 14x - 15) \div (2x + 5)$

49. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 17x + 7) \div (2x + 1)$

50. $(4a^4 - 7a^2 - 5a + 4) \div (2a - 1)$

51. $(x^2 + x - 22) \div (x - 3)$

52. $(4x^3 + 12x^2 + x - 9) \div (2x + 3)$

Utilice la división sintética para obtener el cociente de cada expresión.

53. $(3x^3 - 2x^2 + 10) \div (x - 3)$

54. $(2y^5 - 10y^3 + y - 2) \div (y + 1)$

55. $(x^5 - 18) \div (x - 2)$

56. $(2x^3 + x^2 + 5x - 3) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Determine el residuo de cada división mediante el teorema del residuo. Si el divisor es un factor del dividendo, indíquelo.

57. $(x^2 - 4x + 13) \div (x - 3)$

58. $(2x^3 - 6x^2 + 3x) \div (x + 4)$

59. $(3x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

60. $(2x^4 - 6x^2 - 8) \div (x + 2)$

[5.4] *En cada expresión, factorice el máximo factor común.*

61. $4x^2 + 8x + 32$

62. $15x^5 + 6x^4 - 12x^5y^3$

63. $10a^3b^3 - 14a^2b^6$

64. $24xy^4z^3 + 12x^2y^3z^2 - 30x^3y^2z^3$

Factorice por agrupación.

65. $5x^2 - xy + 30xy - 6y^2$

66. $12a^2 + 8ab + 15ab + 10b^2$

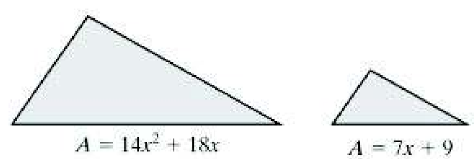
67. $(2x - 5)(2x + 1) - (2x - 5)(x - 8)$

68. $7x(3x - 7) + 3(3x - 7)^2$

Área *En los ejercicios 69 y 70, A representa el área de la figura. Determine una expresión en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de las figuras geométricas.*

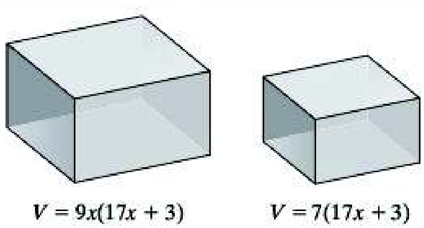
69.

70.

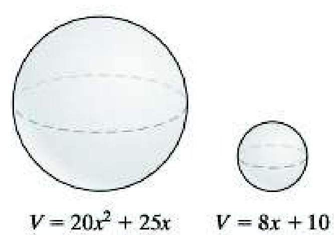


Volumen *En los ejercicios 71 y 72, V representa el volumen de la figura. Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de las figuras geométricas.*

71.



72.



[5.5] *Factorice cada trinomio.*

73. $x^2 + 9x + 18$

74. $x^2 + 3x - 10$

75. $x^2 - 3x - 28$

76. $x^2 - 10x + 16$

77. $-x^2 + 12x + 45$

78. $-x^2 + 13x - 12$

79. $2x^3 + 13x^2 + 6x$

80. $8x^4 + 10x^3 - 25x^2$

81. $4a^5 - 9a^4 + 5a^3$

82. $12y^5 + 61y^4 + 5y^3$

83. $x^2 - 15xy - 54y^2$

84. $6p^2 - 19pq + 10q^2$

85. $x^4 + 10x^2 + 21$

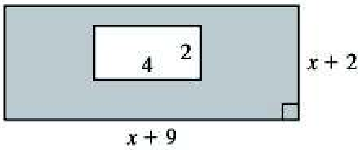
86. $x^4 + 2x^2 - 63$

87. $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$

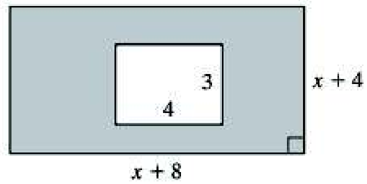
88. $(x - 4)^2 - (x - 4) - 20$

Área *En los ejercicios 89 y 90, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en cada figura.*

89.



90.



[5.6] *Utilice una fórmula especial de factorización para factorizar las siguientes expresiones.*

91. $x^2 - 36$

92. $x^2 - 121$

93. $x^4 - 81$

94. $x^4 - 16$

95. $4a^2 + 4a + 1$

96. $16y^2 - 24y + 9$

97. $(x + 2)^2 - 16$

98. $(3y - 1)^2 - 36$

99. $p^4 + 18p^2 + 81$

100. $m^4 - 20m^2 + 100$

101. $x^2 + 8x + 16 - y^2$

102. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 36c^2$

103. $16x^2 + 8xy + y^2$

104. $36b^2 - 60bc + 25c^2$

105. $x^3 - 27$

106. $y^3 + 64z^3$

107. $125x^3 - 1$

108. $8a^3 + 27b^3$

109. $y^3 - 64z^3$

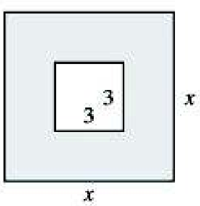
110. $(x - 2)^3 - 27$

111. $(x + 1)^3 - 8$

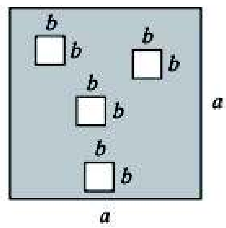
112. $(a + 4)^3 + 1$

Área *En los ejercicios 113 y 114, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada en cada figura.*

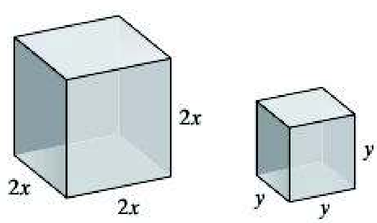
113.



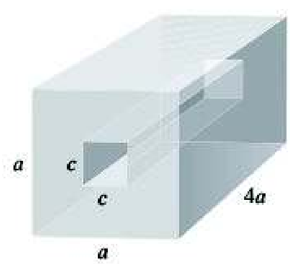
114.



115. Volumen Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre los volúmenes de estos dos cubos.



116. Volumen Determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el volumen de la región sombreada de esta figura.



[5.4–5.7] *Factorice completamente.*

117. $x^2y^4 - 2xy^4 - 15y^4$

118. $5x^3 - 30x^2 + 40x$

119. $3x^3y^4 + 18x^2y^4 - 6x^2y^4 - 36xy^4$

120. $3y^5 - 75y$

121. $4x^3y + 32y$

122. $5x^4y + 20x^3y + 20x^2y$

123. $6x^3 - 21x^2 - 12x$

124. $x^2 + 10x + 25 - z^2$

125. $5x^3 + 40y^3$

126. $x^2(x + 6) + 3x(x + 6) - 4(x + 6)$

127. $4(2x + 3)^2 - 12(2x + 3) + 5$

128. $4x^4 + 4x^2 - 3$

129. $(x + 1)x^2 - (x + 1)x - 2(x + 1)$

130. $9ax - 3bx + 21ay - 7by$

131. $6p^2q^2 - 5pq - 6$

132. $9x^4 - 12x^2 + 4$

133. $16y^2 - (x^2 + 4x + 4)$

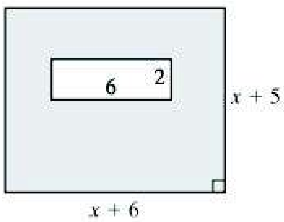
134. $6(2a + 3)^2 - 7(2a + 3) - 3$

135. $6x^4y^5 + 9x^3y^5 - 27x^2y^5$

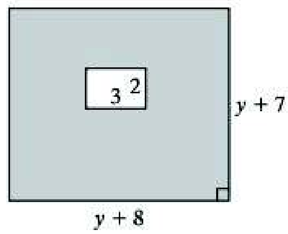
136. $x^3 - \frac{8}{27}y^6$

Área *En los ejercicios 137 a 142, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada de cada figura.*

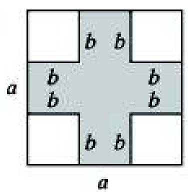
137.



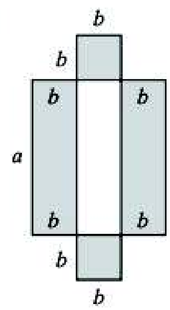
138.



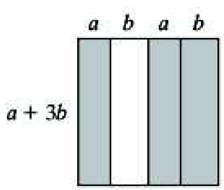
139.



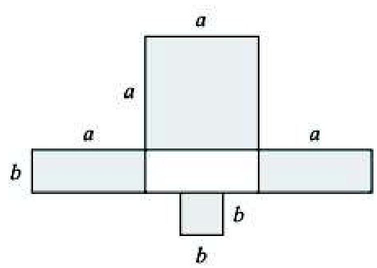
140.



141.



142.



[5.8] *Resuelva.*

143. $(x - 2)(4x + 1) = 0$

144. $(2x + 5)(3x + 10) = 0$

145. $4x^2 = 8x$

146. $12x^2 + 16x = 0$

147. $x^2 + 7x + 12 = 0$

148. $a^2 + a - 30 = 0$

149. $x^2 = 8x - 7$

150. $c^3 - 6c^2 + 8c = 0$

151. $5x^2 = 80$

152. $x(x + 3) = 2(x + 4) - 2$

153. $12d^2 = 13d + 4$

154. $20p^2 - 6 = 7p$

Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de cada ecuación.

155. $y = 2x^2 - 6x - 36$

156. $y = 20x^2 - 49x + 30$

Escriba una ecuación cuya gráfica tenga las intersecciones con el eje x en los valores dados.

157. -4 y 6

158. $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{1}{6}$

En los ejercicios 159 a 163, responda la pregunta.

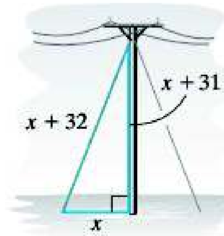
159. Alfombra El área de una alfombra rectangular de Fred Bank, es de 108 pies cuadrados. Determine el largo y ancho de la alfombra, si el largo es 3 pies mayor que el ancho.

160. Anuncio triangular La base de un anuncio triangular mide 5 pies más que el doble de la altura. Determine la base y la altura, si el área del triángulo es 26 pies cuadrados.

161. Cuadrado Un cuadrado tiene un lado de 4 pulgadas mayor que el lado de un segundo cuadrado. Si el área del cuadrado más grande es de 49 pulgadas cuadradas, determine la longitud de cada lado de ambos cuadrados.

162. Velocidad Un proyectil es lanzado hacia arriba, desde la parte más alta de un edificio de 144 pies de altura, con una velocidad de 128 pies por segundo. La distancia del proyectil respecto del suelo, s, en cualquier instante, t, en segundos, está dada mediante la fórmula $s(t) = -16t^2 + 128t + 144$. Determine el tiempo que tarda el proyectil en estrellarse contra el suelo.

163. Poste telefónico Se sujetan dos cables tensados a un poste telefónico para ayudar a estabilizarlo. Un cable se sujeta del piso a x pies de la base del poste. La altura del poste es $x + 31$ y el largo del cable es $x + 32$. Determine x.



Examen de práctica del capítulo 5

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. **a)** Proporcione el nombre específico del siguiente polinomio.

$$-4x^2 + 3x - 6x^4$$

b) Escriba el polinomio en potencias descendentes de la variable x.

c) Indique el grado del polinomio.

d) ¿Cuál es el coeficiente principal del polinomio?

Realice cada operación.

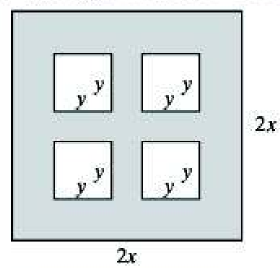
2. $(7x^2y - 5y^2 + 4x) - (3x^2y + 9y^2 - 6y)$
3. $2x^3y^2(-4x^5y + 12x^3y^2 - 6x)$
4. $(2a - 3b)(5a + b)$
5. $(2x^2 + 3xy - 6y^2)(2x + y)$
6. $(12x^6 - 15x^2y + 21) \div 3x^2$
7. $(2x^2 - 7x + 9) \div (2x + 3)$
8. Utilice la división sintética para obtener el cociente. $(3x^4 - 12x^3 - 60x + 1) \div (x - 5)$
9. Utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $2x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ se divide entre $x + 3$.

Factorice completamente.

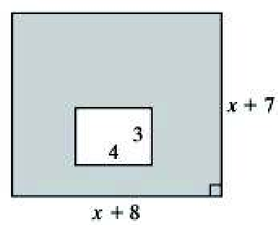
10. $12x^3y + 10x^2y^4 - 14xy^3$
11. $x^3 - 2x^2 - 3x$
12. $2a^2 + 4ab + 3ab + 6b^2$
13. $2b^4 + 5b^2 - 18$
14. $4(x - 5)^2 + 20(x - 5)$
15. $(x + 4)^2 + 2(x + 4) - 3$
16. $27p^3q^6 - 8q^6$
17. Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x - 5$, determine **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(2)$

Área *En los ejercicios 18 y 19, determine una expresión, en forma factorizada, para calcular el área de la región sombreada.*

18.



19.



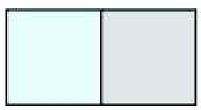
Resuelva.

20. $7x^2 + 25x - 12 = 0$
21. $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$
22. Utilice factorización para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 + 10x - 3$.
23. Determine una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en 2 y 7.
24. **Área** El área de un triángulo es de 22 metros cuadrados. Si la base del triángulo es 3 metros mayor que 2 veces la altura, determine la base y la altura del triángulo.
25. **Béisbol** Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba, desde la parte más alta de un edificio de 448 pies de altura, con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La distancia, s, de la pelota de béisbol respecto del suelo en cualquier instante, t, en segundos, está dada por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 48t + 448$. Determine el tiempo que tarda la pelota de béisbol en golpear el suelo.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo en donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Determine $A \cup B$ para $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 5, 6, 8\}$.
2. Ilustre $\{x|x \leq -5\}$ en la recta de los números reales.
3. Divida $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$.
4. Evalúe $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9 - 8)^2$.
5. Simplifique $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.
6. Resuelva $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$.
7. Resuelva $k = 2(d + e)$ por e.
8. **Terreno** Craig Camapanella, un arquitecto, desea cercar dos áreas iguales, como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadrados y el largo total de la cerca utilizada es de 91 metros, determine las dimensiones de cada cuadrado.



9. **Copias** Cecil Winthrop tiene un manuscrito y necesita obtener 6 copias del mismo antes de enviárselo a su editor en Boston. La primera copia cuesta 15 centavos por página y cada copia adicional cuesta 5 centavos por página. Si el pago total es de $248, ¿cuántas páginas tiene el manuscrito?
10. **Promedio de calificaciones** Las primeras cuatro calificaciones que obtuvo Todd Garner en sus exámenes son 68, 72, 90 y 86. ¿Qué rango de calificaciones de su quinto examen producirá un promedio mayor o igual que 70 y menor que 80?
11. ¿(4, 1) es una solución de la ecuación $3x + 2y = 13$?
12. Escriba la ecuación $2 = 6x - 3y$ en la forma general.
13. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(8, -4)$ y $(-1, -2)$.
14. Si $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 16$, determine $f(-4)$.
15. Grafique la desigualdad $2x - y \leq 6$.
16. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

17. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$x - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 11$$
$$-y + 4z = 7$$

18. Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

19. Divida $(2x^3 - 9x + 15) \div (x - 6)$.
20. Factorice $64x^3 - 27y^3$.