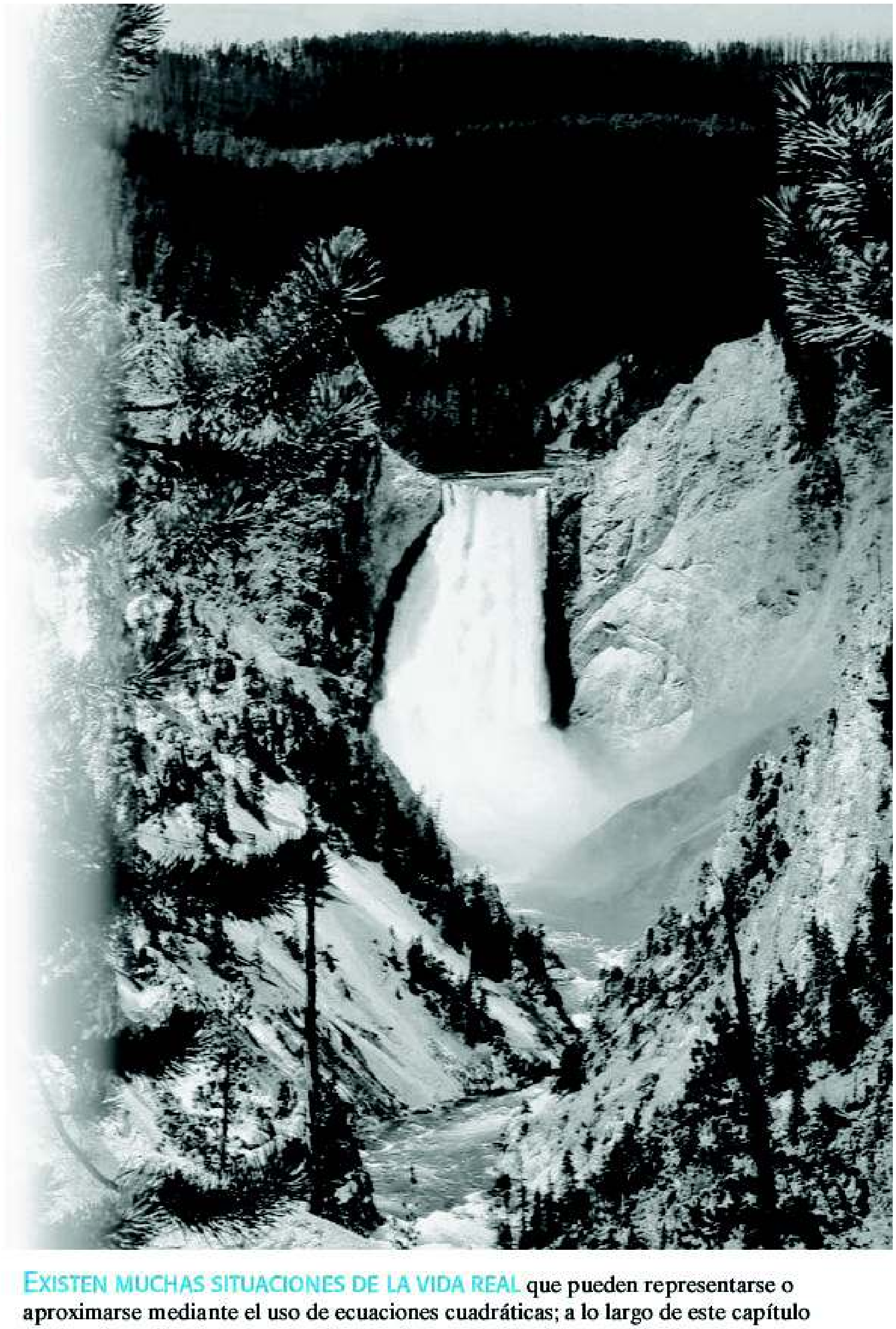
8 Funciones cuadráticas



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

En la sección 5.1 presentamos las funciones cuadráticas; ahora ampliaremos los conceptos correspondientes. Explicaremos cómo completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Después de estudiar estas secciones, conoceremos tres técnicas para la resolución de ecuaciones cuadráticas: factorización (cuando esto sea posible), completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Además, analizaremos técnicas para representar gráficamente funciones cuadráticas y desigualdades no lineales con una variable.

EXISTEN MUCHAS SITUACIONES DE LA VIDA REAL que pueden representarse o aproximarse mediante el uso de ecuaciones cuadráticas; a lo largo de este capítulo verá varias aplicaciones reales de ecuaciones y de funciones cuadráticas. Por ejemplo, en los ejercicios 101 y 102 de la página 538 utilizaremos las ecuaciones cuadráticas y la fórmula cuadrática para determinar el tiempo que tarda en caer una gota de agua desde lo alto de una cascada hasta llegar a la parte inferior de la misma.

8.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

1. Usar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones.
2. Entender los trinomios cuadrados perfectos.
3. Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado.

En esta sección se presentarán dos nuevos conceptos, la propiedad de la raíz cuadrada y cómo completar el cuadrado. La propiedad de la raíz cuadrada se utilizará en varias secciones de este libro.

En la sección 5.8 resolvimos ecuaciones cuadráticas, o de segundo grado, mediante la factorización. Las ecuaciones cuadráticas que no se pueden resolver mediante factorización, pueden solucionarse completando el cuadrado, o mediante la fórmula cuadrática que se presenta en la sección 8.2.

1 Usar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones

En la sección 7.1 se dijo que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Hasta ahora sólo hemos utilizado la raíz cuadrada positiva. En esta sección utilizaremos ambas, tanto la raíz cuadrada positiva como la raíz cuadrada negativa de un número.

Raíz cuadrada positiva de 25	Raíz cuadrada negativa de 25
$\sqrt{25} = 5$	$-\sqrt{25} = -5$

Una manera práctica de indicar las dos raíces cuadradas de un número es utilizando el símbolo más o menos, $\pm$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 25 pueden indicarse mediante ± 5, expresión que se lee "más, menos 5". La ecuación $x^2 = 25$, tiene dos soluciones: las dos raíces cuadradas de 25, que son ± 5. Si verifica cada raíz, verá que ambos valores satisfacen la ecuación. Puede utilizarse la **propiedad de la raíz cuadrada** para determinar las soluciones de ecuaciones con la forma $x^2 = a$.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

EJEMPLO 1 Sume 9 a ambos lados de la ecuación para aislar la variable.

a) $x^2 - 9 = 0$ **b)** $x^2 + 10 = 85$

Solución

a) Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 && \text{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{9} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm 3 \end{aligned}$$

Compruebe las soluciones en la ecuación original.

$x = 3$	$x = 3$
$x^2 - 9 = 0$	$x^2 - 9 = 0$
$3^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	$(-3)^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ Verdadero	$0 = 0$ Verdadero

En ambos casos la comprobación nos da un resultado verdadero, lo que significa que tanto 3 como -3 son soluciones de la ecuación.

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 10 &= 85 \\ x^2 &= 75 && \text{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{75} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm\sqrt{25}\sqrt{3} && \text{Simplificar.} \\ &= \pm 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Las soluciones son $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones reales, como se ilustra en el ejemplo 2:

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $x^2 + 7 = 0$.

Solución

$$\begin{aligned} x^2 + 7 &= 0 \\ x^2 &= -7 && \text{Aislar la variable.} \\ x &= \pm\sqrt{-7} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ &= \pm i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las soluciones son $i\sqrt{7}$ y $-i\sqrt{7}$, ambos son números imaginarios.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 3 Resuelva **a)** $(a - 5)^2 = 32$ **b)** $(z + 3)^2 + 28 = 0$.

Solución

a) Como el término que incluye la variable ya está aislado, empiece usando la propiedad de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} (a - 5)^2 &= 32 \\ a - 5 &= \pm\sqrt{32} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ a &= 5 \pm \sqrt{32} && \text{Sumar cinco a ambos lados.} \\ &= 5 \pm \sqrt{16}\sqrt{2} && \text{Simplificar.} \\ &= 5 \pm 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Las soluciones son $5 + 4\sqrt{2}$ y $5 - 4\sqrt{2}$.

b) Inicie restando 28 en ambos lados de la ecuación para aislar el término que contiene la variable.

$$\begin{aligned} (z + 3)^2 + 28 &= 0 \\ (z + 3)^2 &= -28 \end{aligned}$$

Ahora utilice la propiedad de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} z + 3 &= \pm\sqrt{-28} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ z &= -3 \pm \sqrt{-28} && \text{Restar 3 de ambos lados.} \\ &= -3 \pm \sqrt{28}\sqrt{-1} \\ &= -3 \pm i\sqrt{4}\sqrt{7} && \text{Simplificar } \sqrt{28} \text{ y reemplazar } \sqrt{-1} \text{ con } i. \\ &= -3 \pm 2i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las soluciones son $-3 + 2i\sqrt{7}$ y $-3 - 2i\sqrt{7}$. Observe que las soluciones a la ecuación $(z + 3)^2 + 28 = 0$ no son números reales, sino números complejos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

2 Entender los trinomios cuadrados perfectos

Ahora que conocemos la propiedad de la raíz cuadrada, podemos centrar nuestra atención en la técnica para completar el cuadrado. Para entender este procedimiento es necesario que sepa cómo formar trinomios cuadrados perfectos, información que se presentó en la sección 5.6. Recuerde que un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio. A continuación se ofrecen algunos ejemplos.

Trinomios cuadrados perfectos		Factores		Cuadrado de un binomio
$x^2 + 8x + 16$	=	$(x + 4)(x + 4)$	=	$(x + 4)^2$
$x^2 - 8x + 16$	=	$(x - 4)(x - 4)$	=	$(x - 4)^2$
$x^2 + 10x + 25$	=	$(x + 5)(x + 5)$	=	$(x + 5)^2$
$x^2 - 10x + 25$	=	$(x - 5)(x - 5)$	=	$(x - 5)^2$

En un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1, existe una relación entre el coeficiente del término de primer grado y el término constante. En tales trinomios el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.

Examinemos algunos trinomios cuadrados perfectos para los que el coeficiente principal sea 1.

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(8)\right]^2 = (4)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(-10)\right]^2 = (-5)^2$$

Cuando un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1 se escribe como el cuadrado de un binomio, la constante del binomio es la mitad del coeficiente del término de primer grado del trinomio. Por ejemplo,

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(8)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(-10)$$

3 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Ahora analizaremos la técnica para completar el cuadrado. Para resolver una ecuación cuadrática **completando el cuadrado** sumamos una constante en ambos lados de la ecuación, de modo que el trinomio restante sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación resultante. Ahora resumiremos el procedimiento.

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Si es necesario, utilice la propiedad de la multiplicación (o división) de la igualdad para hacer que el coeficiente principal sea 1.
2. Reescriba la ecuación aislando la constante en el lado derecho.
3. Tome la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, elévela al cuadrado y sume la cantidad resultante en ambos lados de la ecuación.
4. Reemplace el trinomio cuadrado perfecto con el cuadrado de un binomio.
5. Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
6. Despeje la variable.
7. Compruebe sus soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Como el coeficiente principal es 1, el paso uno ya no es necesario.

Paso 2: Pase la constante, 5, al lado derecho de la ecuación, restando 5 en ambos lados de la misma.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 6x = -5$$

Paso 3: Determine el cuadrado de la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, 6.

$$\frac{1}{2}(6) = 3, \qquad 3^2 = 9$$

Sume este valor en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$
$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

Paso 4: Siguiendo este procedimiento producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x + 3)^2$.

$\frac{1}{2}$ el coeficiente numérico del término de primer grado es $\frac{1}{2}(6) = +3$.

$$(x + 3)^2 = 4$$

Paso 5: Utilice la propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 3 = \pm 2$$

Paso 6: Por último, despeje x restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$x + 3 - 3 = -3 \pm 2$$
$$x = -3 \pm 2$$
$$x = -3 + 2 \quad \text{o} \quad x = -3 - 2$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = -5$$

Paso 7: Compruebe ambas soluciones en la ecuación original.

$x = -1$	$x = -5$
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$x^2 + 6x + 5 = 0$
$(-1)^2 + 6(-1) + 5 \stackrel{?}{=} 0$	$(-5)^2 + 6(-5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$
$1 - 6 + 5 \stackrel{?}{=} 0$	$25 - 30 + 5 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ Verdadero	$0 = 0$ Verdadero

Cómo ambos números cumplen, tanto -1 como -5 son soluciones de la ecuación original.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

Sugerencia útil

Cuando resolvemos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ completando el cuadrado, obtenemos $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ en el lado izquierdo y una constante en el lado derecho de la ecuación. Luego reemplazamos $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ con $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. En la figura que sigue mostramos por qué

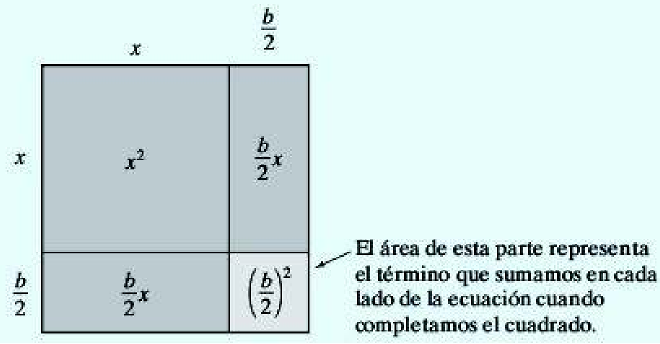
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

La figura es un cuadrado con lados de longitud $x + \frac{b}{2}$. Por lo tanto, el área es $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. El área del cuadrado también puede determinarse sumando las áreas de las cuatro secciones, como sigue:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

(*continúa en la página siguiente*)

Al comparar las áreas, vemos que $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.



EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $-x^2 = -3x - 18$ completando el cuadrado.

Solución El coeficiente numérico del término elevado al cuadrado debe ser 1, no -1. Por lo tanto, empiece multiplicando ambos lados de la ecuación por -1, para hacer que el coeficiente del término al cuadrado sea igual a 1.

$$-x^2 = -3x - 18$$
$$-1(-x^2) = -1(-3x - 18)$$
$$x^2 = 3x + 18$$

Ahora pase todos los términos, excepto la constante, al lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 - 3x = 18$$

Tome la mitad del coeficiente numérico del término x, elévela al cuadrado y sume el producto en ambos lados de la ecuación. Luego rescriba el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4} \qquad \text{Completar el cuadrado.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{9}{4} \qquad \text{Reescribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{72}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \qquad \text{Sumar } \frac{3}{2} \text{ en ambos lados.}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \qquad x = -\frac{6}{2} = -3$$

Las soluciones son 6 y -3.

Ahora resuelva el ejercicio 53

En los ejemplos siguientes se pasarán por alto algunos de los pasos intermedios.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $x^2 - 8x + 34 = 0$.

Solución

$$x^2 - 8x + 34 = 0$$

$$x^2 - 8x = -34 \quad \text{Pasar el término constante al lado derecho.}$$

$$x^2 - 8x + 16 = -34 + 16 \quad \text{Completar el cuadrado.}$$

$$(x - 4)^2 = -18 \quad \text{Escribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{-18} \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x - 4 = \pm 3i\sqrt{2} \quad \text{Simplificar.}$$

$$x = 4 \pm 3i\sqrt{2} \quad \text{Despejar } x.$$

Las soluciones son $4 + 3i\sqrt{2}$ y $4 - 3i\sqrt{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $-4m^2 + 8m + 32 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$-4m^2 + 8m + 32 = 0$$

$$-\frac{1}{4}(-4m^2 + 8m + 32) = -\frac{1}{4}(0) \quad \text{Multiplicar por } -\frac{1}{4} \text{ para obtener un coeficiente principal de 1.}$$

$$m^2 - 2m - 8 = 0$$

Ahora procedemos como antes.

$$m^2 - 2m = 8 \quad \text{Pasar el término constante al lado derecho.}$$

$$m^2 - 2m + 1 = 8 + 1 \quad \text{Completar el cuadrado.}$$

$$(m - 1)^2 = 9 \quad \text{Escribir el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$

$$m - 1 = \pm 3 \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$m = 1 \pm 3 \quad \text{Despejar } m.$$

$$m = 1 + 3 \quad \text{o} \quad m = 1 - 3$$

$$m = 4 \qquad\qquad m = -2$$

Ahora resuelva el ejercicio 75

Si se le pidiera resolver la ecuación $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 8 = 0$ completando el cuadrado, ¿qué haría primero? Si respondió, "Multiplicar ambos lados de la ecuación por -4 para hacer que el coeficiente principal sea igual a 1", su contestación es correcta. Para resolver la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 5 = 0$, multiplicaría antes ambos lados de la ecuación por $\frac{3}{2}$ para obtener un coeficiente principal de 1.

Por lo general, las ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse con facilidad por medio de factorización se resolverán mediante la *fórmula cuadrática* que se presentará en la próxima sección. No obstante, hemos presentado el procedimiento para completar el cuadrado porque lo utilizaremos para deducir la fórmula cuadrática en la sección 8.2. Además, utilizaremos este concepto más adelante en este mismo capítulo y en un capítulo posterior.

EJEMPLO 8 ▸ **Interés compuesto** La fórmula para calcular el interés compuesto: $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ puede usarse para determinar el monto, A, cuando un capital inicial, p, se invierte a una tasa de interés anual, r, capitalizable n veces en un año durante t años.

a) En un principio, Josh Adams invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga una vez al año. Si después de dos años el monto, o saldo, en la cuenta es de \$1102.50, determine la tasa de interés anual, r.

b) Trisha McDowel invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga trimestralmente. Si después de 3 años el monto en la cuenta es de \$1195.62, determine la tasa de interés anual, r.

Solución **a)** Entienda el problema Se nos ha dado la siguiente información:

$$p = \$1000, \quad A = \$1102.50, \quad n = 1, \quad t = 2$$

Se nos pide determinar la tasa anual, r. Para hacerlo, sustituimos los valores apropiados en la fórmula y despejamos r.

Traduzca

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1102.50 = 1000\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{1(2)}$$

Realice los cálculos

$$1102.50 = 1000(1 + r)^2$$

$$1.10250 = (1 + r)^2 \qquad \textit{Dividir ambos lados entre 1000.}$$

$$\sqrt{1.10250} = 1 + r \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada; usar la raíz principal, ya que } r \textit{ debe ser positiva.}$$

$$1.05 = 1 + r$$

$$0.05 = r \qquad \textit{Restar 1 en ambos lados de la ecuación.}$$

Responda La tasa de interés anual es de 0.05 o 5%.

b) Entienda el problema Se nos dieron estos datos:

$$p = 1000, \quad A = \$1195.62, \quad n = 4, \quad t = 3$$

Para determinar r sustituimos los valores apropiados en la fórmula, y despejamos r.

Traduzca

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1195.62 = 1000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)}$$

$$1.19562 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} \qquad \textit{Divida ambos lados entre 1000.}$$

Realice los cálculos

$$\sqrt[12]{1.19562} = 1 + \frac{r}{4} \qquad \textit{Sacar la raíz 12 en ambos lados (o elevar ambos lados a la potencia 1/12).}$$

$$1.015 \approx 1 + \frac{r}{4} \qquad \textit{Aproximar } \sqrt[12]{1.19562} \textit{ con ayuda de una calculadora.}$$

$$0.015 \approx \frac{r}{4} \qquad \textit{Restar 1 en ambos lados de la ecuación.}$$

$$0.06 \approx r \qquad \textit{Multiplicar ambos lados por 4.}$$

Responda La tasa de interés anual es, aproximadamente, de 0.06 o 6%.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En este capítulo trabajaremos con raíces y radicales. Este material se estudió en el capítulo 7. Si no recuerda cómo evaluar o simplificar radicales, repáselo ahora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Escriba las dos raíces cuadradas de 36.
2. Escriba las dos raíces cuadradas de 17.
3. Escriba la propiedad de la raíz cuadrada.
4. ¿Cuál es el primer paso para completar el cuadrado?
5. Explique cómo determinar si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.
6. Escriba un párrafo en el que explique cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.
7. a) ¿$x = 4$ es la solución de $x - 4 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.
   b) ¿$x = 2$ es la solución de $x^2 - 4 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.
8. a) ¿$x = -7$ es la solución de $x + 7 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.
   b) ¿$x = \pm\sqrt{7}$ es solución de $x^2 + 7 = 0$? Si no, ¿cuál es la solución correcta? Explique.
9. De acuerdo con el método de completar el cuadrado, ¿cuál es el primer paso para resolver la ecuación $2x^2 + 3x = 9$? Explique.
10. De acuerdo con el método de completar el cuadrado, ¿cuál es el primer paso para resolver la ecuación $\frac{1}{7}x^2 + 12x = -4$? Explique.
11. Cuando se resuelve la ecuación $x^2 - 6x = 17$ completando el cuadrado, ¿qué número sumamos en ambos lados de la ecuación? Explique.
12. Cuando se resuelve la ecuación $x^2 + 10x = 39$ completando el cuadrado, ¿qué número sumamos en ambos lados de la ecuación? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

13. $x^2 - 25 = 0$
14. $x^2 - 49 = 0$
15. $x^2 + 49 = 0$
16. $x^2 - 24 = 0$
17. $x^2 + 24 = 0$
18. $y^2 - 10 = 51$
19. $y^2 + 10 = -51$
20. $(x - 3)^2 = 49$
21. $(p - 4)^2 = 16$
22. $(x + 3)^2 = 49$
23. $(x + 3)^2 + 25 = 0$
24. $(a - 3)^2 = 45$
25. $(a - 2)^2 + 45 = 0$
26. $(a + 2)^2 + 45 = 0$
27. $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
28. $\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
29. $\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} = 0$
30. $(x - 0.2)^2 = 0.64$
31. $(x + 0.8)^2 = 0.81$
32. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$
33. $(2a - 5)^2 = 18$
34. $(4y + 1)^2 = 12$
35. $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}$
36. $\left(3x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$

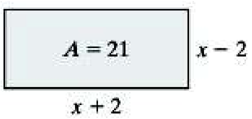
Resuelva cada ecuación por el método de completar el cuadrado.

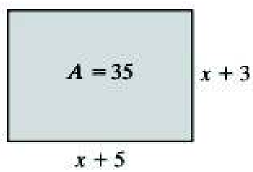
37. $x^2 + 3x - 4 = 0$
38. $x^2 - 3x - 4 = 0$
39. $x^2 + 8x + 15 = 0$
40. $x^2 - 8x + 15 = 0$
41. $x^2 + 6x + 8 = 0$
42. $x^2 - 6x + 8 = 0$
43. $x^2 - 7x + 6 = 0$
44. $x^2 + 9x + 18 = 0$
45. $2x^2 + x - 1 = 0$
46. $3c^2 - 4c - 4 = 0$
47. $2z^2 - 7z - 4 = 0$
48. $4a^2 + 9a = 9$
49. $x^2 - 13x + 40 = 0$
50. $x^2 + x - 12 = 0$
51. $-x^2 + 6x + 7 = 0$
52. $-a^2 - 5a + 14 = 0$
53. $-z^2 + 9z - 20 = 0$
54. $-z^2 - 4z + 12 = 0$
55. $b^2 = 3b + 28$
56. $-x^2 = 6x - 27$
57. $x^2 + 10x = 11$
58. $-x^2 + 40 = -3x$
59. $x^2 - 4x - 10 = 0$
60. $x^2 - 6x + 2 = 0$
61. $r^2 + 8r + 5 = 0$
62. $a^2 + 4a - 8 = 0$
63. $c^2 - c - 3 = 0$
64. $p^2 - 5p = 4$
65. $x^2 + 3x + 6 = 0$
66. $z^2 - 5z + 7 = 0$
67. $9x^2 - 9x = 0$
68. $4y^2 + 12y = 0$
69. $-\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{2}b = 0$
70. $\frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{3}a = 0$
71. $36z^2 - 6z = 0$
72. $x^2 = \frac{9}{2}x$

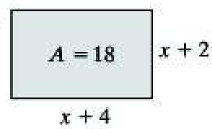
73. $-\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{3}{2} = 0$
74. $2x^2 + 6x = 20$
75. $2x^2 = 8x + 64$
76. $3x^2 + 33x + 72 = 0$
77. $2x^2 + 18x + 4 = 0$
78. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$
79. $\frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$
80. $\frac{3}{4}c^2 - 2c + 1 = 0$
81. $2x^2 - x = -5$
82. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$
83. $-3x^2 + 6x = 6$
84. $x^2 + 2x = -5$

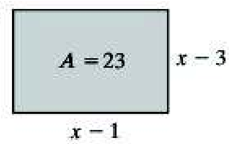
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85 a 88 se da el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escriba una ecuación para determinar el área.* **b)** *Despeje x en la ecuación.*

85.


86.


87.


88.


89. **Distancia necesaria para detenerse en la nieve** La fórmula para calcular la distancia, d en pies, necesaria para detener un automóvil específico sobre una superficie con nieve es $d = \frac{1}{6}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 150 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

90. **Distancia necesaria para detenerse en el pavimento seco** La fórmula para calcular la distancia, d en pies, necesaria para detener un automóvil específico sobre una superficie de pavimento seco es $d = \frac{1}{10}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 40 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

91. **Enteros** El producto de dos enteros impares consecutivos es 35. Determine cuáles son esos dos enteros impares.

92. **Enteros** El más grande de dos enteros es 2 unidades mayor que el doble del más pequeño. Si el producto de ambos enteros es 12, determine ambos números.

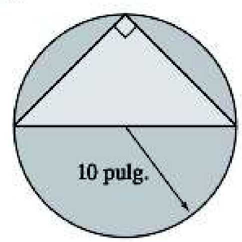
93. **Jardín rectangular** Donna Simm delimitó un área de su jardín para dedicarla a plantar tomates. Determine las dimensiones del área rectangular, si el largo es 2 pies mayor que el doble del ancho, y el área mide 60 pies cuadrados.

94. **Entrada de cochera** Manuel Cortez planea asfaltar la entrada de su cochera. Determine las dimensiones de la entrada rectangular, si su área es de 381.25 pies cuadrados y el largo es 18 pies mayor que su ancho.

95. **Patio** Bill Justice diseña un patio, cuya diagonal es 6 pies mayor que el largo de un lado. Determine las dimensiones del patio.

96. **Piscina para niños** Un hotel planea construir una piscina poco profunda para niños. Si la piscina será un cuadrado cuya diagonal mide 7 pies más que un lado, determine las dimensiones de la piscina.

97. **Triángulo inscrito** Cuando se inscribe un triángulo en un semicírculo, donde el diámetro del círculo es un lado del triángulo, éste siempre es un triángulo rectángulo. Si un triángulo isósceles (dos lados iguales) se inscribe en un semicírculo con radio de 10 pulgadas, determine la longitud de los otros dos lados del triángulo.



98. **Triángulo inscrito** Consulte el ejercicio 97. Suponga que un triángulo está inscrito en un semicírculo, cuyo diámetro es de 12 metros. Si un lado del triángulo inscrito es de 6 metros, determine cuánto mide el tercer lado.

99. **Área de un círculo** El área de un círculo es de 24π pies cuadrados. Utilice la fórmula $A = \pi r^2$ para determinar el radio del círculo.

100. **Área de un círculo** El área de un círculo es 16.4π metros cuadrados. Determine el radio del círculo.

Para responder los ejercicios 101 a 104, utilice la fórmula $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

101. **Cuenta de ahorros** Frank Dipalo invirtió \$500 en principio en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza anualmente. Si después de 2 años el saldo de la cuenta es de \$540.80, determine la tasa de interés anual.

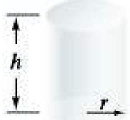
102. **Cuenta de ahorros** Margret Chang invirtió inicialmente \$1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada año. Si después de 2 años el saldo de la cuenta es de \$1102.50, determine la tasa de interés anual.

103. **Cuenta de ahorros** Steve Rodi invirtió \$1200 como base en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza semestralmente. Si después de 3 años el saldo de la cuenta es de \$1432.86, determine la tasa de interés anual.

104. **Cuenta de ahorros** Angela Reyes invirtió \$1500 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada semestre. Si después de 4 años el saldo de la cuenta es de \$2052.85, determine la tasa de interés anual.

105. Volumen y área de la superficie El área de la superficie, S, y el volumen, V, de un cilindro circular recto de radio, r, y altura, h, están dados por las fórmulas

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \quad V = \pi r^2 h$$



a) Determine el área de la superficie del cilindro, si su altura es de 10 pulgadas y su volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

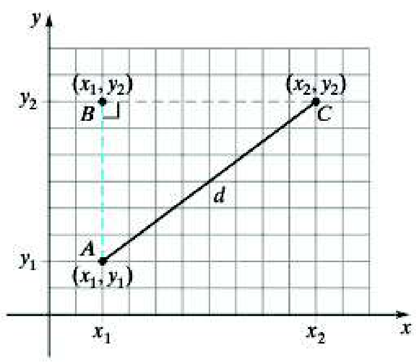
b) Determine el radio si la altura es de 10 pulgadas y el volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

c) Determine el radio si la altura es de 10 pulgadas y el área de la superficie es de 160 pulgadas cuadradas.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 106.

106. En la cuadrícula siguiente se señalan los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_1, y_2).



a) Explique por qué el punto (x_1, y_2) se colocó donde está, y no en algún otro lugar de la gráfica.

b) Exprese la longitud de la recta punteada en color rojo en términos de y_2 y y_1. Explique cómo determinó su respuesta.

c) Exprese la longitud de la recta punteada en color gris en términos de x_2 y x_1. Explique cómo determinó su respuesta.

d) Mediante el teorema de Pitágoras y el triángulo rectángulo ABC, deduzca una fórmula para determinar la distancia, d, entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).* Explique cómo determinó la fórmula.

e) Utilice la fórmula que determinó en la parte **d)** para calcular la distancia del segmento de recta entre los puntos $(1, 4)$ y $(3, 7)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **107.** Resuelva $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$.

[2.4] **108. Inversión** Thea Prettyman invirtió \$10,000 durante un año, parte a 7% y parte a $6\frac{1}{4}$%. Si ganó un interés total de \$656.50, ¿qué cantidad invirtió en cada tasa?

[2.6] **109.** Resuelva $|x + 3| = |2x - 7|$.

[3.4] **110.** Determine la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(0, 5)$.

[5.2] **111.** Multiplique $(x - 2)(4x^2 + 9x - 3)$.

8.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática

1 Deducir la fórmula cuadrática.

2 Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones.

3 Escribir una ecuación cuadrática dadas sus soluciones.

4 Usar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática.

5 Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas.

1 Deducir la fórmula cuadrática

La fórmula cuadrática puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática. De hecho, *es el método más útil y versátil para resolver ecuaciones cuadráticas*. Por su eficiencia, por lo general se le utiliza en lugar del método de completar el cuadrado.

La forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Forma general de la ecuación cuadrática	Valores de los coeficientes		
$x^2 - 3x + 4 = 0$	$a = 1,$	$b = -3,$	$c = 4$
$1.3x^2 - 7.9 = 0$	$a = 1.3,$	$b = 0,$	$c = -7.9$
$-\frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{8}x = 0$	$a = -\frac{5}{6},$	$b = \frac{3}{8},$	$c = 0$

*La fórmula para calcular la distancia se estudiará en un capítulo posterior.

Podemos deducir la fórmula cuadrática empezando con una ecuación cuadrática dada en la forma general y completando el cuadrado, como se estudió en la sección anterior.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$ *Dividir ambos lados entre a.*

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$ *Restar c/a en ambos lados.*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$ *Tomar 1/2 de b/a (esto es, b/2a), y elevarlo al cuadrado para obtener $b^2/4a^2$. Luego sumar esta expresión en ambos lados.*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$ *Reescribir el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ *Escribir el lado derecho con un denominador común.*

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ *Propiedad de la raíz cuadrada.*

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ *Regla del cociente para radicales.*

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ *Restar b/2a en ambos lados.*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ *Escribir con un denominador común para obtener la fórmula cuadrática.*

2 Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones

Ahora que ya sabemos cómo deducir la fórmula cuadrática, la utilizaremos para resolver ecuaciones.

Para resolver una ecuación mediante la fórmula cuadrática

1. Escriba la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determine los valores numéricos de a, b y c.
2. Sustituya a, b y c con los valores correspondientes en la fórmula cuadrática, y luego evalúe la fórmula para obtener la solución.

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución En esta ecuación $a = 1, b = 2$ y $c = -8$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2+6}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-2-6}{2}$$
$$x = \frac{4}{2} = 2 \qquad x = \frac{-8}{2} = -4$$

Una comprobación mostrará que tanto 2 como -4 son soluciones para la ecuación. Observe que las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ son dos números reales.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

La solución del ejemplo 1 también podría haberse obtenido mediante la factorización, como se ilustra a continuación.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x+4)(x-2) &= 0 \\ x + 4 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 2 = 0 \\ x = -4 \quad & \quad\ \ x = 2 \end{aligned}$$

Cuando tenga que resolver una ecuación cuadrática sin especificar el método para hacerlo, primero trate, mediante factorización (como se estudió en la sección 5.8). Si la ecuación no se puede factorizar con facilidad, utilice la fórmula cuadrática.

Al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, los cálculos pueden ser más sencillos si el coeficiente principal, a, es positivo. Por lo tanto, si tuviera que resolver una ecuación cuadrática como $-x^2 + 3x = 2$, sería recomendable que la reescribiera como $x^2 - 3x + 2 = 0$.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva $-9x^2 = -6x + 1$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución Empiece sumando $9x^2$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$0 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$\text{o} \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$a = 9, \quad b = -6, \quad c = 1$$
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(1)}}{2(9)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Observe que la solución de la ecuación $-9x^2 = -6x + 1$ es un solo valor, $\frac{1}{3}$. Algunas ecuaciones cuadráticas tienen como solución un solo valor. Esto sucede cuando $b^2 - 4ac = 0$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

Cómo evitar errores comunes

Todo el numerador de la fórmula cuadrática debe dividirse entre $2a$.

CORRECTO	INCORRECTO
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\cancel{x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$
	$\cancel{x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la ecuación $p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6} = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución No se preocupe por el cambio de la variable. La fórmula cuadrática se utiliza exactamente igual a como se hace cuando la variable es x.

Podríamos resolver esta ecuación mediante la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$ y $c = \frac{5}{6}$. Sin embargo, cuando una ecuación cuadrática tiene fracciones, casi siempre es más fácil empezar multiplicando ambos lados de la misma por el mínimo común denominador. En este ejemplo, el mínimo común denominador es 6.

$$6\left(p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6}\right) = 6(0)$$
$$6p^2 + 2p + 5 = 0$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = 2$ y $c = 5$.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(5)}}{2(6)} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-116}}{12} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}\sqrt{29}}{12} \\
&= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{29}}{12} \\
&= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm i\sqrt{29})}{\underset{6}{\cancel{12}}} \\
&= \frac{-1 \pm i\sqrt{29}}{6}
\end{aligned}$$

Las soluciones son $\dfrac{-1 + i\sqrt{29}}{6}$ y $\dfrac{-1 - i\sqrt{29}}{6}$. Observe que ninguna de estas soluciones es un número real; ambas son números complejos.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 53

Cómo evitar errores comunes

Algunos estudiantes aplican correctamente la fórmula cuadrática, pero al llegar al último paso cometen un error. A continuación se ilustra este problema con los procedimientos correctos e incorrectos, para una respuesta sencilla.

Cuando *ambos* términos del numerador *y* el denominador tienen un factor común, se puede dividir entre ese factor común, como sigue:

CORRECTO

$$\frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(1 + 2\sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}(2 + \sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

Los siguientes son algunos errores comunes. Estúdielos con cuidado para no cometerlos. ¿Puede explicar por qué cada uno de los procedimientos siguientes es incorrecto?

INCORRECTO

$$\frac{2 + 3}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} + 3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$\frac{3 + \sqrt{6}}{2} = \frac{3 + \sqrt{\cancel{6}^{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{4 + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} + 3\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

Observe que $(2 + 3)/2$ se simplifica a $5/2$. Sin embargo, $(3 + 2\sqrt{5})/2$, $(3 + \sqrt{6})/2$, y $(4 + 3\sqrt{5})/2$ no pueden simplificarse más.

EJEMPLO 4 ▸ Dada $f(x) = 2x^2 + 4x$, determine todos los valores reales de x para los que $f(x) = 5$.

Solución Queremos determinar todos los valores reales de x para los que

$$2x^2 + 4x = 5$$

Para resolver esta ecuación, podemos utilizar la fórmula cuadrática. Primero, escriba la ecuación en la forma general.

$$2x^2 + 4x - 5 = 0$$

Ahora utilice la fórmula cuadrática con $a = 2, b = 4$ y $c = -5$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{4} \end{aligned}$$

Luego factorice el 2 de ambos términos del numerador y divida entre el factor común.

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-2 \pm \sqrt{14})}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}\,^{*}$$

Así, las soluciones son $\dfrac{-2 + \sqrt{14}}{2}$ y $\dfrac{-2 - \sqrt{14}}{2}$.

Observe que la expresión del ejemplo 4, $2x^2 + 4x - 5$, no es factorizable. Por lo tanto, el ejemplo 4 no podría resolverse mediante factorización.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

Si todos los coeficientes numéricos de una ecuación cuadrática tienen un factor común, debe factorizarlo antes de utilizar la fórmula cuadrática. Por ejemplo, considere la ecuación $3x^2 + 12x + 3 = 0$. Aquí, $a = 3$, $b = 12$ y $c = 3$. Si utilizamos la fórmula cuadrática, a la larga obtendríamos como soluciones $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Al factorizar la ecuación antes de utilizar la fórmula, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x + 3 &= 0 \\ 3(x^2 + 4x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si consideramos $x^2 + 4x + 1 = 0$, entonces $a = 1, b = 4$ y $c = 1$. Si usamos estos nuevos valores de a, b y c en la fórmula cuadrática, obtendremos soluciones idénticas, $x = -2 \pm \sqrt{3}$. Sin embargo, los valores más pequeños de a, b y c permiten que los cálculos sean más simples. Resuelva ambas ecuaciones mediante la fórmula cuadrática para corroborar lo anterior.

3 Escribir una ecuación cuadrática dadas sus soluciones

Si nos dan las soluciones, podemos deducir la ecuación correspondiente siguiendo el procedimiento a la inversa. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 ▸ Escriba una ecuación que tenga las soluciones siguientes:

a) -5 y 1 **b)** $3 + 2i$ y $3 - 2i$

Solución

a) Si las soluciones son -5 y 1, escribimos

$$\begin{aligned} x = -5 \quad &\text{o} \quad x = 1 \\ x + 5 = 0 \quad &\quad\;\; x - 1 = 0 && \textit{Igualar las ecuaciones a 0.} \\ (x + 5)(x - 1) &= 0 && \textit{Propiedad del factor nulo.} \\ x^2 - x + 5x - 5 &= 0 && \textit{Multiplicar los factores.} \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 && \textit{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$

*En la sección de respuestas, las soluciones se darán en esta forma.

Así, la ecuación es $x^2 + 4x - 5 = 0$. Muchas otras ecuaciones tienen soluciones -5 y 1. De hecho, cualquier ecuación de la forma $k(x^2 + 4x - 5) = 0$, donde k es una constante, tiene esas soluciones. ¿Puede explicar por qué?

b) $x = 3 + 2i \quad$ o $\quad x = 3 - 2i$

$x - (3 + 2i) = 0 \qquad x - (3 - 2i) = 0$ Igualar las ecuaciones a 0.

$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = 0$ Propiedad del factor nulo.

$x \cdot x - x(3 - 2i) - x(3 + 2i) + (3 + 2i)(3 - 2i) = 0$ Multiplicar.

$x^2 - 3x + 2xi - 3x - 2xi + (9 - 4i^2) = 0$ Propiedad distributiva; multiplicar.

$x^2 - 6x + 9 - 4i^2 = 0$ Reducir términos semejantes.

$x^2 - 6x + 9 - 4(-1) = 0$ Sustituir $i^2 = -1$.

$x^2 - 6x + 13 = 0$ Simplificar.

La ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene las soluciones complejas $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

En el ejemplo 5 **a)**, determinamos que la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ tiene las soluciones -5 y 1. Considere la gráfica de $f(x) = x^2 + 4x - 5$. La intersección con el eje x de la gráfica de $f(x)$ ocurre cuando $f(x) = 0$ o cuando $x^2 + 4x - 5 = 0$. Por lo tanto, las intersecciones x de la gráfica $f(x) = x^2 + 4x - 5$ son $(-5, 0)$ y $(1, 0)$, como se muestra en la **figura 8.1**. En el ejemplo 5 **b)**, determinamos que la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ no tiene soluciones reales. Así, la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 13$ no tiene intersección con el eje x. La gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 13$ se muestra en la **figura 8.2**.

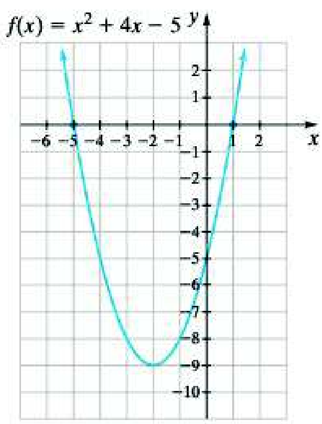


FIGURA 8.1

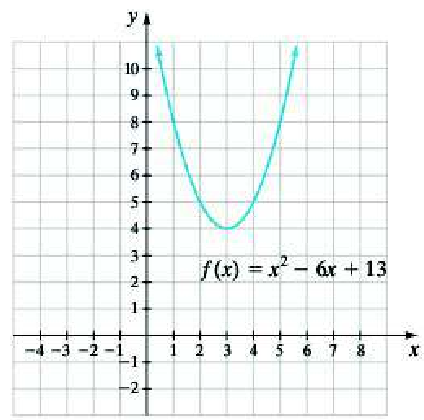


FIGURA 8.2

4 Usar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática

La expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante**.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{discriminante}}$$

El discriminante proporciona información para determinar el número y la clase de soluciones de una ecuación cuadrática.

Soluciones de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

EJEMPLO 6

a) Determine el discriminante de la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación dada?

c) Utilice la fórmula cuadrática para determinar la solución o las soluciones.

Solución

a) $a = 1, \quad b = -8, \quad c = 16$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-8)^2 - 4(1)(16) \\ &= 64 - 64 = 0 \end{aligned}$$

b) Como el discriminante es igual a 0, sólo hay una solución real.

c)
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

La única solución es 4.

Ahora resuelva el ejercicio 9

EJEMPLO 7 Sin proporcionar las soluciones, determine si las ecuaciones siguientes tienen dos soluciones reales y distintas, una solución real o ninguna solución real.

a) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **b)** $x^2 - 5x - 3 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x = -9$

Solución Utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

a) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(6) = 16 - 48 = -32$

Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

b) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37$

Como el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

c) Primero reescriba $4x^2 - 12x = -9$ como $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

Como el discriminante es 0, esta ecuación tiene una sola solución real.

Ahora resuelva el ejercicio 15

El discriminante puede utilizarse para determinar el número de soluciones reales de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Como las intersecciones con el eje x de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, ocurren en donde $f(x) = 0$, el discriminante también puede usarse para determinar el número de intersecciones con el eje x de una función cuadrática. La **figura 8.3** muestra la relación entre el discriminante y el número de intersecciones con el eje x para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $b^2 - 4ac > 0$, $f(x)$ tiene dos intersecciones con el eje x distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, $f(x)$ tiene una sola intersección con el eje x.

Si $b^2 - 4ac < 0$, $f(x)$ no tiene intersecciones con el eje x.

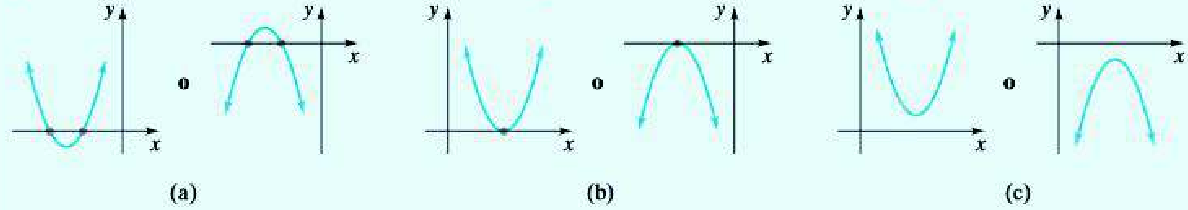


FIGURA 8.3

En la sección 8.5 analizaremos a detalle la graficación de funciones cuadráticas.

5 Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas

Ahora veremos algunos problemas de aplicación que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 8 ▸ **Teléfonos celulares** Mary Olson es propietaria de un negocio que fabrica y vende teléfonos celulares. El ingreso, $R(n)$, de la venta de teléfonos celulares se determina multiplicando el número de teléfonos celulares por el costo por teléfono. Suponga que el ingreso por la venta de n teléfonos celulares, $n \leq 50$, es

$$R(n) = n(50 - 0.2n)$$

donde $(50 - 0.2n)$ es el precio por teléfono celular, en dólares.

a) Determine el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares.

b) Para tener un ingreso de \$480, ¿cuántos teléfonos celulares deben venderse?

Solución **a)** Para determinar el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares, evaluamos la función de ingreso para $n = 30$.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ R(30) &= 30[50 - 0.2(30)] \\ &= 30(50 - 6) \\ &= 30(44) \\ &= 1320 \end{aligned}$$

El ingreso por la venta de 30 teléfonos celulares es de \$1320.

b) *Entienda el problema* Queremos determinar el número de teléfonos celulares que deben venderse para tener un ingreso de \$480. Así, necesitamos hacer $R(n) = 480$ y despejar n.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= 50n - 0.2n^2 \\ 0.2n^2 - 50n + 480 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

Traduzca $a = 0.2, \quad b = -50, \quad c = 480$

$$\begin{aligned} n &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.2)(480)}}{2(0.2)} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 384}}{0.4} \\ &= \frac{50 \pm \sqrt{2116}}{0.4} \\ &= \frac{50 \pm 46}{0.4} \end{aligned}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0.4} = 240 \quad \text{o} \quad n = \frac{50 - 46}{0.4} = 10$$

Responda Como el problema especificó que $n \leq 50$, la única solución aceptable es $n = 10$. Así, para obtener un ingreso de \$480, Mary debe vender 10 teléfonos celulares.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 87

Una fórmula importante en física es $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. Cuando un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial, h_0, con una velocidad inicial v_0, esta fórmula puede usarse para determinar la altura, h, respecto del piso en cualquier instante t. En la fórmula, g es la aceleración provocada por la gravedad. Como la aceleración en la Tierra es de -32 pies/seg^2, en la fórmula utilizamos -32 para g cuando se hable de la Tierra. Esta fórmula también puede usarse para describir la trayectoria de cualquier objeto proyectado en la Luna y en otros planetas, pero el valor de g tendría que cambiarse de acuerdo con la fuerza de gravedad de cada cuerpo celeste. Utilizaremos esta fórmula en el ejemplo 9.

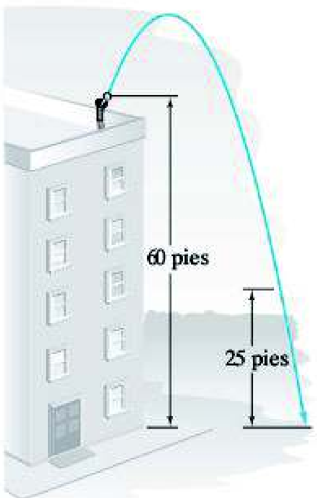


FIGURA 8.4

EJEMPLO 9 ▸ **Lanzamiento de una pelota** Betsy Farber se encuentra parada en la parte superior de un edificio, y lanza una pelota hacia arriba desde una altura de 60 pies, con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Utilice la fórmula $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ para responder las preguntas siguientes.

a) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 25 pies respecto del piso? Redondee la respuesta a la décima más cercana.

b) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo?

Solución **a)** Entienda el problema Ilustraremos este problema con un diagrama (vea la **figura 8.4**). Aquí $g = -32$, $v_0 = 30$ y $h_0 = 60$. Se nos pide determinar el tiempo, t, que tarda la pelota en alcanzar una altura, h, de 25 pies respecto del nivel del piso. Sustituimos estos valores en la fórmula y después despejamos t.

Traduzca

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$25 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realice los cálculos Ahora escribimos la ecuación cuadrática en forma general y despejamos t mediante la fórmula cuadrática.

$$0 = -16t^2 + 30t + 35$$

$$\text{o} \quad -16t^2 + 30t + 35 = 0$$

$$a = -16, \qquad b = 30, \qquad c = 35$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-16)(35)}}{2(-16)}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{3140}}{-32}$$

$$t = \frac{-30 + \sqrt{3140}}{-32} \quad \text{o} \quad t = \frac{-30 - \sqrt{3140}}{-32}$$

$$\approx -0.8 \qquad\qquad \approx 2.7$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 2.7 segundos. Por lo tanto, alrededor de 2.7 segundos después de su lanzamiento, la pelota estará a 25 pies del piso.

b) Entienda el problema Deseamos determinar el momento en que la pelota golpeará el piso. En ese instante, la distancia entre la pelota y el piso es 0. Por lo tanto, sustituimos $h = 0$ en la fórmula y despejamos t.

Traduzca

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$0 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realice los cálculos

$$0 = -16t^2 + 30t + 60$$
$$a = -16, \quad b = 30, \quad c = 60$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-16)(60)}}{2(-16)}$$
$$= \frac{-30 \pm \sqrt{4740}}{-32}$$
$$t = \frac{-30 + \sqrt{4740}}{-32} \quad \text{o} \quad t = \frac{-30 - \sqrt{4740}}{-32}$$
$$\approx -1.2 \qquad\qquad \approx 3.1$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 3.1 segundos. Por lo tanto, la pelota golpea el piso alrededor de 3.1 segundos después de su lanzamiento.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 103

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Escriba la fórmula cuadrática. (Debe memorizarla).
2. Para resolver la ecuación $3x + 2x^2 - 9 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de a, b y c?
3. Para resolver la ecuación $6x - 3x^2 + 8 = 0$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de a, b y c?
4. Para resolver la ecuación $4x^2 - 5x = 7$ mediante la fórmula cuadrática, ¿cuáles son los valores de a, b y c?
5. Considere las dos ecuaciones $-6x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$ y $6x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$. ¿Sus soluciones deben ser iguales? Explique su respuesta.
6. Considere $12x^2 - 15x - 6 = 0$ y $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
   a) ¿Serán iguales las soluciones para las dos ecuaciones? Explique.
   b) Resuelva $12x^2 - 15x - 6 = 0$.
   c) Resuelva $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.
7. **a)** Explique cómo determinar el discriminante.
   b) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación $3x^2 - 6x + 10 = 0$?
   c) Escriba uno o dos párrafos donde explique la relación entre el valor del discriminante y el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática. Aclare *por qué* el valor del discriminante ayuda a establecer el número de soluciones reales.
8. Escriba uno o dos párrafos para explicar la relación entre el valor del discriminante y el número de intersecciones con el eje x de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Explique también cuándo la función tendrá 0, 1 y 2 intersecciones con el eje x.

Práctica de habilidades

Utilice el discriminante para determinar si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o ninguna solución real.

9. $x^2 + 3x + 1 = 0$
10. $2x^2 + x + 3 = 0$
11. $4z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-a^2 + 3a - 6 = 0$
13. $5p^2 + 3p - 7 = 0$
14. $2x^2 = 16x - 32$
15. $-5x^2 + 5x - 8 = 0$
16. $4.1x^2 - 3.1x - 2.8 = 0$
17. $x^2 + 10.2x + 26.01 = 0$
18. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 10 = 0$
19. $b^2 = -3b - \frac{9}{4}$
20. $\frac{x^2}{3} = \frac{2x}{7}$

Resuelva cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

21. $x^2 - 9x + 18 = 0$
22. $x^2 + 9x + 18 = 0$
23. $a^2 - 6a + 8 = 0$
24. $a^2 + 6a + 8 = 0$
25. $x^2 = -6x + 7$
26. $-a^2 - 9a + 10 = 0$
27. $-b^2 = 4b - 20$
28. $a^2 - 16 = 0$
29. $b^2 - 64 = 0$
30. $2x^2 = 4x + 1$
31. $3w^2 - 4w + 5 = 0$
32. $x^2 - 6x = 0$

33. $c^2 - 5c = 0$

34. $-t^2 - t - 1 = 0$

35. $4s^2 - 8s + 6 = 0$

36. $-3r^2 = 9r + 6$

37. $a^2 + 2a + 1 = 0$

38. $y^2 + 16y + 64 = 0$

39. $16x^2 - 8x + 1 = 0$

40. $100m^2 + 20m + 1 = 0$

41. $x^2 - 2x - 1 = 0$

42. $2 - 3r^2 = -4r$

43. $-n^2 = 3n + 6$

44. $-9d - 3d^2 = 5$

45. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

46. $(r - 3)(3r + 4) = -10$

47. $(2a + 3)(3a - 1) = 2$

48. $6x^2 = 21x + 27$

49. $\frac{1}{2}t^2 + t - 12 = 0$

50. $\frac{2}{3}x^2 = 8x - 18$

51. $9r^2 + 3r - 2 = 0$

52. $2x^2 - 4x - 2 = 0$

53. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$

54. $x^2 - \frac{11}{3}x = \frac{10}{3}$

55. $a^2 - \frac{a}{5} - \frac{1}{3} = 0$

56. $b^2 = -\frac{b}{2} + \frac{2}{3}$

57. $c = \frac{c - 6}{4 - c}$

58. $3y = \frac{5y + 6}{2y + 3}$

59. $2x^2 - 4x + 5 = 0$

60. $3a^2 - 4a = -5$

61. $y^2 + \frac{y}{2} = -\frac{3}{2}$

62. $2b^2 - \frac{7}{3}b + \frac{4}{3} = 0$

63. $0.1x^2 + 0.6x - 1.2 = 0$

64. $2.3x^2 - 5.6x - 0.4 = 0$

Determine todos los valores reales de la variable para los que cada función tiene el valor indicado.

65. $f(x) = x^2 - 2x + 5, f(x) = 5$

66. $g(x) = x^2 + 3x + 8, g(x) = 8$

67. $k(x) = x^2 - x - 15, k(x) = 15$

68. $p(r) = r^2 + 17r + 81, p(r) = 9$

69. $h(t) = 2t^2 - 7t + 6, h(t) = 2$

70. $t(x) = x^2 + 5x - 4, t(x) = 3$

71. $g(a) = 2a^2 - 3a + 16, g(a) = 14$

72. $h(x) = 6x^2 + 3x + 1, h(x) = -7$

Determine una función que tenga las soluciones dadas.

73. $2, 5$

74. $-3, 4$

75. $1, -9$

76. $-2, -6$

77. $-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

78. $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$

79. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

80. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

81. $3i, -3i$

82. $8i, -8i$

83. $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

84. $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$

85. $2 + 3i, 2 - 3i$

86. $5 - 4i, 5 + 4i$

Resolución de problemas

En los ejercicios 87 a 90, **a)** *plantee una función de ingreso, $R(n)$, que pueda usarse para resolver el problema, y* **b)** *resuelva el problema. Vea el ejemplo 8.*

87. Venta de lámparas Un negocio vende n lámparas, $n \leq 65$, a un precio de $(10 - 0.02n)$ dólares cada una. ¿Cuántas lámparas deben venderse para obtener un ingreso de \$450?

88. Venta de pilas Un negocio vende n pilas, $n \leq 26$, a un precio de $(25 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas pilas deben venderse para obtener un ingreso de \$460?

89. Venta de sillas Un negocio vende n sillas, $n \leq 50$, a un precio de $(50 - 0.4n)$ dólares cada una. ¿Cuántas sillas deben venderse para obtener un ingreso de \$660?

90. Venta de relojes Un negocio vende n relojes, $n \leq 75$, a un precio de $(30 - 0.15n)$ dólares cada uno. ¿Cuántos relojes deben venderse para obtener un ingreso de \$1260 dólares?

91. Proporcione su propio ejemplo de una ecuación cuadrática que pueda resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero no por medio de factorización sobre el conjunto de enteros.

92. ¿Existen ecuaciones cuadráticas que **a)** puedan resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero que no se puedan resolver completando el cuadrado; **b)** puedan resolverse completando el cuadrado pero no factorizando sobre el conjunto de enteros?

93. Al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un cuadrado perfecto, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

94. Al resolver una ecuación mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un número natural, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

En los ejercicios 95 a 102, utilice una calculadora cuando sea necesario para dar la solución en forma decimal. Redondee los números irracionales al centésimo más cercano.

95. Números El doble del cuadrado de un número positivo aumentado en tres veces el número original es igual a 27. Determine el número.

96. Números El triple del cuadrado de un número positivo menos el doble del mismo número es igual a 21. Determine el número.

97. Jardín rectangular El largo de un jardín rectangular es 1 pie menor que el triple de su ancho. Si el área del jardín es de 24 pies cuadrados, determine el largo y el ancho.

98. Área rectangular Lora Wallman desea cercar un área rectangular ubicada en la ribera de un río, como se ilustra en el diagrama. Si sólo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determine las dimensiones del área rectangular.

99. Fotografía John Williams, un fotógrafo profesional, tiene una fotografía de 6 por 8 pulgadas, y desea reducir la misma cantidad de cada lado, de modo que la fotografía resultante tenga la mitad del área de la fotografía original. ¿En cuánto debe reducir cada lado?

100. Jardín rectangular Bart Simmons tiene un jardín floral de 12 por 9 metros, y quiere construir un camino de grava de ancho uniforme por la parte interior del jardín y a lo largo de cada lado, de modo que el espacio resultante tendrá la mitad del área del jardín original. ¿Qué ancho tendrá el camino de grava?

101. Cascada Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas Lower Falls en el parque nacional de Yellowstone cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 308$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

102. Cascada Cuando una gota de agua (u otro objeto) desde la parte superior de las cataratas del Niágara cae a la fosa en la parte inferior, la altura, h, en pies, con respecto del agua en la fosa, puede determinarse mediante la ecuación $h = -16t^2 + 176$. En la ecuación, t es el tiempo, en segundos, a partir de que la gota cae en la cascada. Determine el tiempo que tarda la gota en llegar a la parte inferior de la cascada, en la fosa (cuando $h = 0$).

En los ejercicios 103 y 104, utilice la ecuación $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ *(consulte el ejemplo 9).*

103. Lanzamiento de una herradura Una herradura se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 80 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo después de que se lanza hacia arriba

a) estará a 20 pies del suelo?

b) dará contra el suelo?

104. Gravedad en la Luna La gravedad en la Luna equivale más o menos a un sexto de la terrestre. Suponga que Neil Armstrong se encuentra en la Luna, parado sobre una colina de 60 pies de altura. Si salta hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo, ¿cuánto tardará en tocar el suelo que está al pie de la colina?

Resuelva mediante la fórmula cuadrática.

105. $x^2 - \sqrt{5}x - 10 = 0$

106. $x^2 + 5\sqrt{6}x + 36 = 0$

Retos

107. Calentamiento de un cubo metálico Un cubo de metal se expande cuando se calienta. Si cada lado aumenta 0.20 milímetros después de que se calienta y el volumen total aumenta 6 milímetros cúbicos, determine la longitud original de cada lado del cubo.

108. Seis soluciones La ecuación $x^n = 1$ tiene n soluciones (incluyendo las soluciones complejas). Determine las seis soluciones de $x^6 = 1$. (*Sugerencia:* Reescriba la ecuación como $x^6 - 1 = 0$; luego factorice mediante la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.)

109. **Lanzamiento de una piedra** Travis Hawley se encuentra en el cuarto nivel de un edificio de ocho pisos, y Courtney Prenzlow está en el techo. Travis se encuentra a 60 pies de distancia respecto del suelo mientras que Courtney está a 120 pies del suelo.

a) Si Travis deja caer una piedra desde una ventana, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

b) Si Courtney deja caer una piedra desde el techo, determine el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

c) Si Travis lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, y Courtney lanza al mismo tiempo una piedra hacia arriba a 60 pies por segundo, ¿cuál de las piedras dará primero contra el suelo? Explique.

d) ¿En algún instante las piedras estarán a la misma distancia respecto del suelo? Si es así, ¿cuándo?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **110.** Evalúe $\dfrac{5.55 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$.

[3.2] **111.** Si $f(x) = x^2 + 2x - 8$, determine $f(3)$.

[4.1] **112.** Resuelva este sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[6.3] **113.** Simplifique $2x^{-1} - (3y)^{-1}$.

[7.6] **114.** Resuelva $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = x$.

8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas

1 Resolver problemas de aplicación adicionales.

2 Despejar una variable de una fórmula.

1 Resolver problemas de aplicación adicionales

Ya hemos analizado unos cuantos problemas de aplicación que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas. En esta sección exploraremos varios más. También estudiaremos cómo despejar una variable en una fórmula. Empezamos determinando las utilidades de una compañía nueva.

EJEMPLO 1 ▸ **Utilidades de una compañía** Laserox, una compañía que inicia sus operaciones, proyecta que sus utilidades anuales, $p(n)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operación, pueden calcularse mediante la función $p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$, en donde n es el número de años en operación.

a) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después del primer año.

b) Calcule la utilidad (o pérdida) de la compañía después de 6 años.

c) Calcule el tiempo necesario para que la compañía alcance el punto de equilibrio.

Solución **a)** Para aproximar la utilidad después de 1 año, evaluamos la función en 1.

$$p(n) = 1.2n^2 + 4n - 8$$
$$p(1) = 1.2(1)^2 + 4(1) - 8 = -2.8$$

Así, al final del primer año la compañía proyecta una pérdida de \$2.8 miles, es decir, de \$2800.

b) $p(6) = 1.2(6)^2 + 4(6) - 8 = 59.2$

Por lo tanto, al final del sexto año la utilidad proyectada de la compañía es de \$59.2 miles, es decir, de \$59,200.

c) Entienda el problema La compañía alcanzará el punto de equilibrio cuando la utilidad sea 0. Así, para determinar el punto de equilibrio (ni pérdidas ni ganancias) resolvemos la ecuación

$$1.2n^2 + 4n - 8 = 0$$

Podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

Traduzca $\quad a = 1.2, \quad b = 4, \quad c = -8$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1.2)(-8)}}{2(1.2)}$$

Realice los cálculos
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 38.4}}{2.4}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{54.4}}{2.4}$$
$$\approx \frac{-4 \pm 7.376}{2.4}$$
$$n \approx \frac{-4 + 7.376}{2.4} \approx 1.4 \quad \text{o} \quad n \approx \frac{-4 - 7.376}{2.4} \approx -4.74$$

Responda Como el tiempo no puede ser negativo, el momento en que la compañía llega al punto de equilibrio es aproximadamente a los 1.4 años.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

Ahora consideremos otro ejemplo en que se utiliza la fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 2 ▸ **Expectativa de vida** La función $N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$ puede usarse para calcular el promedio de número de años de expectativa de vida para una persona de t años de edad, donde $30 \leq t \leq 100$.

a) Calcule la expectativa de vida para una persona de 40 años de edad.

b) Si una persona tiene una expectativa de vida de 14.3 años, calcule su edad actual.

Solución **a)** Entienda el problema En principio, es lógico que cuanto mayor sea la persona menor será su expectativa de vida. Para determinar la expectativa de vida de una persona de 40 años de edad, sustituimos t por 40 en la función y evaluamos.

Traduzca
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$N(40) = 0.0054(40)^2 - 1.46(40) + 95.11$$

Realice los cálculos
$$= 0.0054(1600) - 58.4 + 95.11$$
$$= 8.64 - 58.4 + 95.11$$
$$= 45.35$$

Responda y compruebe La respuesta parece razonable. Así, en promedio, una persona de 40 años puede esperar vivir otros 45.35 años, para llegar a una edad de 85.35 años.

b) Entienda el problema Aquí se nos da la expectativa de vida, $N(t)$, y se nos pide determinar la edad actual de la persona, t. Para resolver este problema, sustituimos $N(t)$ por 14.3 y despejamos t; para ello utilizaremos la fórmula cuadrática.

Traduzca
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$14.3 = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$

Realice los cálculos
$$0 = 0.0054t^2 - 1.46t + 80.81$$
$$a = 0.0054, \quad b = -1.46, \quad c = 80.81$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-1.46) \pm \sqrt{(-1.46)^2 - 4(0.0054)(80.81)}}{2(0.0054)}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{2.1316 - 1.745496}}{0.0108}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{0.386104}}{0.0108}$$
$$\approx \frac{1.46 \pm 0.6214}{0.0108}$$
$$t \approx \frac{1.46 + 0.6214}{0.0108} \approx 192.72 \quad \text{o} \quad t \approx \frac{1.46 - 0.6214}{0.0108} \approx 77.65$$

Responda Como 192.72 no es una edad razonable, podemos omitir este resultado. Por lo tanto, en promedio, las personas con una expectativa de vida de 14.3 años, tienen alrededor de 77.65 años de edad.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 31

Problemas de movimiento

En la sección 2.4 estudiamos por primera vez los problemas de movimiento; los que analizaremos a continuación se resuelven mediante la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 ▸ Paseo en una lancha de motor Charles Curtis decide dar un paseo relajante en su lancha de motor por el río Potomac. Inicia su recorrido en Bethesda, Maryland. Después de recorrer 12 millas a favor de la corriente, decide regresar. Su paseo tuvo una duración de 5 horas y la corriente del río se movía a una velocidad de 2 millas por hora. Si todo el trayecto lo hizo a la misma velocidad, determine la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

Solución **Entienda el problema** Nos piden determinar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas, por lo que hacemos r = velocidad de la lancha en aguas tranquilas. Sabemos que el paseo duró 5 horas; por lo tanto, el tiempo en que recorrió el trayecto de ida y el de regreso debe sumar 5 horas. Ya que distancia = velocidad · tiempo, podemos determinar el tiempo dividiendo la distancia entre la velocidad.

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Trayecto de ida (a favor de la corriente)	12	$r + 2$	$\frac{12}{r+2}$
Trayecto de vuelta (en contra de la corriente)	12	$r - 2$	$\frac{12}{r-2}$

Traduzca trayecto de ida + trayecto de vuelta = tiempo total

$$\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2} = 5$$

Realice los cálculos

$$(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \textit{Multiplicar por el MCD.}$$

$$(\cancel{r+2})(r-2)\left(\frac{12}{\cancel{r+2}}\right) + (r+2)(\cancel{r-2})\left(\frac{12}{\cancel{r-2}}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$12(r-2) + 12(r+2) = 5(r^2 - 4)$$
$$12r - 24 + 12r + 24 = 5r^2 - 20 \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$
$$24r = 5r^2 - 20 \quad \textit{Simplificar.}$$
$$\text{o} \quad 5r^2 - 24r - 20 = 0$$

Si utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = -24$ y $c = -20$, obtenemos

$$r = \frac{24 \pm \sqrt{976}}{10}$$
$$r \approx 5.5 \quad \text{o} \quad r \approx -0.7$$

Responda Puesto que la velocidad no puede ser negativa, la velocidad o rapidez de la lancha en aguas tranquilas es de alrededor de 5.5 millas por hora.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

Observe que en situaciones de la vida real, la mayoría de las respuestas no son valores enteros.

Problemas de trabajo

Resolvemos un ejemplo que incluye un problema de trabajo. Los problemas de trabajo se estudiaron en la sección 6.5. Antes de seguir adelante sería conveniente que revisara esa sección.

EJEMPLO 4 ▶ **Bombeo de agua** A consecuencia de un huracán, el sótano de los Dural se inundó. Para drenar el agua, la familia cuenta con una pequeña bomba, pero además pidió prestada una bomba más al departamento de bomberos. Con ambas bombas trabajando juntas, el sótano quedaría seco en alrededor de 6 horas. La bomba del departamento de bomberos tenía mayor potencia, por lo que si sólo se utilizara ésta, vaciarían el sótano en 2 horas menos que si utilizaran únicamente la pequeña bomba. Si se usara cada una de estas bombas por separado para drenar el agua, ¿cuánto tiempo necesitaría cada una para vaciar el sótano?

Solución **Entienda el problema** Recuerde que en la sección 6.5 se dijo que la velocidad de trabajo multiplicada por el tiempo de trabajo da como resultado la parte de la tarea realizada.

Sea t = el número de horas que tarda la bomba más lenta en terminar sola el trabajo.
$t - 2$ = el número de horas que tarda la bomba más rápida en terminar sola el trabajo.

Bomba	Velocidad del trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea realizada
Bomba más lenta	$\frac{1}{t}$	6	$\frac{6}{t}$
Bomba más rápida	$\frac{1}{t-2}$	6	$\frac{6}{t-2}$

Traduzca
$$\begin{pmatrix}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los Dural}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los bomberos}\end{pmatrix} = 1$$

$$\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = 1$$

Realice los cálculos
$$t(t-2)\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = t(t-2)(1) \quad \textit{Multiplicar ambos lados por el MCD } t(t-2).$$

$$\cancel{t}(t-2)\left(\frac{6}{\cancel{t}}\right) + t(\cancel{t-2})\left(\frac{6}{\cancel{t-2}}\right) = t^2 - 2t \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$6(t-2) + 6t = t^2 - 2t$$
$$6t - 12 + 6t = t^2 - 2t$$
$$t^2 - 14t + 12 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática, obtenemos

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{2}$$
$$t \approx 13.1 \quad \text{o} \quad t \approx 0.9$$

Responda Tanto 13.1 como 0.9, satisfacen la ecuación $\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2} = 1$ (con valores redondeados). Sin embargo, si aceptamos a 0.9 como solución, significaría que la bomba más rápida terminaría la tarea en un tiempo negativo ($t - 2 = 0.9 - 2 = -1.1$), lo cual no es posible. Por consiguiente, 0.9 horas no es una solución aceptable. La única solución es 13.1 horas, que es el tiempo aproximado que la bomba más lenta tardaría en vaciar el sótano, mientras que la otra bomba necesitaría de $13.1 - 2 = 11.1$ horas para realizar la misma tarea.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 45

2 Despejar una variable de una fórmula

Cuando en una *fórmula* aparece una variable elevada al cuadrado, para despejar la variable se necesitaría utilizar la propiedad de la raíz cuadrada. Sin embargo, *en la mayoría de las fórmulas, cuando se usa la propiedad de la raíz cuadrada sólo se utilizará la raíz principal o raíz positiva,* ya que por lo general se busca una cantidad que no puede ser negativa.

EJEMPLO 5

a) La fórmula para determinar el área de un círculo es $A = \pi r^2$. Despeje el radio, r, de esta ecuación.

b) *La ley de Newton de la gravitación universal* establece que toda partícula en el universo atrae a otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Podemos representar esta ley como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Despeje r de la ecuación.

Solución

a)

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2 \qquad \text{Aislar } r^2 \text{ dividiendo ambos lados entre } \pi.$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

b)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$r^2 F = G m_1 m_2 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } r^2.$$

$$r^2 = \frac{G m_1 m_2}{F} \qquad \text{Aislar } r^2 \text{ dividiendo ambos lados entre } F.$$

$$r = \sqrt{\frac{G m_1 m_2}{F}} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 23

En el ejemplo 5, como r debe ser mayor que 0 sólo tomamos la raíz cuadrada principal, o positiva, cuando usamos la propiedad de la raíz cuadrada.

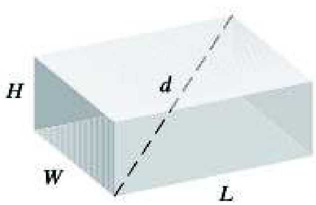


FIGURA 8.5

EJEMPLO 6 **Diagonal de una maleta** La diagonal de una caja puede calcularse mediante la fórmula

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

donde L es la longitud, W es el ancho y H es la altura de la caja. Vea la **figura 8.5**.

a) Determine la diagonal de una maleta con longitud de 30 pulgadas, ancho de 15 pulgadas y altura de 10 pulgadas.

b) Resuelva la ecuación para el ancho, W.

Solución **a)** Entienda el problema Para determinar la diagonal, necesitamos sustituir los valores apropiados en la fórmula y realizar los cálculos.

Traduzca

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$
$$d = \sqrt{(30)^2 + (15)^2 + (10)^2}$$

Realice los cálculos

$$= \sqrt{900 + 225 + 100}$$
$$= \sqrt{1225}$$
$$= 35$$

Responda Por lo tanto, la diagonal de la maleta mide 35 pulgadas.

b) El primer paso para despejar W es elevar al cuadrado ambos lados de la fórmula.

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

$$d^2 = \left(\sqrt{L^2 + W^2 + H^2}\right)^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$d^2 = L^2 + W^2 + H^2 \qquad \text{Utilizar } (\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0.$$

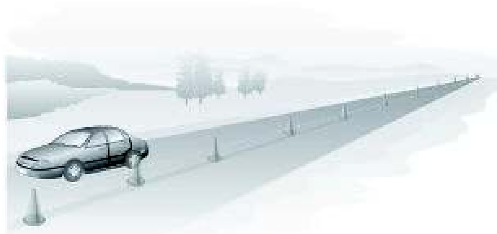
$$d^2 - L^2 - H^2 = W^2 \qquad \text{Aislar } W^2.$$

$$\sqrt{d^2 - L^2 - H^2} = W \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 15

EJEMPLO 7 **Conos** El área de la superficie de un cono circular recto es

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$



a) Como señalamiento, en las carreteras se utilizan conos color naranja; cada uno de ellos mide 18 pulgadas de alto y tiene un radio de 12 pulgadas. Determine el área de la superficie de cada cono.

b) Despeje h de la fórmula.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Para determinar el área de la superficie, sustituimos los valores apropiados en la fórmula.

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$
$$= \pi(12)\sqrt{(12)^2 + (18)^2}$$

Realice los cálculos
$$= 12\pi\sqrt{144 + 324}$$
$$= 12\pi\sqrt{468}$$
$$\approx 815.56$$

Responda El área de la superficie es de casi 815.56 pulgadas cuadradas.

b) Para despejar h, necesitamos aislarla en un lado de la ecuación. Esto se puede hacer de varias formas, una de ellas es la siguiente:

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\frac{s}{\pi r} = \sqrt{r^2 + h^2} \qquad \textit{Dividir ambos lados entre } \pi r.$$

$$\left(\frac{s}{\pi r}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 \qquad \textit{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} = r^2 + h^2 \qquad \textit{Utilizar } (\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0.$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2 = h^2 \qquad \textit{Restar } r^2 \textit{ en ambos lados.}$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = h \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Otras respuestas que también son aceptables son $h = \sqrt{\dfrac{s^2 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}}$ y $h = \dfrac{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$. Explique por qué.

Ahora resuelva el ejercicio 27

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. En general, si utiliza la propiedad de la raíz cuadrada o la fórmula cuadrática para despejar una variable en una fórmula, sólo usará la raíz cuadrada positiva. Explique por qué.

2. Suponga que $P = ☺^2 + \square^2$ es una fórmula real. Al despejar ☺ se obtiene $☺ = \sqrt{P - \square^2}$. Si ☺ representa un número real, ¿qué relación debe existir entre P y $\square$?

Práctica de habilidades

En cada una de las fórmulas siguientes, despeje la variable que se indica. Suponga que la variable que se despeja debe ser mayor que 0.

3. $A = s^2$, para s (área de un cuadrado).

4. $A = (s + 1)^2$, para s (área de un cuadrado).

5. $d = 4.9t^2$, para t (distancia que ha caído un objeto).

6. $A = S^2 - s^2$, para S (área entre dos cuadrados).

7. $E = i^2r$, para i (corriente en electrónica).

8. $A = 4\pi r^2$, para r (área de la superficie de una esfera).

9. $d = 16t^2$, para t (distancia de un objeto que cae).

10. $d = \frac{1}{9}x^2$, para x (distancia de paro sobre pavimento).

11. $E = mc^2$, para c (famosa fórmula de la energía, propuesta por Einstein).

12. $V = \pi r^2 h$, para r (volumen de un cilindro circular recto).

13. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, para r (volumen de un cono circular recto).

14. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para L (diagonal de un rectángulo).

15. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para W (diagonal de un rectángulo).

16. $a^2 + b^2 = c^2$, para a (teorema de Pitágoras).

17. $a^2 + b^2 = c^2$, para b (teorema de Pitágoras).

18. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para L (diagonal de una caja).

19. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para H (diagonal de una caja).

20. $A = P(1 + r)^2$, para r (fórmula de interés compuesto).

21. $h = -16t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto).

22. $h = -4.9t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto).

23. $E = \frac{1}{2}mv^2$, para v (energía cinética).

24. $f_x^2 + f_y^2 = f^2$, para f_x (fuerza que actúa sobre un objeto).

25. $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, para v_1 (aceleración de un vehículo).

26. $A = 4\pi(R^2 - r^2)$, para R (área de la superficie de dos esferas).

27. $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, para c (relatividad; v' se lee "v prima").

28. $L = L_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, para v (arte, contracción de una pintura).

Resolución de problemas

29. Utilidad La utilidad de una compañía que vende tractores, es $P(n) = 2.7n^2 + 9n - 3$, donde $P(n)$ son cientos de dólares.

a) Determine la utilidad cuando se venden 5 tractores.

b) ¿Cuántos tractores deben venderse para obtener una utilidad de \$20,000?

30. Utilidad La utilidad de la compañía Jackson, que vende refrigeradores, es $P(n) = 6.2n^2 + 6n - 3$, donde $P(n)$ son dólares.

a) Determine la utilidad cuando se venden 7 refrigeradores.

b) ¿Cuántos refrigeradores deben venderse para obtener una ganancia de \$675?

31. Temperatura La temperatura, T, en grados Fahrenheit, del radiador de un automóvil durante los primeros 4 minutos de conducción es una función del tiempo, t. La temperatura puede determinarse mediante la fórmula $T = 6.2t^2 + 12t + 32$, $0 \le t \le 4$.

a) Cuando se arranca el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?

b) Después de 2 minutos de conducir el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?

c) ¿Cuánto tiempo después de que se arrancó el automóvil la temperatura del radiador alcanza los 120°F?

32. Matrícula escolar Para calcular el total de estudiantes inscritos entre los años 1990 y 2008 en el nivel básico y secundario en Estados Unidos, se puede utilizar la función $N(t) = -0.043t^2 + 1.22t + 46.0$, en millones. En la ecuación t es el número de años desde 1989, $1 \le t \le 19$.

a) Calcule el total de niños inscritos en 1995.

b) ¿En qué años el total de niños inscritos es de 54 millones de estudiantes?

33. Descarga de canciones El número de descargas de canciones, en miles de millones, de 2002 a 2006 y proyectado para 2008, puede estimarse con la función $D = 0.04t^2 - 0.03t + 0.01$. En esta función, t es el número de años desde 2002 y $0 \le t \le 6$. *Fuente*: Price Waterhouse Coopers, LLP, RIAA, *Newsweek* (11 de julio de 2005).

a) Calcule el número de descargas en 2006.

b) ¿En qué año está proyectado que las descargas lleguen a mil millones?

34. Calificación promedio En un colegio, los registros muestran que la calificación promedio, G, de un alumno es una función del número de horas que él o ella estudia y destina a realizar tareas por semana. La calificación promedio puede calcularse mediante la ecuación $G = 0.01h^2 + 0.2h + 1.2, 0 \le h \le 8$.

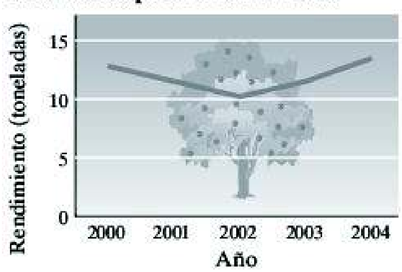
a) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que estudia 0 horas a la semana?

b) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que dedica 3 horas a la semana para estudiar?

c) Para obtener una calificación promedio de 3.2, ¿cuántas horas a la semana debería dedicar un alumno al estudio?

35. Producción de manzanas La gráfica siguiente muestra la producción promedio anual por acre, de manzanos, durante los años de 2000 a 2004.

Rendimiento por acre de manzanos



Source: National Agricultural Statistics, *USA Today* (9/15/05)

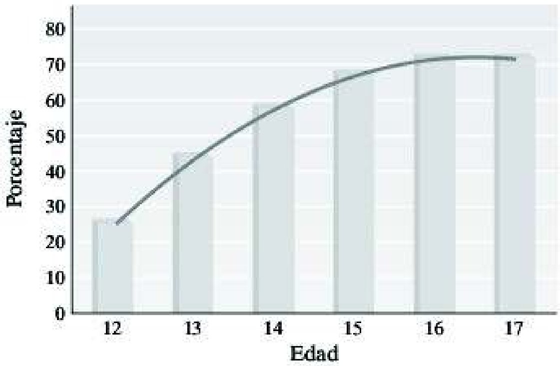
La producción promedio anual por acre de manzanos, en toneladas, puede estimarse mediante la función $Y = 0.66t^2 - 2.49t + 12.93$. En esta función, t es el número de años desde 2000 y $0 \le t \le 4$.

a) Estime la producción por acre en 2003.

b) ¿En qué año el rendimiento por acre fue de 13 mil millones de toneladas?

36. Escuela libre de drogas En la gráfica siguiente se muestra el porcentaje de estudiantes que afirma que en sus escuelas se consumen drogas.

Estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas



Fuente: Centro Nacional de Adicciones y Abuso de Sustancias de Estados Unidos

La función $f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$ puede emplearse para calcular el porcentaje de estudiantes que afirma que en sus escuelas se consumen drogas. En la función, a representa la edad del estudiante, donde $12 \le a \le 17$. Utilice la función para responder las siguientes preguntas.

a) Calcule el porcentaje de estudiantes de 13 años que afirma que en sus escuelas se consumen drogas.

b) ¿A qué edad 70% de los estudiantes afirma que en sus escuelas se consumen drogas?

37. Ventas de motocicletas La gráfica siguiente muestra el número de motocicletas nuevas, en millones, vendidas en Estados Unidos durante los años de 1997 a 2004.

Fuente: Consejo de la industria de motocicletas. *USA Today* (20 de enero de 2005)

El número de motocicletas nuevas, $m(t)$, en millones, vendidas en Estados Unidos puede aproximarse mediante la función $M = -0.00434t^2 + 0.142t + 0.315$. En esta función, t es el número de años a partir de 1997.

a) Si esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el número de motocicletas que se venderán en Estados Unidos en 2007.

b) ¿En qué año el número de motocicletas vendidas en Estados Unidos será de 1.4 millones?

38. Utilidad La utilidad semanal de una tienda de videos, P, en miles de dólares, es una función del precio de alquiler de las cintas, t. La ecuación de la utilidad es $P = 0.2t^2 + 1.5t - 1.2$, $0 \le t \le 5$.

a) Si la tienda cobra $3 por cinta, ¿cuál es la utilidad o pérdida semanal de la tienda?

b) Si cobra $5 por cinta, ¿cuál es la utilidad semanal?

c) ¿Cuál debe ser el precio de alquiler de cada cinta para que la utilidad semanal sea de $1,600?

39. Patio escolar El área de un patio escolar es de 500 metros cuadrados. La longitud es 5 metros mayor que el ancho; determine la longitud y el ancho del patio.

40. Viaje Hana Juárez condujo 80 millas en medio del tránsito pesado, hasta llegar a una autopista, por la que viajó 260 millas a una velocidad promedio de 25 millas por hora más que la velocidad promedio en el tránsito pesado. Si el viaje total duró 6 horas, determine su velocidad promedio en tránsito pesado y en la autopista.

41. Perforación de un pozo Paolo y Rima Jones desean cavar un pozo en su propiedad, así que contratan una compañía especializada para que lo perfore. La compañía tiene que perforar 64 pies para encontrar agua, e informa a los Torres que acaba de pedir un nuevo equipo que perfora a una velocidad de 1 pie por hora más rápido, lo cual les permitiría llegar al agua 3.2 horas antes que con el equipo que tienen actualmente. Determine la velocidad a la que perfora el equipo actual.

42. Transportación de automóviles Frank Simms transportó un lote de automóviles nuevos desde Detroit, Michigan, hasta Indianapolis, Indiana. En su viaje de regreso el camión estaba más ligero, así que la velocidad de Francisco fue, en promedió, 10 millas por hora más rápida que en su viaje de ida. Si la distancia total recorrida fue de 300 millas y el tiempo total empleado en la conducción fue de 11 horas, determine la velocidad promedio de ida y la velocidad promedio de regreso.

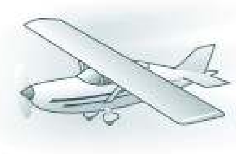
43. Corredor Latoya Williams, corredora de fondo, sale de su casa, trota 6 millas y regresa. La mayor parte del recorrido de ida es cuesta arriba, por lo que su velocidad promedio es 2 millas por hora menos que su velocidad de regreso. Si el tiempo total que dura su recorrido es $1\frac{3}{4}$ horas, determine su velocidad de ida y su velocidad de regreso.

44. Tiempo de viaje Kathy Nickel viajó de una ciudad a otra; la distancia total que recorrió fue de 300 millas. Al llegar a su destino calculó que si hubiera viajado 10 millas por hora más rápido, en promedio, habría llegado a su destino 1 hora antes. Determine la velocidad promedio a la que viajó Kathy.

45. Construcción de un motor Trabajando juntas, dos mecánicas, Bonita y Pamela, tardan 6 horas en reconstruir un motor. Si cada una de ellas trabajara sola, Bonita, la más experimentada, podría completar la tarea 1 hora antes que Pamela. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas en reconstruir el motor por su cuenta?

46. Paseo en bicicleta Ricky Bullock disfruta pasear en bicicleta de ida y regreso desde Washington, D.C., hasta Bethesda, Maryland; el trayecto total es de 30 millas. La mayor parte del viaje a Bethesda es cuesta arriba. La velocidad promedio al ir a Bethesda es 5 millas por hora más lenta que la velocidad promedio de regreso a Washington. Si el viaje completo dura 4.5 horas, determine la velocidad promedio en cada dirección.

47. Vuelo en aeroplano Dole Rohm voló su aeroplano monomotor por una distancia de 80 millas a favor del viento, desde Jackson Hole, Wyoming, hasta Blackfoot, Idaho. En ese momento dio vuelta y voló de regreso a Jackson Hole con el viento en contra. Si la velocidad del viento era de 30 millas por hora y el tiempo total del recorrido fue de 1.3 horas, determine la velocidad del aeroplano con viento en calma.



48. Barcos Después de un derrame petrolero, se envían dos barcos para limpiar la bahía de Baffin. El barco más nuevo puede limpiar todo el derrame en 3 horas menos que el barco más antiguo. Si ambos barcos trabajan juntos, pueden limpiar el derrame de petróleo en 8 horas. ¿Cuánto tardaría el barco más nuevo en limpiar el petróleo derramado si trabajara solo?

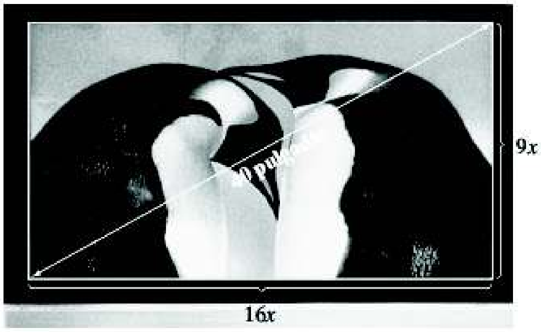
49. Servicio de limpieza Los O'Connor ofrecen servicios de limpieza. Si trabaja solo, John necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Cristina para limpiar un edificio de oficinas. Si trabajan juntos, John y Chris pueden limpiar el mismo edificio en 6 horas. Determine el tiempo que necesita cada uno de ellos para limpiar el edificio sin ayuda de su compañero.

50. Calentador eléctrico Un calentador eléctrico pequeño requiere 6 minutos más que un calentador más grande para elevar la temperatura de una cochera hasta alcanzar un clima agradable. Juntos, los dos calentadores pueden elevar la temperatura de la cochera hasta ese nivel en 42 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría en elevar la temperatura de la cochera hasta ese nivel cada uno de los calentadores?

51. Viaje Shywanda Moore viajó de San Antonio, Texas, a Austin, Texas, una distancia de 75 millas. Ella se detuvo 2 horas en Austin para visitar a un amigo antes de continuar su viaje a Dallas, Texas, que se encuentra a una distancia de 195 millas. Si condujo 10 millas por hora más rápido de San Antonio a Austin y el tiempo total del viaje fue de 6 horas, determine su velocidad promedio de San Antonio a Austin.

52. Viaje Lewis y su amigo George viajan de Memphis, Tennessee, a Richmond, Virginia. Lewis viaja en automóvil y George en tren. El tren y el automóvil salen de Memphis al mismo tiempo. Durante el viaje, los amigos hablan por teléfono celular, y Lewis le informa a George que se detuvo al anochecer después de haber recorrido 500 millas. Una hora y dos tercios después, George le habla a Lewis para informarle que el tren acaba de llegar a Richmond, ciudad que se encuentra a 800 millas de Memphis. Suponiendo que, en promedio, el tren viaja 20 millas por hora más rápido que el automóvil, determine la velocidad promedio del automóvil y del tren.

53. **Televisores de pantalla ancha** Un televisor de pantalla ancha (vea la figura) tiene una razón de aspecto de 16:9. Esto significa que la razón del largo a la altura de la pantalla es 16 a 9. La figura ilustra cómo pueden determinarse el largo y el ancho de una televisión de pantalla ancha de 40 pulgadas. Determine el largo y la altura de dicho televisor.



54. **Televisor estándar** Muchos televisores de tubos de rayos catódicos tienen una pantalla con razón de aspecto de 4:3. Determine el largo y la altura de la pantalla de una televisión que tiene una razón de aspecto de 4:3 y cuya diagonal es de 36 pulgadas. Vea el ejercicio 53.

55. Escriba su propio problema de movimiento y resuélvalo.

56. Escriba su propio problema de trabajo y resuélvalo.

Reto

57. **Área** El área de un rectángulo es de 18 metros cuadrados. Cuando la longitud se aumenta en 2 metros y el ancho en 3 metros, el área es de 48 metros cuadrados. Determine las dimensiones del rectángulo más pequeño.

58. **Área** El área de un rectángulo es de 35 pulgadas cuadradas. Cuando la longitud se disminuye en 1 pulgada y el ancho se aumenta en una pulgada, el área del nuevo rectángulo es de 36 pulgadas cuadradas. Determine las dimensiones del rectángulo original.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] 59. Evalúe $-[4(5-3)^3]+2^4$.

[2.2] 60. Despeje R de $IR + Ir = E$.

[6.2] 61. Sume $\dfrac{r}{r-4} - \dfrac{r}{r+4} + \dfrac{32}{r^2-16}$.

[7.2] 62. Simplifique $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-2}}{x^{1/2}y^2}\right)^8$.

[7.6] 63. Resuelva $\sqrt{x^2+3x+12} = x$.

Examen de mitad de capítulo: 8.1-8.3

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

1. $x^2 - 12 = 86$
2. $(a-3)^2 + 20 = 0$
3. $(2m+7)^2 = 36$

Resuelva cada ecuación completando el cuadrado.

4. $y^2 + 4y - 12 = 0$
5. $3a^2 - 12a - 30 = 0$
6. $4c^2 + c = -9$
7. **Patio** El patio de una casa es un cuadrado, con la diagonal 6 metros mayor que un lado. Determine la longitud de cada lado del patio.
8. **a)** Proporcione la fórmula para el discriminante de una ecuación cuadrática.
   b) Explique cómo determinar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.
9. Utilice el discriminante para determinar si la ecuación $2b^2 - 6b - 11 = 0$ tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.

Resuelva cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

10. $6n^2 + n = 15$
11. $p^2 = -4p + 8$
12. $3d^2 - 2d + 5 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, determine una ecuación que tenga las soluciones dadas.

13. 7, -2
14. $2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}$
15. **Lámparas** Una empresa vende n lámparas, $n \le 20$, a un precio de $(60 - 0.5n)$ dólares cada una. ¿Cuántas lámparas deben venderse para tener un ingreso de \$550?

En los ejercicios 16 al 18, despeje la variable que se indica. Suponga que todas las variables son positivas.

16. Despeje r de $y = x^2 - r^2$.

17. Despeje x de $A = \frac{1}{3}kx^2$.

18. Despeje y de $D = \sqrt{x^2 + y^2}$.

19. Área La longitud de un rectángulo es dos pies mayor que el doble del ancho. Determine las dimensiones, si su área es de 60 pies cuadrados.

20. Relojes La utilidad de una compañía que vende n relojes es $p(n) = 2n^2 + n - 35$, donde $p(n)$ está en cientos de dólares. ¿Cuántos relojes deben venderse para tener una utilidad de $2000?

8.4 Planteamiento de ecuaciones en forma cuadrática

1 Resolver ecuaciones con forma cuadrática.

2 Resolver ecuaciones con exponentes racionales.

1 Resolver ecuaciones con forma cuadrática

En ocasiones se nos presenta la necesidad de resolver ecuaciones que, aunque no son cuadráticas, pueden reescribirse en forma cuadrática para darles solución ya sea mediante factorización, completando el cuadrado o a través de la fórmula cuadrática.

Ecuaciones en la forma cuadrática

Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, para $a \neq 0$, en donde u es una expresión algebraica, se dice que está en **la forma cuadrática**.

Cuando le den una ecuación en la forma cuadrática, haga una sustitución para transformarla a $au^2 + bu + c = 0$. En general, si los exponentes son positivos y la expresión está en orden descendente de la variable, hacemos u igual al término de en medio, sin el coeficiente numérico. Por ejemplo,

Ecuación de la forma cuadrática	Sustitución	Ecuación con la sustitución
$y^4 - y^2 - 6 = 0$	$u = y^2$	$u^2 - u - 6 = 0$
$2(x+5)^2 - 5(x+5) - 12 = 0$	$u = x + 5$	$2u^2 - 5u - 12 = 0$
$x^{2/3} + 4x^{1/3} - 3 = 0$	$u = x^{1/3}$	$u^2 + 4u - 3 = 0$

Para resolver ecuaciones con la forma cuadrática utilizamos el procedimiento siguiente, ilustrado en el ejemplo 1.

Para resolver ecuaciones con la forma cuadrática

1. Haga una sustitución que tenga como resultado una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0, a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Despeje u en la ecuación $au^2 + bu + c = 0$.
3. Reemplace u con la función de la variable original del paso 1 y resuelva la ecuación resultante para la variable original.
4. Verifique si hay soluciones extrañas, sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

EJEMPLO 1

a) Resuelva la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) Determine las intersecciones del eje x de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Solución

a) Para obtener una ecuación en la forma cuadrática, escribimos x^4 como $(x^2)^2$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{Reemplazar } x^4 \text{ con } (x^2)^2 \text{ para obtener una ecuación en la forma deseada.}$$

Ahora, sea $u = x^2$. Esto produce una ecuación en la forma cuadrática.

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \qquad \text{Sustituir } x^2 \text{ por } u.$$
$$(u - 4)(u - 1) = 0 \qquad \text{Despejar } u.$$
$$u - 4 = 0 \quad \text{o} \quad u - 1 = 0$$
$$u = 4 \qquad u = 1$$
$$x^2 = 4 \qquad x^2 = 1 \qquad \text{Reemplazar } u \text{ por } x^2.$$
$$x = \pm\sqrt{4} \qquad x = \pm\sqrt{1} \qquad \text{Despejar } x.$$
$$x = \pm 2 \qquad x = \pm 1$$

Compruebe las cuatro soluciones posibles en la ecuación original.

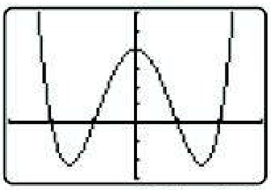
$x = 2$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$2^4 - 5(2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$
Verdadero

$x = -2$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$(-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$
Verdadero

$x = 1$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$1^4 - 5(1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$
Verdadero

$x = -1$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$(-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$
Verdadero

Por lo tanto, las soluciones son $2, -2, 1, -1$.



$-3, 3, 1, -3, 6, 1$

FIGURA 8.6

b) Las intersecciones del eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por consiguiente, la gráfica cruzará el eje x en las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Con base en la parte **a)**, sabemos que las soluciones son $2, -2, 1$ y -1. Así, las intersecciones del eje x son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. La **figura 8.6** es la gráfica de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, como se ilustra en una calculadora graficadora. Observe que la gráfica cruza el eje x en $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $p^4 + 2p^2 = 8$.

Solución

$$p^4 + 2p^2 - 8 = 0 \qquad \text{Igualar la ecuación a 0.}$$
$$(p^2)^2 + 2p^2 - 8 = 0 \qquad \text{Escribir } p^4 \text{ como } (p^2)^2 \text{ para obtener una ecuación en la forma deseada.}$$

Ahora determine $u = p^2$. Esto da una ecuación en forma cuadrática.

$$u^2 + 2u - 8 = 0 \qquad \text{Sustituir } p^2 \text{ por } u.$$
$$(u + 4)(u - 2) = 0 \qquad \text{Despejar } u \text{ en la ecuación.}$$
$$u + 4 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 = 0$$
$$u = -4 \qquad u = 2$$

No hemos terminado. Como la variable de la ecuación original es p, debemos resolver p, no u. En consecuencia, sustituimos p^2 por u y despejamos p.

$$p^2 = -4 \qquad p^2 = 2 \qquad \text{Reemplazar } u \text{ con } p^2.$$
$$p = \pm\sqrt{-4} \qquad p = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Despejar } p.$$
$$p = \pm 2i$$

Compruebe las cuatro posibles soluciones en la ecuación *original*.

$p = 2i$
$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(2i)^4 + 2(2i)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$2^4 i^4 + 2(2^2)(i^2) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16 - 8 = 8$$
Verdadero

$p = -2i$
$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(-2i)^4 + 2(-2i)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$(-2)^4 i^4 + 2(-2)^2 i^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16 - 8 = 8$$
Verdadero

$p = \sqrt{2}$
$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(\sqrt{2})^4 + 2(\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8$$
$$8 = 8$$
Verdadero

$p = -\sqrt{2}$
$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(-\sqrt{2})^4 + 2(-\sqrt{2})^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8$$
$$8 = 8$$
Verdadero

Por lo tanto, las soluciones son $2i$, $-2i$, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

Las soluciones para ecuaciones como $p^4 + 2p^2 = 8$ deben comprobarse. En general, en este tipo de ecuaciones no se introducen soluciones extrañas, a menos que se cometa algún error. Sin embargo, *pueden* introducirse soluciones extrañas cuando se trabaja con exponentes racionales, como se mostrará en el ejemplo 6.

Sugerencia útil

En ocasiones los estudiantes despejan u en la ecuación, pero luego olvidan terminar el problema despejando la variable original. Recuerde que si la ecuación original está en términos de x, debe obtener valores para x. Si la ecuación está en términos de p (como en el ejemplo 2), debe obtener valores para p, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 = 0$.

Solución Si hacemos $u = 2w + 1$, la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} 4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 &= 0 \\ 4u^2 - 16u + 15 &= 0 \qquad \text{Sustituir } 2w + 1 \text{ por } u. \end{aligned}$$

Ahora podemos factorizar y resolver.

$$(2u - 3)(2u - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} 2u - 3 &= 0 \quad \text{o} \quad & 2u - 5 &= 0 \\ 2u &= 3 & 2u &= 5 \\ u &= \frac{3}{2} & u &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

No hemos terminado, ya que la variable original en la ecuación es w, así que debemos despejar w no u. Por lo tanto, ahora sustituimos u por $2w + 1$ y despejamos w.

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} & u &= \frac{5}{2} \\ 2w + 1 &= \frac{3}{2} & 2w + 1 &= \frac{5}{2} \qquad \text{Sustituir } u \text{ por } 2w + 1. \\ 2w &= \frac{1}{2} & 2w &= \frac{3}{2} \\ w &= \frac{1}{4} & w &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ son soluciones de la ecuación original.

Ahora resuelva el ejercicio 29

EJEMPLO 4 Determine las intersecciones del eje x de la gráfica de la función $f(x) = 2x^{-2} + x^{-1} - 1$.

Solución Las intersecciones del eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por lo tanto, para determinar las intersecciones del eje x debemos resolver la ecuación

$$2x^{-2} + x^{-1} - 1 = 0$$

Esta ecuación puede expresarse como

$$2(x^{-1})^2 + x^{-1} - 1 = 0$$

Cuando hacemos $u = x^{-1}$, la ecuación se transforma en

$$2u^2 + u - 1 = 0$$

$$(2u - 1)(u + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} 2u - 1 &= 0 \quad \text{o} \quad & u + 1 &= 0 \\ u &= \frac{1}{2} & u &= -1 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos u por x^{-1}.

$$x^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x^{-1} = -1$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{x} = -1$$
$$x = 2 \qquad x = -1$$

Una comprobación mostrará que 2 y -1 son soluciones de la ecuación original. Por lo tanto, las intersecciones del eje x son $(2, 0)$ y $(-1, 0)$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 61

La ecuación del ejemplo 4 también podría expresarse como

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

Un segundo método para resolver esta ecuación consiste en multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, x^2, y luego simplificar.

$$x^2\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1\right) = x^2 \cdot 0$$
$$2 + x - x^2 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -1$$

Muchas de las ecuaciones resueltas en esta sección se pueden resolver por más de un método.

2 Resolver ecuaciones con exponentes racionales

Al resolver ecuaciones que tienen la forma cuadrática y exponentes racionales, primero debemos eliminar los exponentes elevando ambos lados de la ecuación a alguna potencia. Recuerde que hicimos esto en la sección 7.6, cuando resolvimos ecuaciones con radicales. Al elevar ambos lados de una ecuación a una potencia, podemos introducir soluciones extrañas. **Por lo tanto, siempre que elevemos ambos lados de una ecuación a una potencia, debemos verificar todas las soluciones en la ecuación original para asegurarnos de que ninguna es extraña**. Ahora resolvamos dos ejemplos para mostrar cómo trabajar con ecuaciones que tienen exponentes racionales. Utilizaremos el procedimiento que ya conocemos.

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva la ecuación $x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$.

Solución Esta ecuación puede reescribirse como

$$(x^{1/5})^2 + x^{1/5} - 6 = 0$$

Sea $u = x^{1/5}$. Entonces, la ecuación se transforma en

$$u^2 + u - 6 = 0$$
$$(u + 3)(u - 2) = 0$$
$$u + 3 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 = 0$$
$$u = -3 \qquad u = 2$$

Ahora sustituimos u por $x^{1/5}$ y elevamos ambos lados de la ecuación a la quinta potencia para eliminar los exponentes racionales.

$$x^{1/5} = -3 \quad \text{o} \quad x^{1/5} = 2$$
$$(x^{1/5})^5 = (-3)^5 \qquad (x^{1/5})^5 = 2^5$$
$$x = -243 \qquad x = 32$$

Las *dos posibles* soluciones son -243 y 32. Recuerde que siempre que eleve ambos lados de una ecuación a una potencia, como hicimos aquí, necesita comprobar si hay soluciones extrañas.

Compruebe $x = -243$

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{1/5} - 6 &= 0 \\ (-243)^{2/5} + (-243)^{1/5} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (\sqrt[5]{-243})^2 + \sqrt[5]{-243} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (-3)^2 - 3 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 9 - 3 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$x = 32$

$$\begin{aligned} x^{2/5} + x^{1/5} - 6 &= 0 \\ (32)^{2/5} + (32)^{1/5} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (\sqrt[5]{32})^2 + \sqrt[5]{32} - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2^2 + 2 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 4 + 2 - 6 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Como ambos valores satisfacen la ecuación, las soluciones son -243 y 32.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 6 ▶ Resuelva la ecuación $2p - \sqrt{p} - 10 = 0$.

Solución Podemos expresar esta ecuación como

$$\begin{aligned} 2p - p^{1/2} - 10 &= 0 \\ 2(p^{1/2})^2 - p^{1/2} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $u = p^{1/2}$, esta ecuación tiene la forma cuadrática.

$$\begin{aligned} 2u^2 - u - 10 &= 0 \\ (2u - 5)(u + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$2u - 5 = 0 \quad \text{o} \quad u + 2 = 0$$

$$2u = 5 \qquad u = -2$$

$$u = \frac{5}{2}$$

Sin embargo, como en la ecuación original la variable es p, debemos despejar p. Por lo tanto, sustituimos u por $p^{1/2}$.

$$p^{1/2} = \frac{5}{2} \qquad p^{1/2} = -2$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$(p^{1/2})^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad (p^{1/2})^2 = (-2)^2$$

$$p = \frac{25}{4} \qquad p = 4$$

Para terminar, debemos comprobar las dos posibles soluciones en la ecuación original.

Compruebe $p = \frac{25}{4}$

$$\begin{aligned} 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 \\ 2\left(\frac{25}{4}\right) - \sqrt{\frac{25}{4}} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{25}{2} - \frac{5}{2} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$p = 4$

$$\begin{aligned} 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 \\ 2(4) - \sqrt{4} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8 - 2 - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ -4 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Como 4 no satisface la ecuación, es una solución extraña; la única solución es $\frac{25}{4}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 25

El ejemplo 6 también podría resolverse escribiendo la ecuación como $\sqrt{p} = 2p - 10$ y elevando ambos lados al cuadrado. Resuélvala de esta manera; si olvidó cómo hacerlo, revise la sección 7.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique cómo se puede determinar si una ecuación dada puede expresarse como una ecuación en la forma cuadrática.
2. Al resolver una ecuación que está en la forma cuadrática, ¿en qué situaciones es esencial comprobar si hay soluciones extrañas? Explique por qué.
3. Para resolver la ecuación $3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
4. Para resolver la ecuación $2y^{4/3} + 9y^{2/3} - 7 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
5. Para resolver la ecuación $z^{-2} - z^{-1} = 56$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.
6. Para resolver la ecuación $3\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x+3}\right) - 9 = 0$, ¿cuál es la elección correcta para u a fin de transformar la ecuación a la forma cuadrática? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación.

7. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
8. $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$
9. $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$
10. $x^4 + 50x^2 + 49 = 0$
11. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
12. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
13. $a^4 - 7a^2 + 12 = 0$
14. $b^4 + 7b^2 + 12 = 0$
15. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
16. $9d^4 - 13d^2 + 4 = 0$
17. $r^4 - 8r^2 = -15$
18. $p^4 - 8p^2 = -12$
19. $z^4 - 7z^2 = 18$
20. $a^4 + a^2 = 42$
21. $-c^4 = 4c^2 - 5$
22. $9b^4 = 57b^2 - 18$
23. $\sqrt{x} = 2x - 6$
24. $x - 2\sqrt{x} = 8$
25. $x - \sqrt{x} = 6$
26. $x - 4 = -3\sqrt{x}$
27. $9x + 3\sqrt{x} = 2$
28. $8x + 2\sqrt{x} = 1$
29. $(x + 3)^2 + 2(x + 3) = 24$
30. $(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 3 = 0$
31. $6(a - 2)^2 = -19(a - 2) - 10$
32. $10(z + 2)^2 = 3(z + 2) + 1$
33. $(x^2 - 3)^2 - (x^2 - 3) - 6 = 0$
34. $(a^2 - 1)^2 - 5(a^2 - 1) - 14 = 0$
35. $2(b + 3)^2 + 5(b + 3) - 3 = 0$
36. $(z^2 - 6)^2 + 2(z^2 - 6) - 24 = 0$
37. $18(x^2 - 5)^2 + 27(x^2 - 5) + 10 = 0$
38. $28(x^2 - 8)^2 - 23(x^2 - 8) - 15 = 0$
39. $a^{-2} + 4a^{-1} + 4 = 0$
40. $x^{-2} + 10x^{-1} + 25 = 0$
41. $12b^{-2} - 7b^{-1} + 1 = 0$
42. $5x^{-2} + 4x^{-1} - 1 = 0$
43. $2b^{-2} = 7b^{-1} - 3$
44. $10z^{-2} - 3z^{-1} - 1 = 0$
45. $x^{-2} + 9x^{-1} = 10$
46. $6a^{-2} = a^{-1} + 12$
47. $x^{-2} = 4x^{-1} + 12$
48. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 6 = 0$
49. $x^{2/3} - 4x^{1/3} = -3$
50. $x^{2/3} = 3x^{1/3} + 4$
51. $b^{2/3} - 9b^{1/3} + 18 = 0$
52. $c^{2/3} - 4 = 0$
53. $-2a - 5a^{1/2} + 3 = 0$
54. $r^{2/3} - 7r^{1/3} + 10 = 0$
55. $c^{2/5} + 3c^{1/5} + 2 = 0$
56. $x^{2/5} - 5x^{1/5} + 6 = 0$

Determine todas las intersecciones del eje x de cada función.

57. $f(x) = x - 5\sqrt{x} + 4$
58. $g(x) = x - 15\sqrt{x} + 56$
59. $h(x) = x + 14\sqrt{x} + 45$
60. $k(x) = x + 7\sqrt{x} + 12$
61. $p(x) = 4x^{-2} - 19x^{-1} - 5$
62. $g(x) = 4x^{-2} + 12x^{-1} + 9$
63. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3} - 6$
64. $f(x) = x^{1/2} + 6x^{1/4} - 7$
65. $g(x) = (x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) - 24$
66. $g(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$
67. $f(x) = x^4 - 29x^2 + 100$
68. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Resolución de problemas

69. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
70. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.
71. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$.
72. Indique un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $a(x - r)^2 + b(x - r) - c = 0$.
73. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 2 y ± 1. Explique cómo obtuvo su respuesta.
74. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 3 y $\pm 2i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
75. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{5}$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
76. Escriba una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm 2i$ y $\pm 5i$. Explique cómo obtuvo su respuesta.
77. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución imaginaria? Explique.
78. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución real? Explique.
79. Resuelva la ecuación $\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} = 60$.
    a) multiplicando ambos lados por el MCD.
    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.
80. Resuelva la ecuación $1 = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$.
    a) multiplicando ambos lados por el MCD.
    b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

Determine todas las soluciones reales de cada ecuación.

81. $15(r + 2) + 22 = -\frac{8}{r + 2}$
82. $2(p + 3) + 5 = \frac{3}{p + 3}$
83. $4 - (x - 1)^{-1} = 3(x - 1)^{-2}$
84. $3(x - 4)^{-2} = 16(x - 4)^{-1} + 12$
85. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
86. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$
87. $(x^2 + 2x - 2)^2 - 7(x^2 + 2x - 2) + 6 = 0$
88. $(x^2 + 3x - 2)^2 - 10(x^2 + 3x - 2) + 16 = 0$

Determine todas las soluciones de cada ecuación.

89. $2n^4 - 6n^2 - 3 = 0$
90. $3x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **91.** Evalúe $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[2.1] **92.** Resuelva $3(x + 2) - 2(3x + 3) = -3$

[3.2] **93.** Establezca el dominio y el rango de $y = (x - 3)^2$.

[7.3] **94.** Simplifique $\sqrt[3]{16x^3y^6}$.

[7.4] **95.** Sume $\sqrt{75} + \sqrt{48}$.

8.5 Graficación de funciones cuadráticas

1. Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
2. Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola.
3. Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones.
4. Resolver problemas de máximos y mínimos.
5. Entender el desplazamiento de las parábolas.
6. Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En la sección 3.2 graficamos ecuaciones cuadráticas por medio del trazado de puntos, y en la sección 5.8 hicimos un breve análisis de las intersecciones del eje x de las funciones cuadráticas. En esta sección estudiaremos con mayor profundidad las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**. En la parte 3 se explica cómo graficar funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones. En la parte 5 estudiaremos patrones en las gráficas de las parábolas, y utilizaremos dichos patrones para determinar traslaciones, o desplazamientos, que puedan usarse para graficar parábolas.

1 Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo

Las parábolas tienen una forma parecida a la de la letra U, pero su abertura puede estar hacia arriba o hacia abajo. Para una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el *signo* del coeficiente principal, a, determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. *Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba* (vea la **figura 8.7a**). *Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo* (vea la **figura 8.7b**).

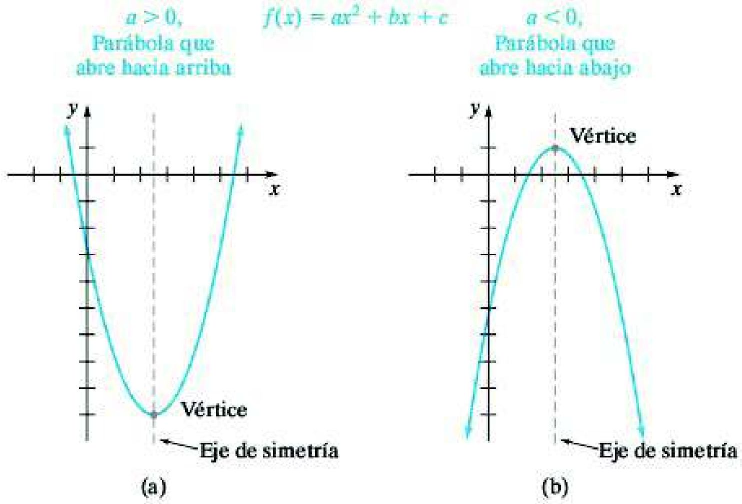


FIGURA 8.7

En el caso de las parábolas que abren hacia arriba, el **vértice** es el punto más bajo de la curva. El valor mínimo de la función es la coordenada y del vértice. El valor mínimo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función. En cuanto a las parábolas que abren hacia abajo, el vértice es el punto más alto de la curva. El valor máximo de la función es la coordenada y del vértice. El valor máximo se obtiene cuando la coordenada x del vértice se sustituye en la función.

2 Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones del eje x de una parábola

Las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tendrán **simetría** respecto de una recta vertical que pasa por el vértice. Esto significa que si dobláramos el papel a lo largo de esta línea imaginaria, denominada **eje de simetría**, los dos lados de la parábola coincidirán (vea la **figura 8.7**). A continuación se establece la ecuación para determinar el eje de simetría.

Para determinar el eje de simetría

Para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación para determinar el **eje de simetría** de la parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Ahora deduciremos la fórmula para encontrar el eje de simetría, y determinaremos las coordenadas del vértice de la parábola; comencemos con una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completemos el cuadrado con los primeros dos términos.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \text{Factorizar } a. \end{aligned}$$

Un medio del coeficiente de x es $\frac{b}{2a}$, y su cuadrado es $\frac{b^2}{4a^2}$. Sumemos y restemos este término dentro del paréntesis; el resultado es cero.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Ahora reescribimos la función de la manera siguiente.

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$ Reemplazar el trinomio con el cuadrado de un binomio.

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$ Escribir fracciones con un denominador común.

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$ Combinar los dos últimos términos; escribir primero con la variable a.

$$= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

La expresión $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ siempre será mayor o igual a cero, ¿por qué? Si $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba y tendrá un valor mínimo. Como $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ tendrá un valor mínimo cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor mínimo de la gráfica se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo y tendrá un valor máximo; éste se presentará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Para determinar el punto más bajo o el más alto de una parábola, sustituimos x por $-\frac{b}{2a}$ en la función, a fin de conocer el valor de y. El par ordenado resultante será el vértice de la parábola. Como el eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola, su ecuación se determina mediante la coordenada x del par ordenado. Así, la ecuación para determinar el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$. Observe que cuando $x = -\frac{b}{2a}$, el valor de $f(x)$ es $\frac{4ac - b^2}{4a}$. ¿Puede explicar por qué?

Para determinar el vértice de una parábola

La parábola representada por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá como eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$ y como vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Ya que con frecuencia determinamos la coordenada y del vértice sustituyendo la coordenada x del vértice en $f(x)$, el vértice también puede designarse como

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

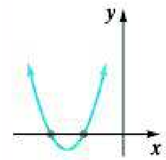
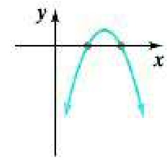
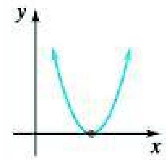
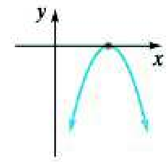
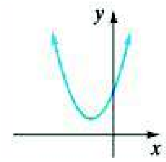
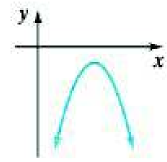
La parábola dada mediante la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ abrirá hacia arriba cuando a sea mayor que 0, y hacia abajo cuando a sea menor que 0.

Recuerde que para determinar la intersección del eje x de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización, mediante la fórmula cuadrática o completando el cuadrado.

Como se mencionó en la sección 8.2, el discriminante, $b^2 - 4ac$, puede usarse para determinar el *número de intersecciones con el eje x*. La tabla siguiente resume la información acerca del discriminante.

Discriminante $b^2 - 4ac$	Número de intersecciones de x	Posibles gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$	
> 0	Dos		
$= 0$	Una		
< 0	Ninguna		

3 Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones

En esta parte trazaremos gráficas de funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 ▸ Examine la ecuación $y = -x^2 + 8x - 12$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determine la intersección del eje y.
c) Determine el vértice.
d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.
e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es -1, es decir, menor que 0, la parábola abre hacia abajo.

b) Para determinar la intersección del eje y, hacemos $x = 0$ y despejamos y.

$$y = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$$

La intersección del eje y se da en el punto $(0, -12)$.

c) Primero determinamos la coordenada x y luego la coordenada y del vértice.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-12) - 8^2}{4(-1)} = \frac{48 - 64}{-4} = 4$$

El vértice está en $(4, 4)$. La coordenada y del vértice podría haberse obtenido también sustituyendo x por 4 en la función, y determinando el valor de y correspondiente, que es 4.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, hacemos $y = 0$.

$$0 = -x^2 + 8x - 12$$

$$\text{o} \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = 2$$

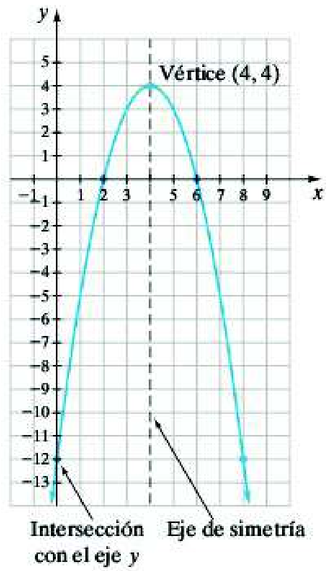


FIGURA 8.8

Así, las intersecciones del eje x se dan en $(2, 0)$ y $(6, 0)$. Estos valores también podrían determinarse por medio de la fórmula cuadrática (o completando el cuadrado).

e) Utilice toda esta información para trazar la gráfica (**figura 8.8**).

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

Observe que en el ejemplo 1, la ecuación es $y = -x^2 + 8x - 12$ y la intersección con el eje y es $(0, -12)$. En general, para cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, la intersección con el eje y será $(0, c)$.

Si al determinar las intersecciones del eje x, mediante la fórmula cuadrática, obtiene valores irracionales utilice su calculadora para estimar estos valores, y luego trace los valores decimales. Por ejemplo, si obtiene $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$, evaluaría $\dfrac{2 + \sqrt{10}}{2}$ y $\dfrac{2 - \sqrt{10}}{2}$ en su calculadora para obtener 2.58 y -0.58, respectivamente (resultados redondeados al centésimo más cercano). Por lo tanto, las intersecciones del eje x se darían en $(2.58, 0)$ y $(-0.58, 0)$.

EJEMPLO 2 ▸ Examine la función $f(x) = 2x^2 + 6x + 5$.

a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

b) Determine la intersección del eje y.

c) Determine el vértice.

d) Determine las intersecciones del eje x, si las hay.

e) Trace la gráfica.

Solución

a) Como a es 2, es decir, mayor que 0, la parábola abre hacia arriba.

b) Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, para determinar la intersección del eje y hacemos $x = 0$ y despejamos $f(x)$ o y.

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

La intersección del eje y se da en $(0, 5)$.

c)
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(5) - 6^2}{4(2)} = \frac{40 - 36}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El vértice está en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La coordenada y del vértice también puede determinarse evaluando $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

d) Para determinar las intersecciones del eje x, establecemos $f(x) = 0$.

$$0 = 2x^2 + 6x + 5$$

Este trinomio no puede factorizarse. Para determinar si esta ecuación tiene alguna solución real, evaluamos el discriminante.

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

Como el discriminante es menor que 0, esta ecuación no tiene soluciones reales. Esta respuesta era de suponerse, ya que la coordenada y del vértice es un número positivo y, por lo tanto, se ubica por arriba del eje x; ya que la parábola abre hacia arriba, no puede intersectar al eje x.

e) La gráfica se muestra en la **figura 8.9**.

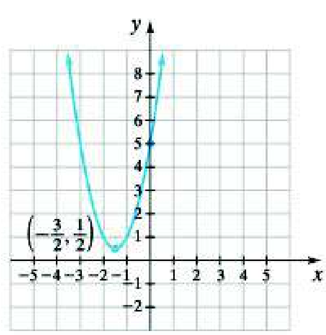


FIGURA 8.9

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

4 Resolver problemas de máximos y mínimos

Como se ilustra en la **figura 8.10a**, una parábola que abre hacia arriba tiene un **valor mínimo** en su vértice. Por otra parte, como se muestra en la **figura 8.10b**, una parábola que abre hacia abajo tiene un **valor máximo** en su vértice. Si le dan una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debe saber que el valor máximo o mínimo estará en $-\dfrac{b}{2a}$, y será $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Existen muchos problemas de la vida real en los que se requiere determinar los valores máximo o mínimo.

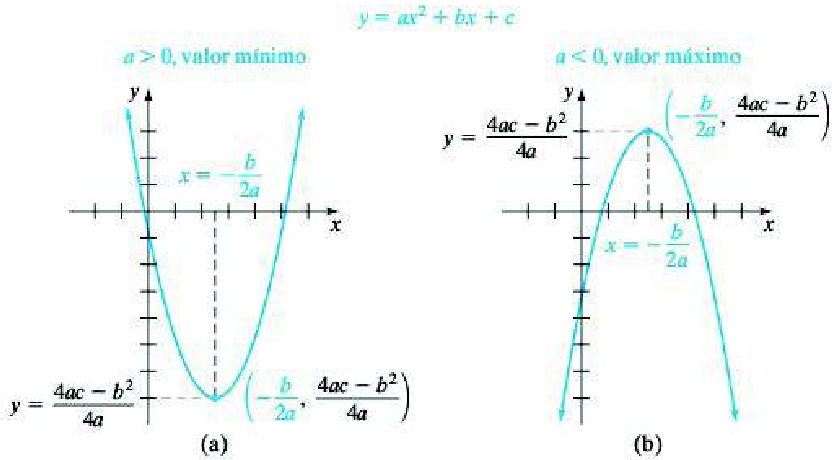


FIGURA 8.10

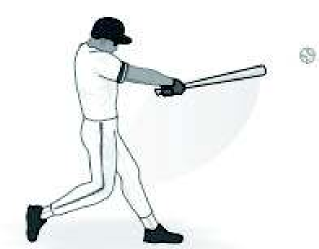


FIGURA 8.11

EJEMPLO 3 ▶ **Béisbol** Tommy Magee juega béisbol con los Cardenales de Yorktown. Durante la séptima entrada en un partido contra los Azulejos de Arlington, Magee batea de hit hacia el jardín (vea la **figura 8.11**); el contacto entre su bate y la bola se da a 3 pies del suelo. Para este hit en particular, la altura de la bola respecto del suelo, $f(t)$, en pies, en el instante t, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula

$$f(t) = -16t^2 + 52t + 3$$

a) Determine la altura máxima que alcanza la bola de béisbol.
b) Determine el tiempo que tarda la bola en alcanzar su máxima altura.
c) Determine el tiempo que tarda la bola en chocar contra el suelo.

Solución **a)** Entienda el problema La bola de béisbol sigue la trayectoria de una parábola que abre hacia abajo ($a < 0$); a consecuencia de la gravedad, la bola se eleva hasta una altura máxima para luego caer hacia el suelo. Para determinar la altura máxima que alcanza la bola, usamos la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Traduzca $\quad a = -16, \quad b = 52, \quad c = 3$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{4(-16)(3) - (52)^2}{4(-16)}$$
$$= \frac{-192 - 2704}{-64}$$
$$= \frac{-2896}{-64}$$
$$= 45.25$$

Responda La bola de béisbol alcanza una altura máxima de 45.25 pies.

b) La bola de béisbol llega a su altura máxima en

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{2(-16)} = -\frac{52}{-32} = \frac{13}{8} \quad \text{o} \quad 1\frac{5}{8} \quad \text{o} \quad 1.625 \text{ segundos}$$

c) Entienda el problema y traduzca Cuando la bola de béisbol choca contra el suelo, su altura, y, respecto de éste es 0. Por lo tanto, para determinar cuándo golpea el suelo, resolvemos la ecuación

$$-16t^2 + 52t + 3 = 0$$

Usaremos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Realice los cálculos

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2 - 4(-16)(3)}}{2(-16)}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2704 + 192}}{-32}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2896}}{-32}$$

$$\approx \frac{-52 \pm 53.81}{-32}$$

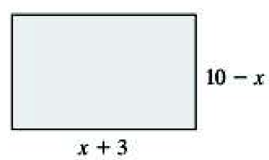
$$t \approx \frac{-52 + 53.81}{-32} \quad \text{o} \quad t \approx \frac{-52 - 53.81}{-32}$$

$$\approx -0.06 \text{ segundos} \qquad \approx 3.31 \text{ segundos}$$

Responda El único valor aceptable es 3.31 segundos. La bola de béisbol choca contra el suelo después de aproximadamente 3.31 segundos. Observe que en la parte **b)** el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima, 1.625, no es exactamente la mitad del tiempo total que está en el aire, 3.31 segundos. La razón es que fue golpeada a una altura de 3 pies, y no al nivel del suelo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

EJEMPLO 4 ▸ Área de un rectángulo Considere el rectángulo siguiente, cuya longitud es $x + 3$ y cuyo ancho es $10 - x$



a) Determine una ecuación para calcular el área, $A(x)$.

b) Determine el valor de x que proporciona el área (máxima) más grande.

c) Determine el área máxima.

Solución **a)** El área se obtiene al multiplicar la longitud por el ancho. La función para el área es

$$A(x) = (x + 3)(10 - x)$$

$$= -x^2 + 7x + 30$$

b) Entienda el problema y traduzca La gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo. Así, el valor máximo se alcanza en el vértice. Por lo tanto, el área máxima se da en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Realice los cálculos $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7}{2(-1)} = \dfrac{7}{2} = 3.5$

Responda El área máxima se alcanza cuando x es 3.5 unidades.

c) Para determinar el área máxima, sustituimos cada x de la ecuación que se obtuvo en la parte **a)** por 3.5.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 7x + 30 \\ A(3.5) &= -(3.5)^2 + 7(3.5) + 30 \\ &= -12.25 + 24.5 + 30 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

Observe que para este rectángulo la longitud es $x + 3 = 3.5 + 3 = 6.5$ unidades, y el ancho es $10 - x = 10 - 3.5 = 6.5$ unidades. En realidad el rectángulo es un cuadrado, y su área es $(6.5)(6.5) = 42.25$ unidades cuadradas. Por consiguiente, el área máxima es 42.25 unidades cuadradas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

En el ejemplo 4**c)**, el área máxima pudo haberse determinado también utilizando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Determine el área máxima utilizando dicha fórmula. La respuesta debe ser la misma que se mencionó antes, 42.25 unidades cuadradas.

EJEMPLO 5 ▸ Corral rectangular John W. Brown construye un corral rectangular para unos terneros recién nacidos (vea la **figura 8.12**). Si planea utilizar 160 metros de cerca, determine las dimensiones del corral con la mayor área.

FIGURA 8.12

Solución **Entienda el problema** Se nos ha informado cuál es el perímetro del corral, 160 metros. La fórmula para determinar el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, así que, en este problema, $160 = 2l + 2w$. Nos piden maximizar el área, A, donde

$$A = lw$$

Necesitamos expresar el área en términos de una variable, no de dos. Para hacerlo en términos de l, despejamos w en la fórmula del perímetro, $160 = 2l + 2w$, y luego hacemos una sustitución.

Traduzca

$$\begin{aligned} 160 &= 2l + 2w \\ 160 - 2l &= 2w \\ 80 - l &= w \end{aligned}$$

Realice los cálculos Ahora sustituimos $80 - l$ por w en $A = lw$. Esto da

$$\begin{aligned} A &= lw \\ A &= l(80 - l) \\ A &= -l^2 + 80l \end{aligned}$$

En esta ecuación cuadrática, $a = -1$, $b = 80$ y $c = 0$. El área máxima se obtendrá cuando

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$$

Responda La longitud que dará el área máxima es 40 metros. El ancho, $w = 80 - l$, también será igual a 40 metros. Por lo tanto, un cuadrado con dimensiones de 40 por 40 metros dará el área máxima.

El área máxima también puede determinarse sustituyendo $l = 40$ en la fórmula $A = l(80 - l)$, o mediante $A = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. En cualquier caso, la respuesta es 1600 metros cuadrados.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 93

Cuando obtuvimos la ecuación $A = -l^2 + 80l$ en el ejemplo 5, podríamos haber completado el cuadrado como sigue:

$$\begin{aligned} A &= -(l^2 - 80l) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600 - 1600) \\ &= -(l^2 - 80l + 1600) + 1600 \\ &= -(l - 40)^2 + 1600 \end{aligned}$$

Con base en esta ecuación, podemos determinar que el área máxima, 1600 metros cuadrados, se alcanza cuando la longitud es de 40 metros.

5 Entender el desplazamiento de las parábolas

Ahora veremos otro método para graficar parábolas. En él, se comienza con una gráfica de la forma $f(x) = ax^2$, y ésta se **desplaza**, o traslada para obtener la gráfica de la función que se está buscando. Como referencia, la **figura 8.13a** muestra las gráficas de $f(x) = x^2, g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. La **figura 8.13b** muestra las gráfica de $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

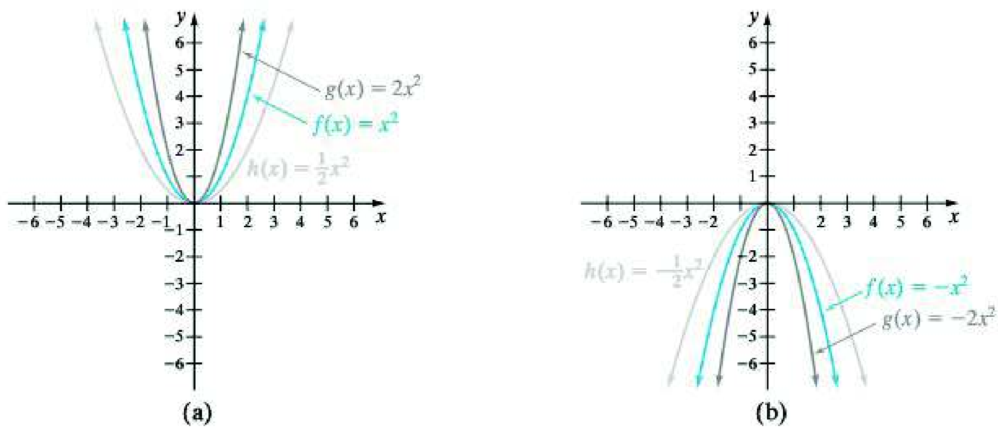


FIGURA 8.13

Trazando los puntos, usted puede verificar que cada una de las gráficas es correcta. Observe que en las **figuras 8.13a** y **b** el *valor de a* en $f(x) = ax^2$ determina el ancho de la parábola. Conforme $|a|$ aumenta, la parábola se hace más angosta, y conforme $|a|$ disminuye, la parábola se hace más ancha.

Ahora consideremos las tres funciones $f(x) = x^2, g(x) = (x - 2)^2$ y $h(x) = (x + 2)^2$. Estas funciones se grafican en la **figura 8.14**. (Si lo desea, trace los puntos para verificar que éstas son las gráficas de las funciones).

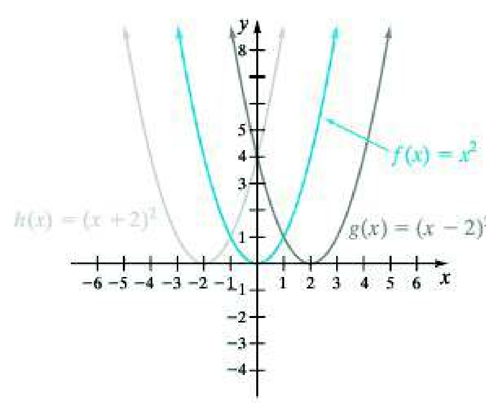


FIGURA 8.14

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado, o desplazado, 2 unidades hacia la derecha, y $h(x)$ se ha trasladado 2 unidades hacia la izquierda. En general, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$. La gráfica de una ecuación de la forma $g(x) = a(x - h)^2$ estará desplazada horizontalmente respecto de la gráfica de $f(x) = ax^2$. *Si h es un número real positivo, la gráfica de* $g(x) = a(x - h)^2$ *estará desplazada h unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de* $f(x) = ax^2$. *Si h es un número real negativo, la gráfica de* $g(x) = a(x - h)^2$ *estará desplazada* $|h|$ *unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de* $f(x) = ax^2$.

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 3$, ilustradas en la **figura 8.15**. Mediante el trazo de puntos, puede verificar que éstas son las gráficas de las tres funciones.

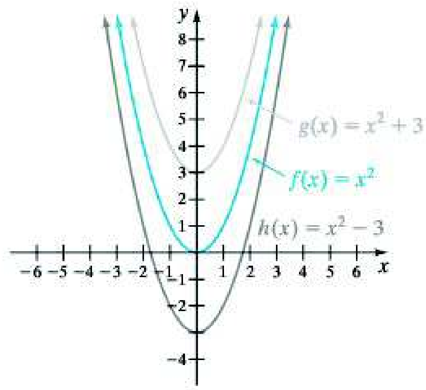


FIGURA 8.15

Observe que las gráficas de $g(x)$ y de $h(x)$ son idénticas a la gráfica de $f(x)$, salvo que $g(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia arriba y $h(x)$ se ha trasladado 3 unidades hacia abajo. En general, *si k es un número real positivo la gráfica de* $g(x) = ax^2 + k$ *es la gráfica de* $f(x) = ax^2$ *desplazada k unidades hacia arriba, y* $|k|$ *unidades hacia abajo si k es un número real negativo.*

Ahora considere las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 3$, ilustradas en la **figura 8.16**.

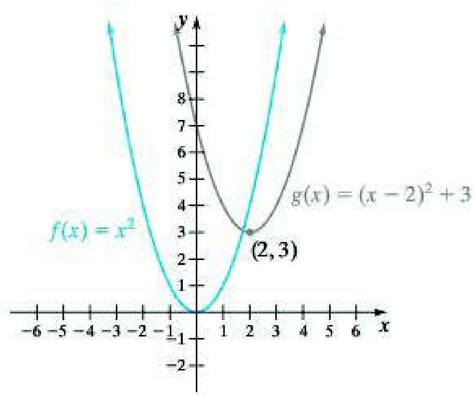


FIGURA 8.16

Observe que la gráfica de $g(x)$ tiene la misma forma general que la de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba. Esta gráfica y el análisis anterior conducen a las importantes conclusiones siguientes.

Desplazamientos de parábolas

Para cualquier función $f(x) = ax^2$, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$, pero desplazada según las siguientes condiciones:

- Si h es un número real positivo, la gráfica se desplazará h unidades hacia la derecha.
- Si h es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|h|$ unidades hacia la izquierda.
- Si k es un número real positivo, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba.
- Si k es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|k|$ unidades hacia abajo.

Examine la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ en la **figura 8.16**. Observe que su eje de simetría está en $x = 2$ y su vértice se da en $(2, 3)$.

Eje de simetría y vértice de una parábola

La gráfica de cualquier función de la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

será una parábola con eje de simetría en $x = h$ y vértice en (h, k).

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$	$x = 5$	$(5, 7)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$	$x = 6$	$(6, -3)$	abajo, $a < 0$

Ahora considere $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$. Podemos reescribir esta función como $f(x) = 2[x - (-5)]^2 + 3$; por lo tanto, h tiene un valor de -5 y k tiene un valor de 3. La gráfica de esta función tiene su eje de simetría en $x = -5$ y su vértice en $(-5, 3)$.

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$	$x = -4$	$(-4, -2)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	abajo, $a < 0$

Ahora estamos preparados para graficar parábolas utilizando las traslaciones.

EJEMPLO 6 La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se ilustra en la **figura 8.17**. Tomándola como guía, grafique $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$.

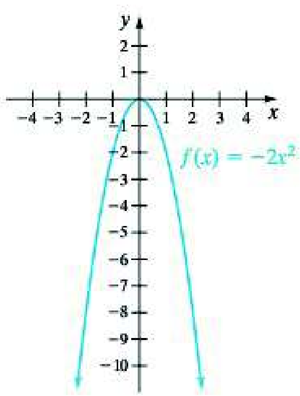


FIGURA 8.17

Solución La función $g(x)$ puede escribirse como $g(x) = -2[x - (-3)]^2 - 4$. Por lo tanto, en la función, h tiene un valor de -3 y k un valor de -4. Así, la gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$ desplazada 3 unidades hacia la izquierda (ya que $h = -3$) y 4 unidades hacia abajo (ya que $k = -4$). Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **figura 8.18**.

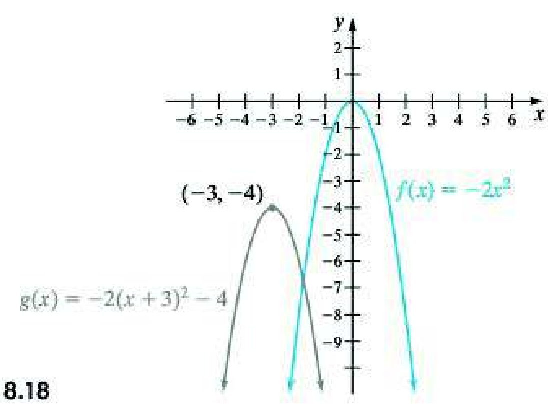


FIGURA 8.18

Ahora resuelva el ejercicio 49

En la parte 2 de esta sección iniciamos con una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y completamos el cuadrado para obtener

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Además, se mencionó que el vértice de la parábola de esta función es $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Suponga que en la función sustituimos h por $-\frac{b}{2a}$ y k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Entonces obtenemos

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que sabemos da por resultado una parábola con vértice en (h, k). Por lo tanto, las dos funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tienen el mismo vértice y el mismo eje de simetría para cualesquiera funciones dadas.

6 Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si queremos graficar parábolas utilizando desplazamientos, necesitamos cambiar la forma de la función de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para hacerlo, *completamos el cuadrado* como se estudió en la sección 8.1. Al completar el cuadrado obtenemos un trinomio cuadrado perfecto, que puede representarse como el cuadrado de un binomio. En los ejemplos 7 y 8 se explica el procedimiento, mismo que usaremos nuevamente en un capítulo posterior, cuando analicemos las secciones cónicas.

EJEMPLO 7 Dada $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Utilizamos los términos x^2 y $-6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

$$f(x) = (x^2 - 6x) + 10$$

Ahora tomamos la mitad del coeficiente del término en x y lo elevamos al cuadrado.

$$\left[\frac{1}{2}(-6)\right]^2 = 9$$

Luego sumamos este valor, 9, dentro de los paréntesis. Como sumamos 9 dentro del paréntesis, sumamos -9 fuera de los paréntesis. Sumar 9 y -9 a una expresión es como si sumáramos 0, ya que su valor no cambia.

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 10$$

Al hacer esto hemos creado un trinomio cuadrado perfecto dentro de los paréntesis más una constante fuera de los paréntesis. Expresamos el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Ahora la función está en la forma que buscábamos.

b) Como $a = 1$ es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba. El eje de simetría de la parábola está en $x = 3$, y su vértices se da en $(3, 1)$. La intersección con el eje y puede obtenerse con facilidad sustituyendo $x = 0$ y determinando el valor de $f(x)$. Cuando $x = 0$, $f(x) = (-3)^2 + 1 = 10$. Por lo tanto, la intersección con el eje y se da en 10. Trazando el vértice, la intersección con el eje y y unos cuantos puntos más, obtenemos la gráfica de la **figura 8.19**. Para compararlas, la figura también muestra la gráfica de $y = x^2$.

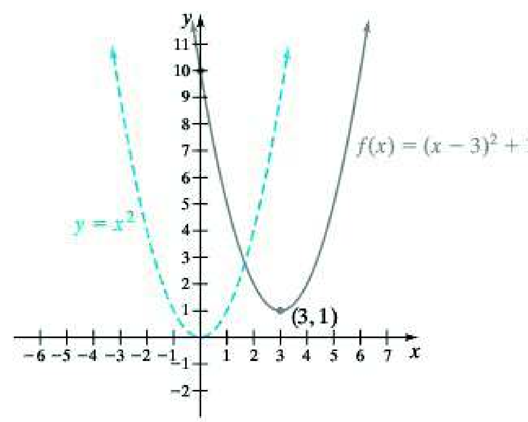


FIGURA 8.19

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 8 ▸ Dada $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$,

a) Escriba $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
b) Grafique $f(x)$.

Solución

a) Cuando el coeficiente principal no es 1, lo factorizamos de los términos que incluyen a la variable.

$$f(x) = -2(x^2 + 5x) - 13$$

Luego completamos el cuadrado

La mitad del coeficiente del término de x al cuadrado

$$\left[\frac{1}{2}(5)\right]^2 = \frac{25}{4}$$

Si sumamos $\frac{25}{4}$ dentro de los paréntesis, en realidad sumamos $-2\left(\frac{25}{4}\right)$ o $-\frac{25}{2}$, ya que cada término dentro de los paréntesis se multiplica por -2. Por lo tanto, para $\frac{25}{2}$ fuera de los paréntesis.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{2} - 13 \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo. El eje de simetría está en $x = -\frac{5}{2}$ y el vértice se da en $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La intersección con el eje y está en $f(0) = -13$. Trazamos unos cuantos puntos y dibujamos la gráfica en la **figura 8.20**. Para comparar, en la figura, también se ilustra la gráfica de $y = -2x^2$.

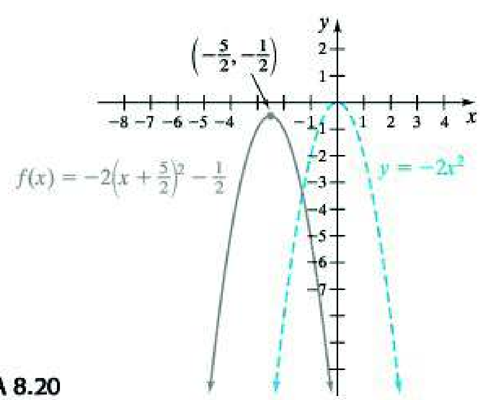


FIGURA 8.20

Observe que $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ no tiene intersecciones con el eje x. Por lo tanto, no hay valores reales de x para los que $f(x) = 0$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 63

Una segunda manera de cambiar la ecuación de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ es hacer $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Después, se determinan los valores para h y k, y luego se sustituyen los valores obtenidos en $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$ del ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$ y $c = -13$; entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cómo se denomina la gráfica de una ecuación cuadrática?
2. ¿Cuál es el vértice de una parábola?
3. ¿Qué es el eje de simetría de una parábola?
4. ¿Cuál es la ecuación para determinar el eje de simetría de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
5. ¿Cuál es el vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?
6. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene una función cuadrática si el discriminante es **a)** < 0, **b)** $= 0$, **c)** > 0?
7. ¿La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá un máximo o un mínimo si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$? Explique.
8. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función cuadrática.
9. Explique cómo determinar las intersecciones con el eje y de la gráfica de una función cuadrática.
10. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explique cómo cambia la forma de $f(x)$ conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.
11. Considere la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la forma general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?
12. Las gráficas de $f(x) = ax^2$ y de $g(x) = -ax^2$, ¿tienen el mismo vértice para cualquier número real, a, distinto de cero? Explique.
13. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.
14. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ tiene un valor máximo o mínimo? Explique.

Práctica de habilidades

En cada caso, determine: **a)** *si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo;* **b)** *la intersección con el eje y;* **c)** *el vértice;* **d)** *las intersecciones con el eje x (si las hay), y* **e)** *dibuje la gráfica.*

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$
16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$
17. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$
19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$
21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$
22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$
23. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

24. $g(x) = x^2 + 6x + 13$

25. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

26. $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

27. $r(x) = x^2 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 4x$

29. $l(x) = -x^2 + 5$

30. $g(x) = -x^2 + 6x$

31. $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32. $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

33. $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

34. $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35. $y = 3x^2 + 4x - 6$

36. $y = x^2 - 6x + 4$

37. $y = 2x^2 - x - 6$

38. $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40. $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Utilizando como guía las gráficas de las **figuras 8.13** *a* **8.16**, *grafique cada función y determine el vértice.*

41. $f(x) = (x - 3)^2$

42. $f(x) = (x - 4)^2$

43. $f(x) = (x + 1)^2$

44. $f(x) = (x + 2)^2$

45. $f(x) = x^2 + 3$

46. $f(x) = x^2 + 5$

47. $f(x) = x^2 - 1$

48. $f(x) = x^2 - 4$

49. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

50. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

51. $f(x) = (x + 4)^2 + 4$

52. $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

53. $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$

54. $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

55. $y = -2(x - 2)^2 + 2$

56. $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

58. $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59 a 68, **a)** *exprese cada función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, y* **b)** *dibuje la gráfica de cada función y determine el vértice.*

59. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

60. $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61. $g(x) = x^2 - x - 3$

62. $f(x) = x^2 - x + 1$

63. $f(x) = -x^2 - 4x - 6$

64. $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65. $g(x) = x^2 - 4x - 1$

66. $p(x) = x^2 - 2x - 6$

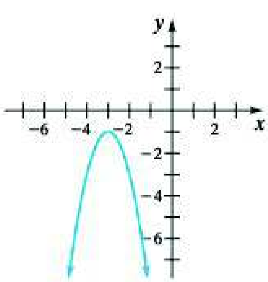
67. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

68. $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

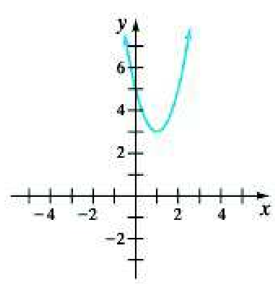
Resolución de problemas

De las funciones de los ejercicios 69 a 72, identifique cuál corresponde a cada una de las gráficas marcadas **a)** *a* **d)**.

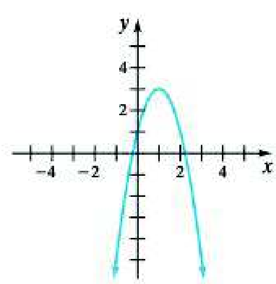
a)



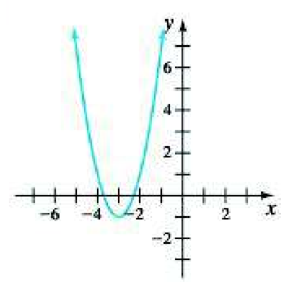
b)



c)



d)



69. $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$

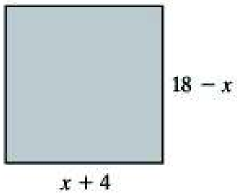
70. $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

71. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

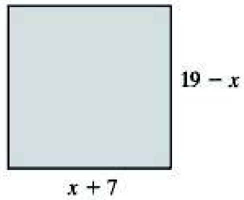
72. $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

Área *Para cada rectángulo,* **a)** *determine el valor de x que da el área máxima, y* **b)** *determine el área máxima.*

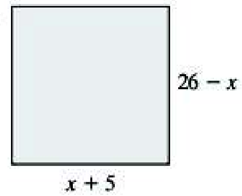
73.



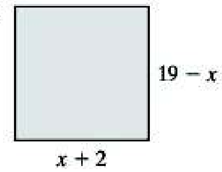
74.



75.



76.



77. Venta de pilas La función para calcular el ingreso por la venta de n pilas es $R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n$. Determine **a)** el número de pilas que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

78. Venta de relojes La función para calcular el ingreso por la venta de n relojes es $R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n$. Determine **a)** el número de relojes que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

79. Matrícula El número de alumnos inscritos en una escuela puede calcularse mediante la función

$$N(t) = -0.043t^2 + 1.82t + 46.0$$

donde t es el número de años desde 1989 y $1 \leq t \leq 22$. ¿En qué año se obtendrá el máximo de alumnos inscritos?

80. Escuelas sanas En Estados Unidos, el porcentaje de estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas puede calcularse mediante la función

$$f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$$

donde a es la edad del estudiante y $12 < a < 20$. ¿A qué grupo de edad pertenecen los estudiantes que representan el porcentaje más alto entre los que afirman que en sus escuelas se consumen drogas?

81. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = (x - 2)^2 + \frac{5}{2}$ y $g(x) = (x - 2)^2 - \frac{3}{2}$?

82. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x - 4)^2 - 3$ y $g(x) = -3(x - 4)^2 + 2$?

83. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x + 4)^2 - 3$ y $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$?

84. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2$ y $g(x) = 2(x + 5)^2 - 2$?

85. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^2$ y su vértice en $(3, -2)$.

86. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ y su vértice en $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

87. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -4x^2$ y su vértice en $\left(-\frac{3}{5}, -\sqrt{2}\right)$.

88. Escriba la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = \frac{3}{5}x^2$ y su vértice en $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

89. Considere $f(x) = x^2 - 8x + 12$ y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.

a) Sin graficar, ¿puede comparar las gráficas de las dos funciones?

b) ¿Las gráficas tienen las mismas intersecciones con el eje x? Explique.

c) ¿Las gráficas tienen el mismo vértice? Explique.

d) Grafique ambas funciones en los mismos ejes.

90. Analizando el coeficiente principal de una ecuación cuadrática y determinando las coordenadas del vértice de su gráfica, explique cómo se puede determinar el número de intersecciones con el eje x que tiene la parábola.

91. Venta de boletos El Club de Teatro de la preparatoria Johnson trata de establecer el precio de los boletos para una obra. Si el precio es muy bajo no recolectará suficiente dinero para cubrir los gastos, y si es muy alto tendrá poco público. Ellos creen que su ingreso total por representación, I, en cientos de dólares, puede calcularse mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, 0 \leq x \leq 24$$

donde x es el costo de un boleto.

a) Dibuje una gráfica del ingreso contra el costo de un boleto.

b) Determine el costo mínimo de un boleto para que el productor llegue al punto de equilibrio.

c) Determine el costo máximo que puede cobrar el productor por cada boleto para llegar al punto de equilibrio.

d) ¿Cuánto debe cobrar para recibir el ingreso máximo?

e) Determine el ingreso máximo.

92. Lanzamiento de un objeto Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia a la que se encuentra el objeto respecto del piso, d, después de t segundos, puede calcularse mediante la fórmula $d = -16t^2 + 192t$.

a) Determine la distancia que habrá entre el objeto y el piso después de 3 segundos.

b) Haga una gráfica de la distancia contra el tiempo.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?

d) ¿En qué momento alcanzará su altura máxima?

e) ¿En qué instante el objeto chocará contra el piso?

93. Utilidad Una compañía productora de alimento para aves obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -0.4x^2 + 80x - 200$, donde x es el número de bolsas de alimento para aves fabricadas y vendidas.

a) Determine el número de bolsas de alimento para aves que debe vender la compañía para obtener la utilidad máxima.

b) Determine la utilidad máxima.

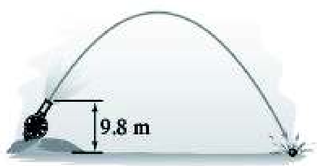
94. Utilidad Una mueblería especializada en mecedoras obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.2x^2 + 180x - 280$, donde x es el número de mecedoras fabricadas y vendidas.

a) Determine el número de mecedoras que la mueblería debe vender en una semana para obtener la utilidad máxima.

b) Determine la utilidad máxima.

95. Disparo de un cañón Si un cañón se dispara desde una altura de 9.8 metros por arriba del suelo, a cierto ángulo, la altura de la bala respecto del suelo, h, en metros en el instante t, en segundos, se determina por medio de la función.

$$h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$$



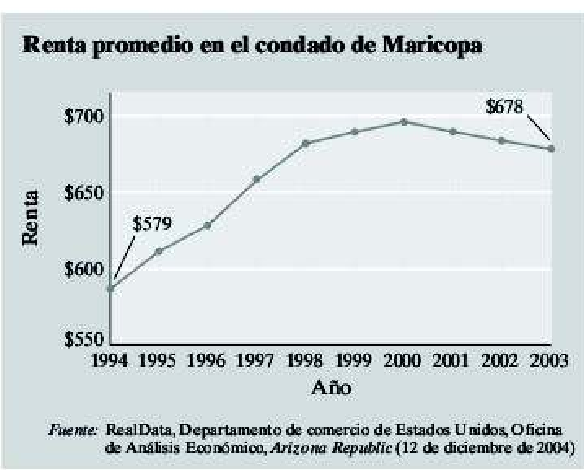
a) Determine la altura máxima que alcanza la bala del cañón.

b) Determine el tiempo que tarda la bala para llegar a su altura máxima.

c) Determine el tiempo que tarda la bala en chocar contra el suelo.

96. Lanzamiento de un balón Ramon Loomis lanza un balón al aire con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura del balón en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $h = 96t - 16t^2$. ¿En qué instante el balón llega a su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

97. Alquiler de una casa La gráfica siguiente muestra la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, Arizona (complejos de 50 o más apartamentos), de 1994 a 2003.



Se puede emplear la función $r(t) = -2.723t^2 + 35.273t + 579$ para calcular la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa, en donde t es el número de años desde 1994.

a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime la renta mensual promedio de un apartamento en el condado de Maricopa en 2007.

b) ¿En qué año la renta mensual promedio de un apartamento fue máxima?

98. Dólar canadiense La gráfica siguiente muestra el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de cada año, de 2000 a 2005.

Se puede usar la función $C(t) = 0.019t^2 - 0.074t + 0.702$ para calcular el valor de un dólar canadiense en dólares estadounidenses para el 22 de febrero de cada año, donde t es el número de años desde 2000.

a) Si suponemos que la tendencia continúa, estime el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses, el 22 de febrero de 2008.

b) ¿El 22 de febrero de qué año fue máximo el valor de un dólar canadiense, en dólares estadounidenses?

99. Diseño de interiores Jake Kishner está diseñando los planos de su casa. ¿Cuál es el área máxima posible de una habitación si su perímetro será de 80 pies?

100. Área máxima ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un jardín rectangular para alcanzar su área máxima, si el perímetro será de 70 pies?

101. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 8 unidades? ¿Cuáles son los números?

102. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 10 unidades? ¿Cuáles son los números?

103. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 60? ¿Cuáles son los números?

104. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da por resultado 5? ¿Cuáles son los números?

La utilidad de una compañía, en dólares, es la diferencia entre sus ingresos y sus gastos. En los ejercicios 105 y 106 se dan las funciones de gastos, $C(x)$, y de ingresos, $R(x)$. La x representa el número de artículos producidos y vendidos a los distribuidores. Determine **a)** *la utilidad máxima de la compañía, y* **b)** *el número de artículos que deben producirse y venderse para obtener la utilidad máxima.*

105. $C(x) = 2000 + 40x$
$R(x) = 800x - x^2$

106. $C(x) = 5000 + 12x$
$R(x) = 2000x - x^2$

Retos

107. Béisbol En el ejemplo 3 de esta sección usamos la función $f(t) = -16t^2 + 52t + 3$ para determinar que la altura máxima, f, alcanzada por una bola de béisbol golpeada por Tommy Magee fue de 45.25 pies. La bola alcanzó esta altura 1.625 segundos después de que fue bateada.
Repase el ejemplo 3.

a) Completando el cuadrado, escriba $f(t)$ en la forma $f(t) = a(t - h)^2 + k$.

b) Mediante la función que obtuvo en la parte **a)**, determine la altura máxima que alcanza la bola de béisbol y el tiempo que tarda en llegar a ella a partir de que fue bateada.

c) ¿Las respuestas que obtuvo en la parte **b)**, son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo 3? Si no es así, explique por qué.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 108.

108. a) Miembro 1 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que no se intersequen.

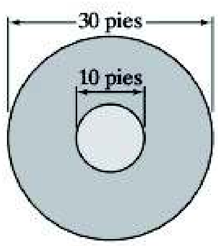
b) Miembro 2 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ninguna de ellas tenga intersecciones con el eje x y los vértices de ambas se den en lados opuestos del eje x.

c) Miembro 3 del grupo: Escriba dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ambas tengan el mismo vértice, pero que la parábola de una abra hacia arriba y la de la otra abra hacia abajo.

d) Revisen en grupo sus respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)**, y decidan si son correctas. Si hay alguna incorrecta, corríjanla.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **109.** Determine el área de la región exterior de la figura.



[3.7] **110.** Grafique $y \leq \frac{2}{3}x + 3$.

[4.2] **111.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

[4.5] **112.** Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

[6.1] **113.** Divida $(x - 3) \div \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x}$.

8.6 Desigualdades cuadráticas y de otros tipos con una variable

1 Resolver desigualdades cuadráticas.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales.

3 Resolver desigualdades racionales.

En la sección 2.5 se analizaron las desigualdades lineales con una variable. Ahora estudiaremos las desigualdades cuadráticas con una variable.

Cuando el signo de igual en una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se reemplaza por un signo de desigualdad, obtenemos una **desigualdad cuadrática**.

Ejemplos de desigualdades cuadráticas

$$x^2 + x - 12 > 0, \qquad 2x^2 - 9x - 5 \leq 0$$

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que la hacen verdadera. Por ejemplo, si sustituimos x por 5 en $x^2 + x - 12 > 0$, obtenemos

$$x^2 + x - 12 > 0$$
$$5^2 + 5 - 12 \overset{?}{>} 0$$
$$18 > 0 \quad \text{Verdadero}$$

La desigualdad es verdadera cuando x es 5, por lo que 5 satisface la desigualdad. Sin embargo, 5 no es la única solución; existen otros valores que satisfacen (o son soluciones de) la desigualdad. ¿El número 4 satisface la desigualdad? ¿El número 2?

1 Resolver desigualdades cuadráticas

Para determinar las soluciones de desigualdades cuadráticas pueden usarse diferentes métodos. Empezaremos por analizar el de la **graficación de signos**. Considere la función $f(x) = x^2 + x - 12$, cuya gráfica se muestra en la **figura 8.21a**. La **figura 8.21b** muestra, en color rojo, que cuando $x < -4$ o $x > 3$, $f(x) > 0$ o $x^2 + x - 12 > 0$. La parte de la parábola en color negro muestra que cuando $-4 < x < 3$, $f(x) < 0$ o $x^2 + x - 12 < 0$.

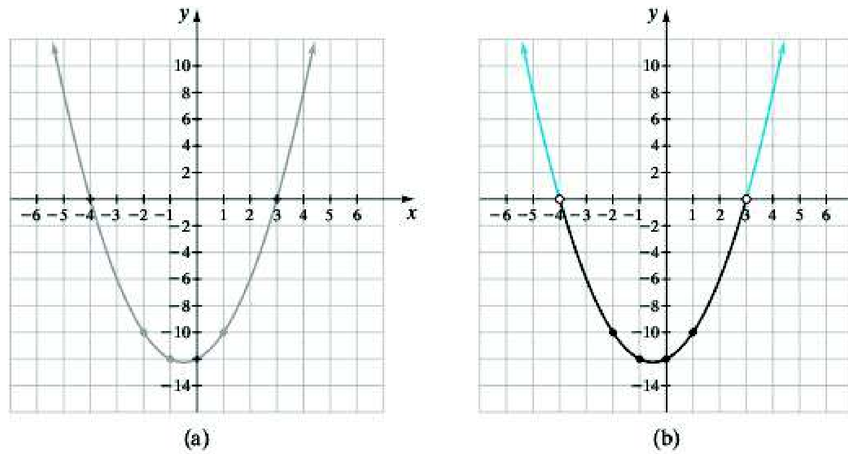


FIGURA 8.21

La graficación de signos consiste en trazar la gráfica correspondiente a la desigualdad para determinar cuáles valores de la variable la satisfacen, tal como se acaba de mostrar. En muchos casos, sin embargo, trazar la gráfica de una función podría ser complicado o tomar demasiado tiempo, por lo que hay métodos alternativos para resolver desigualdades cuadráticas y de otros tipos.

En el ejemplo 1 se ilustra cómo se resuelve $x^2 + x - 12 > 0$ mediante una recta numérica, y se explica el procedimiento.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$. Proporcione la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Haga la desigualdad igual a 0 y resuelva la ecuación.

$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

Los números obtenidos se denominan **valores frontera**, y se usan para dividir una recta numérica en intervalos. Si la desigualdad original es $<$ o $>$, los valores frontera no son parte de los intervalos; si la desigualdad original es $\leq$ o $\geq$ los valores frontera son parte de los intervalos.

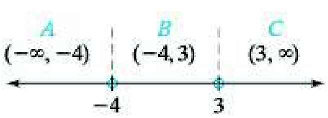


FIGURA 8.22

En la **figura 8.22** se identifican los intervalos A, B y C. A continuación, seleccionamos un valor de prueba en *cada* intervalo. Luego sustituimos cada uno de esos números, de uno en uno, en $x^2 + x - 12 > 0$ o en $(x + 4)(x - 3) > 0$, y determinamos si

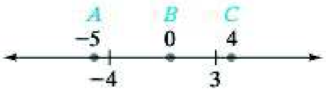


FIGURA 8.23

hacen que la desigualdad sea verdadera. Si el valor de prueba satisface la desigualdad, significa que todos los demás valores de ese intervalo también lo harán. Si el valor de prueba no satisface la desigualdad, ningún número del intervalo lo hará.

En este ejemplo usaremos los valores de prueba -5 en el intervalo A, 0 en el intervalo B, y 4 en el intervalo C (vea la **figura 8.23**).

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
¿$x^2 + x - 12$ es > 0?	¿$x^2 + x - 12$ es > 0?	¿$x^2 + x - 12$ es > 0?
$(-5)^2 - 5 - 12 \overset{?}{>} 0$	$0^2 + 0 - 12 \overset{?}{>} 0$	$4^2 + 4 - 12 \overset{?}{>} 0$
$8 > 0$	$-12 > 0$	$8 > 0$
Verdadera	*Falsa*	*Verdadera*

Como los valores de prueba en los intervalos A y C satisfacen la desigualdad, la solución es todos los números reales en los intervalos A y C. El símbolo de desigualdad es $>$. Los valores -4 y 3 no se incluyen en la solución, ya que hacen que la desigualdad sea igual a 0.

FIGURA 8.24

Las respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)** son las siguientes.

a) La solución se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.24**.

b) La solución en notación de intervalos es $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

c) La solución en notación constructiva de conjuntos es $\{x|x < -4 \text{ o } x > 3\}$.

Observe que todas estas soluciones son consistentes con la gráfica de la **figura 8.21b**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

Para resolver desigualdades cuadráticas y de otros tipos

1. Escriba la desigualdad como una ecuación y resuélvala.
2. Si resuelve una desigualdad racional, determine los valores que hacen que el denominador sea igual a 0.
3. Construya una recta numérica. Marque las soluciones obtenidas en los pasos 1 y 2. Marque el valor más pequeño a la izquierda, e incremente hacia la derecha.
4. Seleccione un valor de prueba en cada intervalo y determine si satisface la desigualdad. También pruebe los valores frontera.
5. Escriba la solución en la forma solicitada por su profesor.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$. Proporcione la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Escriba la desigualdad como una ecuación, y resuélvala.

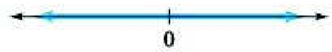
$$x^2 - 4x = -4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)(x - 2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 2$$

FIGURA 8.25

Como ambos factores son iguales, existe un solo valor frontera, 2 (vea la **figura 8.25**). Ambos valores de prueba, 1 y 3, hacen que la desigualdad sea verdadera.

Intervalo *A*	Intervalo *B*
$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba, 1	Valor de prueba, 3
$x^2 - 4x \geq -4$	$x^2 - 4x \geq -4$
$1^2 - 4(1) \overset{?}{\geq} -4$	$3^2 - 4(3) \overset{?}{\geq} -4$
$1 - 4 \overset{?}{\geq} -4$	$9 - 12 \overset{?}{\geq} -4$
$-3 \geq -4$ *Verdadera*	$-3 \geq -4$ *Verdadera*

El conjunto solución incluye ambos intervalos y el valor frontera, 2. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Las respuestas a las partes **a)**, **b)** y **c)** son:

a) 

b) $(-\infty, \infty)$ **c)** $\{x|-\infty < x < \infty\}$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

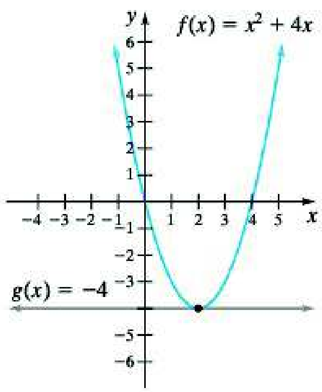


FIGURA 8.26

Podemos comprobar la solución del ejemplo 2 mediante una gráfica. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = -4$. Para que $x^2 - 4x \geq -4$ sea verdadero, necesitamos que $f(x) \geq g(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **figura 8.26**.

Observe que $f(x) = g(x)$ en $x = 2$ y $f(x) > g(x)$ para todos los demás valores de x. Por lo tanto, $f(x) \geq g(x)$ para todos los valores de x, y el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

En el ejemplo 2, si reescribimos la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$ como $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ y luego como $(x - 2)^2 \geq 0$, podemos ver que la solución debe ser el conjunto de los números reales, ya que $(x - 2)^2$ debe ser mayor o igual a 0 para cualquier número real x. La solución a $x^2 - 4x < -4$ es el conjunto vacío, $\varnothing$. ¿Puede explicar por qué?

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la desigualdad $x^2 - 2x - 4 \leq 0$. Exprese la solución en notación de intervalos.

Solución Primero necesitamos resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$. Como esta ecuación no se puede factorizar, utilizamos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

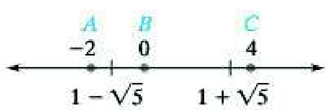


FIGURA 8.27

Los valores frontera son $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$. El valor de $1 - \sqrt{5}$ es aproximadamente -1.24 y el valor de $1 + \sqrt{5}$ es alrededor de 3.24. Seleccionaremos como valores de prueba a -2, 0 y 4 (vea la **figura 8.27**).

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, 1 - \sqrt{5})$	$(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$	$(1 + \sqrt{5}, \infty)$
Valor de prueba, -2	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$
$(-2)^2 - 2(-2) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0^2 - 2(0) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$4^2 - 2(4) - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 + 4 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0 - 0 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$16 - 8 - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 \leq 0$	$-4 \leq 0$	$4 \leq 0$
Falso	*Verdadero*	*Falso*

FIGURA 8.28

Como el símbolo de la desigualdad es $\leq$ y los valores frontera hacen que la desigualdad sea igual a 0, éstos son parte de la solución. Así, la solución en notación de intervalos es $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$ y se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.28**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

Sugerencia útil

Si $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, tiene dos soluciones reales distintas, entonces:

Desigualdad de la forma	La solución es	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	Intervalos de los extremos	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	Intervalo central	

El ejemplo 1 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, y el ejemplo 3 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$. Como el ejemplo 2 no tiene dos soluciones reales distintas, esta sugerencia útil no se aplica.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales

Puede emplearse un procedimiento similar al usado anteriormente para resolver otras **desigualdades polinomiales**, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $(3x - 2)(x + 3)(x + 5) < 0$. Ilustre la solución en una recta numérica y escríbala en notación de intervalos y en notación constructiva de conjuntos.

Solución Utilizamos la propiedad del factor nulo para resolver la ecuación $(3x - 2)(x + 3)(x + 5) = 0$.

$$3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = -3 \qquad\qquad x = -5$$

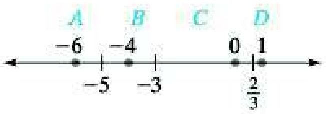


FIGURA 8.29

Las soluciones -5, -3 y $\frac{2}{3}$ dividen la recta numérica en cuatro intervalos (vea la **figura 8.29**). Los valores de prueba que usaremos son -6, -4, 0 y 1. En la tabla siguiente se muestran los resultados.

Intervalo	Valor de prueba	$(3x - 2)(x + 3)(x + 5)$	<0
$A: (-\infty, -5)$	-6	-60	Verdadero
$B: (-5, -3)$	-4	14	Falso
$C: \left(-3, \frac{2}{3}\right)$	0	-30	Verdadero
$D: \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	1	24	Falso

FIGURA 8.30

Como el símbolo original de la desigualdad es $<$, los valores frontera no son parte de la solución. La solución, intervalos A y C, se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.30**; en notación constructiva de conjuntos es $\left\{x \,\middle|\, x < -5 \text{ o } -3 < x < \frac{2}{3}\right\}$ y en notación de intervalos es $(-\infty, -5) \cup \left(-3, \frac{2}{3}\right)$.

Ahora resuelva el ejercicio 27

EJEMPLO 5 Dada $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, determine todos los valores de x para los que $f(x) \geq 0$. Ilustre la solución en una recta numérica y proporcione la solución en notación de intervalos.

Solución Necesitamos resolver la desigualdad

$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Empezamos resolviendo la ecuación $3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$.

$$3x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$3x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

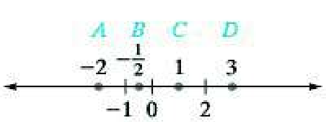


FIGURA 8.31

Las soluciones -1, 0 y 2 dividen la recta numérica en cuatro intervalos (vea la **figura 8.31**). Los valores de prueba que usaremos son -2, $-\frac{1}{2}$, 1 y 3.

Intervalo	Valor de prueba	$3x^3 - 3x^2 - 6x$	≥ 0
A: $(-\infty, 1)$	-2	-24	Falso
B: $(-1, 0)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{15}{8}$	Verdadero
C: $(0, 2)$	1	-6	Falso
D: $(2, \infty)$	3	36	Verdadero

Como la desigualdad original es $\geq$, los valores frontera (en los intervalos B y D) son parte de la solución, tal como se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.32a**. En notación de intervalos, la solución es $[-1, 0] \cup [2, \infty)$. La **figura 8.32b** muestra la gráfica de $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$. Observe que $f(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$ y para $x \geq 2$, lo cual coincide con nuestra solución.

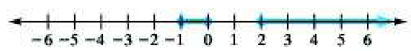


FIGURA 8.32a

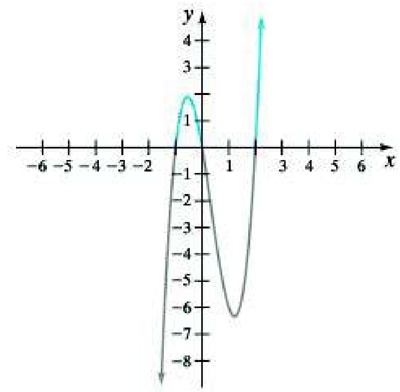


FIGURA 8.32b

▶ Ahora resuelva el ejercicio 41

En todos los ejemplos que hemos resuelto, el coeficiente del término principal ha sido un número positivo.

Ahora considere la desigualdad $-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$; observe que el coeficiente del término principal, $-3x^3$, es un número negativo, -3. Por lo general es más sencillo resolver una desigualdad en la que el coeficiente del término principal es un número positivo, así que lo convertiremos multiplicando ambos lados de la desigualdad por -1. Cuando haga esto, recuerde invertir el símbolo de la desigualdad.

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$$
$$-1(-3x^3 + 3x^2 + 6x) \geq -1(0) \quad \text{Invertir el símbolo de la desigualdad.}$$
$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 5.

3 Resolver desigualdades racionales

En los ejemplos 6 y 7 resolveremos **desigualdades racionales**, que son aquellas que incluyen expresiones racionales.

EJEMPLO 6 ▶ Resuelva la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$ y grafique la solución en una recta numérica.

Solución Cambie el $\geq$ por $=$ y resuelva la ecuación resultante.

$$\frac{x-1}{x+3} = 2$$
$$\cancel{x+3} \cdot \frac{x-1}{\cancel{x+3}} = 2(x+3) \quad \text{Multiplicar ambos lados por } x + 3.$$
$$x - 1 = 2x + 6$$
$$-1 = x + 6$$
$$-7 = x$$

Al resolver desigualdades racionales, también necesitamos determinar el valor o valores que hacen al denominador igual a 0. Igualamos a 0 el denominador y resolvemos.

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

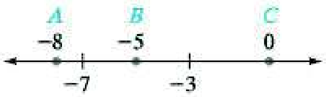


FIGURA 8.33

Para determinar los intervalos, utilizamos la solución de la ecuación, -7, y el valor que anula al denominador 0, -3, como se muestra en la **figura 8.33**. Como valores de prueba utilizaremos -8, -5 y 0.

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -7)$	$(-7, -3)$	$(-3, \infty)$
Valor de prueba, -8	Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0
$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$
$\dfrac{-8-1}{-8+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\dfrac{-5-1}{-5+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\dfrac{0-1}{0+3} \overset{?}{\geq} 2$
$\dfrac{9}{5} \geq 2$ *Falso*	$3 \geq 2$ *Verdadero*	$-\dfrac{1}{3} \geq 2$ *Falso*

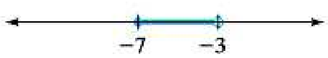


FIGURA 8.34

Sólo el intervalo *B* satisface la desigualdad. Siempre que tengamos una desigualdad racional, debemos ser muy cuidadosos al determinar cuáles valores frontera están contenidos en la solución. Recuerde que nunca podemos incluir en nuestra solución valores que anulen al denominador. Ahora verificamos los valores frontera -7 y -3. Como -7 da por resultado la desigualdad $-2 \geq -2$, que es verdadera, -7 es una solución. Puesto que no está permitida la división entre 0, -3 no es solución. Por lo tanto, la solución es $[-7, -3)$. La solución se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.34**.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 81**

En el ejemplo 6 resolvimos $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$. Suponga que graficamos $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$. ¿Para qué valores de x sería $f(x) \geq 2$? Si respondió $-7 \leq x < -3$, su respuesta es correcta. En la **figura 8.35** se muestran las gráficas de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y de $y = 2$. Observe que $f(x) \geq 2$ cuando $-7 \leq x < -3$.

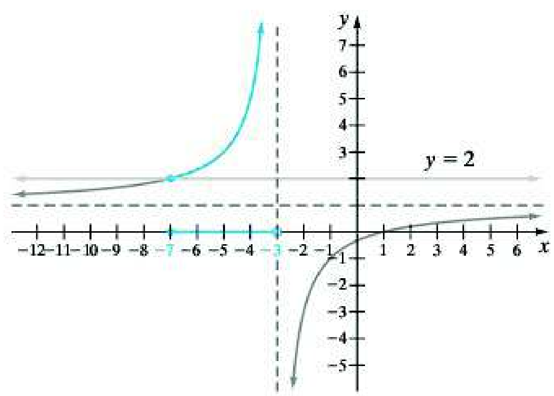


FIGURA 8.35

EJEMPLO 7 ▸ Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+1} \geq 0$. Grafique la solución en una recta numérica y escríbala en notación de intervalos.

Solución Las soluciones de la ecuación $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+1} = 0$ son 3 y -4, ya que estos valores son los que hacen el numerador igual a 0. La ecuación no está definida en

-1; por lo tanto, utilizamos los valores 3, -4 y -1 para determinar los intervalos en la recta numérica (vea la **figura 8.36**). Al comprobar los valores de prueba -5, -2, 0 y 4, encontramos que los valores en los intervalos B y D, $-4 < x < -1$ y $x > 3$, satisfacen la desigualdad. Compruebe los valores de prueba para verificarlo. Los valores 3 y -4 igualan a 0 la desigualdad y, por lo tanto, son parte de la solución. La desigualdad no está definida en -1, así que -1 no es parte de la solución. La solución es $[-4, -1) \cup [3, \infty)$, como se ilustra en la recta numérica de la **figura 8.37**.

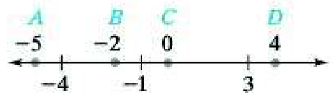


FIGURA 8.36

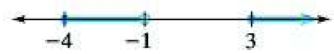


FIGURA 8.37

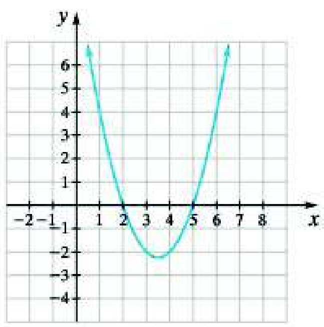
Ahora resuelva el ejercicio 71

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.6

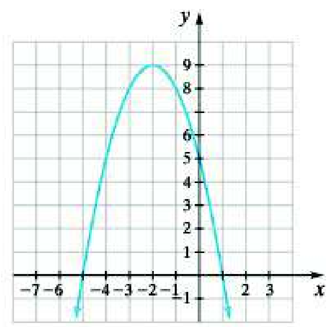
MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. A continuación se da la gráfica de $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Determine la solución de **a)** $f(x) > 0$ y **b)** $f(x) < 0$.



2. Dada la gráfica de $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, determine la solución de **a)** $f(x) \geq 0$ y **b)** $f(x) \leq 0$.



3. Al resolver la desigualdad $(x - 5)(x + 3) \geq 0$, ¿los valores frontera 5 y -3 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

4. Al resolver la desigualdad $(x - 2)(x + 4) < 0$, ¿los valores frontera 2 y -4 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

5. Al resolver la desigualdad $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1} \leq 0$, ¿los valores frontera -2 y 1 están incluidos en el conjunto solución? ¿El valor frontera -1 está incluido en el conjunto solución? Explique.

6. Al resolver la desigualdad $\dfrac{(x+3)}{(x+4)(x-2)} \geq 0$, ¿el valor frontera -3 está incluido en el conjunto solución? ¿Los valores frontera -4 y 2 están incluidos en el conjunto solución? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

7. $x^2 - 2x - 8 \geq 0$
8. $x^2 - 2x - 8 < 0$
9. $x^2 + 7x + 6 > 0$
10. $x^2 + 8x + 7 < 0$
11. $n^2 - 6n + 9 \geq 0$
12. $x^2 - 8x \geq 0$
13. $x^2 - 16 < 0$
14. $r^2 - 5r < 0$
15. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
16. $3n^2 - 7n \leq 6$
17. $5x^2 + 6x \leq 8$
18. $3x^2 + 5x - 3 \leq 0$
19. $2x^2 - 12x + 9 \leq 0$
20. $5x^2 \leq -20x - 4$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

21. $(x - 2)(x + 1)(x + 5) \geq 0$

22. $(x - 2)(x + 2)(x + 5) \leq 0$

23. $(a - 3)(a + 2)(a + 4) < 0$

24. $(r - 1)(r + 2)(r + 7) < 0$

25. $(2c + 5)(3c - 6)(c + 6) > 0$

26. $(a - 4)(a - 2)(a + 8) > 0$

27. $(3x + 5)(x - 3)(x + 1) > 0$

28. $(3c - 1)(c + 4)(3c + 6) \leq 0$

29. $(x + 2)(x + 2)(3x - 8) \geq 0$

30. $(x + 3)^2(4x - 7) \leq 0$

31. $x^3 - 6x^2 + 9x < 0$

32. $x^3 + 3x^2 - 40x > 0$

Determine todos los valores de x para los que $f(x)$ satisface las condiciones que se indican en cada una de las siguientes funciones. Grafique la solución en una recta numérica.

33. $f(x) = x^2 - 6x, f(x) \geq 0$

34. $f(x) = x^2 - 7x, f(x) > 0$

35. $f(x) = x^2 + 4x, f(x) > 0$

36. $f(x) = x^2 + 8x, f(x) \leq 0$

37. $f(x) = x^2 - 14x + 48, f(x) < 0$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 15, f(x) < 0$

39. $f(x) = 2x^2 + 9x - 1, f(x) \leq 5$

40. $f(x) = x^2 + 5x - 3, f(x) \leq 4$

41. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 35x, f(x) \geq 0$

42. $f(x) = x^3 - 9x, f(x) \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación constructiva de conjuntos.

43. $\dfrac{x + 2}{x - 4} > 0$

44. $\dfrac{x + 2}{x - 4} \geq 0$

45. $\dfrac{x - 1}{x + 5} < 0$

46. $\dfrac{x - 1}{x + 5} \leq 0$

47. $\dfrac{x + 3}{x - 2} \geq 0$

48. $\dfrac{x - 4}{x + 6} > 0$

49. $\dfrac{a - 9}{a + 5} < 0$

50. $\dfrac{b + 7}{b + 1} \leq 0$

51. $\dfrac{c - 10}{c - 4} > 0$

52. $\dfrac{2d - 6}{d - 1} < 0$

53. $\dfrac{3y + 6}{y + 4} \leq 0$

54. $\dfrac{4z - 8}{z - 9} \geq 0$

55. $\dfrac{5a + 10}{3a - 1} \geq 0$

56. $\dfrac{x + 4}{x - 4} \leq 0$

57. $\dfrac{3x + 4}{2x - 1} < 0$

58. $\dfrac{k + 3}{k} \geq 0$

59. $\dfrac{3x + 8}{x - 2} \leq 0$

60. $\dfrac{4x - 2}{2x - 8} > 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

61. $\dfrac{(x + 1)(x - 6)}{x + 3} < 0$

62. $\dfrac{(x + 1)(x - 6)}{x + 3} \leq 0$

63. $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 5} > 0$

64. $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 5} \geq 0$

65. $\dfrac{(a - 1)(a - 7)}{a + 2} \geq 0$

66. $\dfrac{(b - 2)(b + 4)}{b} < 0$

67. $\dfrac{c}{(c - 3)(c + 8)} \leq 0$

68. $\dfrac{z - 5}{(z + 6)(z - 9)} \geq 0$

69. $\dfrac{x - 6}{(x + 4)(x - 1)} \leq 0$

70. $\dfrac{x + 9}{(x - 2)(x + 4)} > 0$

71. $\dfrac{(x - 3)(2x + 5)}{x - 4} \geq 0$

72. $\dfrac{r(r - 8)}{2r + 6} < 0$

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

73. $\dfrac{2}{x-4} \geq 1$

74. $\dfrac{2}{x-4} > 1$

75. $\dfrac{3}{x-1} > -1$

76. $\dfrac{3}{x+1} \geq -1$

77. $\dfrac{5}{x+2} \leq 1$

78. $\dfrac{5}{x+2} < 1$

79. $\dfrac{2p-5}{p-4} \leq 1$

80. $\dfrac{2}{2a-1} > 2$

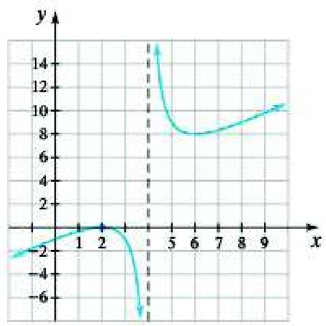
81. $\dfrac{4}{x+2} \geq 2$

82. $\dfrac{x+6}{x+2} > 1$

83. $\dfrac{w}{3w-2} > -2$

84. $\dfrac{x-1}{2x+6} \leq -3$

85. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x-4}$. Determine la solución de las desigualdades siguientes.

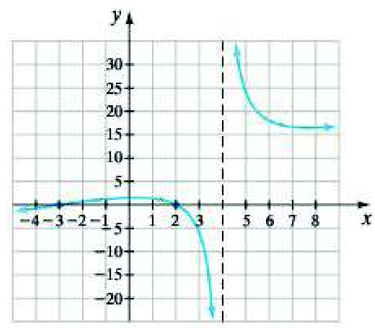


a) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-4} > 0$

b) $\dfrac{x^2-4x+4}{x-4} < 0$

Explique cómo determinó su respuesta.

86. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2+x-6}{x-4}$. Determine la solución de las desigualdades siguientes.



a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-4} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2+x-6}{x-4} < 0$

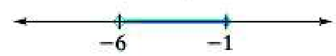
Explique cómo determinó su respuesta.

87. Escriba una desigualdad cuadrática cuya solución sea

88. Escriba una desigualdad cuadrática cuya solución sea

89. Escriba una desigualdad racional cuya solución sea

90. Escriba una desigualdad racional cuya solución sea



91. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $(x+3)^2(x-1)^2 \geq 0$? Explique su respuesta.

92. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $x^2(x-3)^2(x+4)^2 < 0$? Explique su respuesta.

93. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \geq 0$? Explique su respuesta.

94. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x-3)^2} > 0$? Explique su respuesta.

95. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) < 0$? Explique.

96. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) > 2$? Explique.

Retos

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en la recta numérica.

97. $(x+1)(x-3)(x+5)(x+8) \geq 0$

98. $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x(x+9)} \geq 0$

Escriba una desigualdad cuadrática con las soluciones siguientes; para cada problema existen diferentes respuestas posibles. Explique cómo determinó sus respuestas.

99. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

100. $\{2\}$

101. $\varnothing$

102. $\mathbb{R}$

En los ejercicios 103 y 104, resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos. Para determinar la solución, utilice las técnicas analizadas en la sección 8.5.

103. $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

104. $x^4 - 26x^2 + 25 \le 0$

En los ejercicios 105 y 106, resuelva cada desigualdad factorizando por agrupación. Proporcione la solución en notación de intervalos.

105. $x^3 + x^2 - 4x - 4 \ge 0$

106. $2x^3 + x^2 - 32x - 16 < 0$

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo los ejercicios 107 y 108.

107. Consideren la siguiente recta numérica, donde a, b y c son números reales distintos.

a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$? Expliquen.

108. Consideren la recta numérica siguiente, en la que a, b, c y d son números reales distintos.

a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0$? Expliquen.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **109. Anticongelante** Paul Simmons desea obtener una solución de anticongelante con concentración de 50%. ¿Cuántos cuartos de galón de anticongelante con concentración de 100% debe agregar a 10 cuartos de galón de anticongelante con concentración de 20%?

[3.2] **110.** Si $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 9}$, determine $h(-3)$.

[5.1] **111.** Sume $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 8t)$.

[6.3] **112.** Simplifique $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x-3}}$.

[7.7] **113.** Multiplique $(3 - 4i)(6 + 5i)$.

Resumen del capítulo 8

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1	
Propiedad de la raíz cuadrada Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.	Resuelva $x^2 - 36 = 0$. $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ Las soluciones son -6 y 6.
Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio.	$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1 (continuación)	
Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado **1.** Si es necesario, utilice la propiedad de la multiplicación (o división) para una igualdad, a fin de hacer que el coeficiente principal sea 1. **2.** Reescriba la ecuación con el término constante, solo, en el lado derecho de la ecuación. **3.** Tome un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévelo al cuadrado, y sume esta cantidad a ambos lados de la ecuación. **4.** Reemplace el trinomio con el cuadrado de un binomio. **5.** Utilice la propiedad de la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. **6.** Despeje la variable. **7.** Compruebe sus soluciones en la ecuación *original*.	Resuelva $x^2 + 4x - 12 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x^2 + 4x = 12$ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ $(x + 2)^2 = 16$ $x + 2 = \pm\sqrt{16}$ $x + 2 = \pm 4$ $x = -2 \pm 4$ $x = -2 - 4 = -6 \quad o \quad x = -2 + 4 = 2$ Las soluciones son -6 y 2.
Sección 8.2	
La **forma general de una ecuación cuadrática** es $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.	$x^2 - 5x + 17 = 0$
Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática **1.** Escriba la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determine los valores numéricos para a, b y c. **2.** Sustituya los valores para a, b y c en la fórmula cuadrática y luego evalúe la fórmula para obtener la solución Fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Resuelva $x^2 - 2x - 15 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. $a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$ $= \dfrac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$ $= \dfrac{2 \pm 8}{2}$ $x = \dfrac{2 + 8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \quad o \quad x = \dfrac{2 - 8}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ Las soluciones son 5 y -3.
Soluciones de una ecuación cuadrática Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, el **discriminante** es $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola solución real. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.	Determine el número de soluciones de $3x^2 - x + 7 = 0$. $a = 3, b = -1, c = 7$ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(7)$ $= 1 - 84$ $= -83$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 8.4

Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, con $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, se denomina ecuación de **forma cuadrática**.

Para resolver ecuaciones en forma cuadrática

1. Haga una sustitución que tenga por resultado una ecuación en la forma $au^2 + bu + c = 0$, $a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Resuelva la ecuación $au^2 + bu + c = 0$ para u.
3. Reemplace u con la función de la variable original del paso 1 y resuelva la ecuación resultante para la variable original.
4. Compruebe si hay soluciones extrañas, sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

Resuelva $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Sea $u = x^2$.

Entonces,

$$u^2 - 17u + 16 = 0$$
$$(u - 16)(u - 1) = 0$$
$$u - 16 = 0 \quad \text{o} \quad u - 1 = 0$$
$$u = 16 \qquad u = 1$$
$$x^2 = 16 \qquad x^2 = 1$$
$$x = \pm 4 \qquad x = \pm 1$$

Una comprobación mostrará que las soluciones son 4, −4, 1 y −1.

Sección 8.5

Parábola

Las gráficas de ecuaciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ son parábolas.

a) La parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

b) El eje de simetría es la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.

c) El vértice es el punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

d) La intersección con el eje y es el punto $(0, c)$.

e) Para obtener la(s) intersecciones con el eje x, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos para x.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es una parábola.

a) Abre hacia arriba ya que $a > 0$.

b) El eje de simetría es $x = -\dfrac{-2}{2(1)} = 1$.

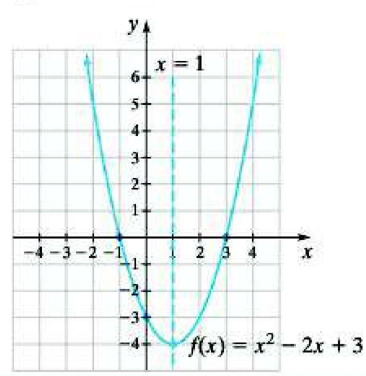
c) El vértice es $(1, -4)$.

d) La intersección con el eje y es $(0, -3)$.

e)
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = -1$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Sección 8.6

Una **desigualdad cuadrática** se obtiene cuando el signo igual, en la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, se reemplaza por un signo de desigualdad.

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que hacen verdadera la desigualdad.

$$x^2 - 5x + 7 > 0$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 8.6 (continuación)

Para resolver desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales

1. Escriba la desigualdad como una ecuación y resuelva la ecuación.
2. Si se resuelve una desigualdad racional, determine los valores que hacen el denominador igual a cero.
3. Trace una recta numérica. Marque cada solución del paso 1 y los números obtenidos en el paso 2 en la recta numérica.
4. Seleccione un valor de prueba en cada intervalo y determine si satisface la desigualdad. También pruebe cada valor frontera.
5. Escriba la solución en la forma que le pida su profesor.

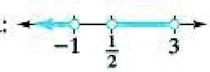
Resuelva $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$.

$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$$
$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad x = 3 \qquad x = -1$$

Los intervalos y los valores de prueba seleccionados se muestran a continuación.

Intervalo	Valor de prueba	$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$
$(-\infty, -1)$	-2	-25
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	0	3
$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	1	-4
$(3, \infty)$	5	108

La solución es $x < -1$ o $\frac{1}{2} < x < 3$.

La solución en una recta numérica: .

La solución en notación de intervalo: $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

La solución en notación de conjuntos:
$\left\{x \middle| x < -1 \text{ o } \frac{1}{2} < x < 3\right\}$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

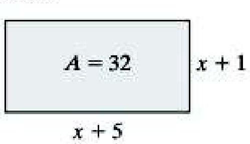
[8.1] *Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.*

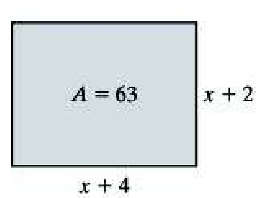
1. $(x - 5)^2 = 24$
2. $(2x + 1)^2 = 60$
3. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
4. $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

Complete el cuadrado para resolver cada ecuación.

5. $x^2 - 7x + 12 = 0$
6. $x^2 + 4x - 32 = 0$
7. $a^2 + 2a - 9 = 0$
8. $z^2 + 6z = 12$
9. $x^2 - 2x + 10 = 0$
10. $2r^2 - 8r = -64$

Área *En los ejercicios 11 y 12 se da el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escriba una ecuación para determinar el área.* **b)** *Despeje x en la ecuación.*

11. 

12. 

13. **Enteros consecutivos** El producto de dos enteros positivos y consecutivos es 42; determine los dos enteros.

14. **Sala de estar** Ronnie Sampson se acaba de mudar a una casa nueva, cuya sala de estar es una habitación cuadrada cuya diagonal tiene una longitud 7 pies mayor que la longitud de uno de los lados. Determine las dimensiones de la habitación.

[8.2] *Determine si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución o no tiene soluciones reales.*

15. $2x^2 - 5x - 1 = 0$
16. $3x^2 + 2x = -6$
17. $r^2 + 16r = -64$
18. $5x^2 - x + 2 = 0$
19. $a^2 - 14a = -49$
20. $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 8$

Resuelva cada ecuación por medio de la fórmula cuadrática.

21. $3x^2 + 4x = 0$
22. $x^2 - 11x = -18$
23. $r^2 = 3r + 40$
24. $7x^2 = 9x$
25. $6a^2 + a - 15 = 0$
26. $4x^2 + 11x = 3$
27. $x^2 + 8x + 5 = 0$
28. $b^2 + 4b = 8$
29. $2x^2 + 4x - 3 = 0$
30. $3y^2 - 6y = 8$
31. $x^2 - x + 13 = 0$
32. $x^2 - 2x + 11 = 0$
33. $2x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{25}{3}$
34. $4x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$

Determine todos los valores reales de la variable para los que cada una de las siguientes funciones tiene el valor que se indica.

35. $f(x) = x^2 - 4x - 35, f(x) = 25$
36. $g(x) = 6x^2 + 5x, g(x) = 6$
37. $h(r) = 5r^2 - 7r - 10, h(r) = -8$
38. $f(x) = -2x^2 + 6x + 7, f(x) = -2$

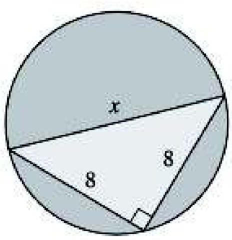
Determine una función que tenga las soluciones dadas.

39. $3, -1$
40. $\frac{2}{3}, -2$
41. $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$
42. $3 - 2i, 3 + 2i$

[8.1–8.3]

43. Jardín rectangular Sophia Yang está diseñando un jardín rectangular. Si el área debe medir 96 pies cuadrados y el largo debe ser 4 pies mayor que el ancho, determine las dimensiones del jardín.

44. Triángulo y círculo Determine la longitud del lado x en la figura siguiente.



45. Cuenta de ahorros Samuel Rivera invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros que paga el interés una vez al año. Si al cabo de 2 años el saldo de la cuenta es de \$1081.60, determine la tasa de interés anual.

46. Números El mayor de dos números positivos es 4 unidades mayor que el menor. Determine los dos números si su producto es 77.

47. Rectángulo La longitud de un rectángulo es 4 pulgadas menor que el doble de su ancho. Determine las dimensiones si su área mide 96 pulgadas cuadradas.

48. Cultivo de trigo El valor, V, en dólares por acre de un plantío de trigo d días después de que se siembran las semillas está dado por la fórmula $V = 12d - 0.05d^2, 20 < d < 80$. Determine el valor de un acre de trigo después de 60 días de que sembraron las semillas.

49. Gasto de compañías petroleras El gasto $E(t)$, en miles de millones de dólares, hecho por compañías petroleras para proyectos nuevos de petróleo y gas natural puede aproximarse mediante la ecuación $E(t) = 7t^2 - 7.8t + 82.2$, donde t es el número de años a partir de 2001. **Fuente:** John S. Herald Inc. *Washington Post* (14 de marzo de 2005).

a) Determine el gasto de las compañías petroleras para proyectos nuevos de petróleo y gas natural en 2004.

b) Si esta tendencia continúa, ¿en qué año el gasto será de \$579 mil millones?

50. Objeto en caída La distancia al suelo, d, en pies, a la que un objeto está t segundos a partir que se dejó caer desde un aeroplano, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 784$.

a) Determine la distancia a la que el objeto está del suelo, 2 segundos después de que se le dejó caer.

b) ¿En qué instante el objeto chocará con el suelo?

51. Fuga de aceite Un tractor tiene una fuga de aceite. La cantidad de aceite, $L(t)$ en mililitros por hora que pierde es una función de la temperatura que alcanza el tractor, t, en grados Celsius. La función es

$$L(t) = 0.0004t^2 + 0.16t + 20, 100°C \le t \le 160°C$$

a) ¿Cuántos mililitros de aceite perderá el tractor en 1 hora si su temperatura es de 100°C?

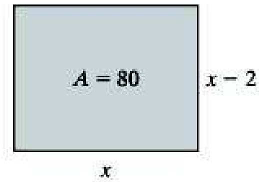
b) Si el aceite está saliendo a 53 mililitros por hora, ¿cuál es la temperatura del tractor?

52. Máquinas moldeadoras Dos máquinas moldeadoras pueden completar un pedido en 12 horas. Si trabaja sola, la máquina más grande puede terminar el pedido en 1 hora menos que el tiempo que tardaría la máquina más pequeña trabajando sola. Si cada máquina trabaja sola, ¿cuánto tiempo tardaría cada una en terminar el pedido?

53. Tiempo de recorrido Steve Forrester manejó 25 millas a velocidad constante, y luego aumentó su velocidad en 15 millas por hora durante las siguientes 65 millas. Si el tiempo total del recorrido de 90 millas fue de 1.5 horas, determine la velocidad a la que Steve manejó durante las primeras 25 millas.

54. Paseo en canoa Joan Banker viajó en canoa río abajo, a favor de la corriente, 3 millas; luego dio la vuelta y remó río arriba, en contra de la corriente, hasta llegar al punto en donde inició su recorrido. Si el tiempo total que empleó en el trayecto fue de 4 horas y la corriente del río tenía una velocidad de 0.4 millas por hora, ¿a qué velocidad rema Joan en aguas tranquilas?

55. Área El área de un rectángulo mide 80 unidades cuadradas. Si la longitud es de x unidades y el ancho es de $x - 2$ unidades, determine la longitud y el ancho. Redondee su respuesta a la décima más cercana.



56. Venta de mesas Una mueblería vende n mesas, $n \leq 40$, a un precio de $(60 - 0.3n)$ dólares cada una. ¿Cuántas mesas debe vender para tener un ingreso de $1080?

En los ejercicios 57 a 60, despeje la variable que se indica en cada ecuación.

57. Despeje a en $a^2 + b^2 = c^2$ (teorema de Pitágoras)

58. Despeje t en $h = -4.9t^2 + c$ (altura de un objeto)

59. Despeje v_y en $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ (vectores)

60. Despeje v_2 en $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$

[8.4] *Resuelva cada ecuación.*

61. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

62. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$

63. $a^4 = 5a^2 + 24$

64. $3y^{-2} + 16y^{-1} = 12$

65. $3r + 11\sqrt{r} - 4 = 0$

66. $2p^{2/3} - 7p^{1/3} + 6 = 0$

67. $6(x - 2)^{-2} = -13(x - 2)^{-1} + 8$

68. $10(r + 1) = \dfrac{12}{r + 1} - 7$

Determine todas las intersecciones con el eje x de cada función dada.

69. $f(x) = x^4 - 82x + 81$

70. $f(x) = 30x + 13\sqrt{x} - 10$

71. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12.$

72. $f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$

[8.5] **a)** *Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.* **b)** *Determine la intersección con el eje y.* **c)** *Determine el vértice.* **d)** *Determine las intersecciones con el eje x (si las hay).* **e)** *Trace la gráfica.*

73. $f(x) = x^2 + 5x$

74. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

75. $g(x) = -x^2 - 2$

76. $g(x) = -2x^2 - x + 15$

77. Venta de boletos La compañía teatral de una escuela considera que el ingreso total, I, en cientos de dólares, que obtendrá por una puesta en escena, puede calcularse con la fórmula $I = -x^2 + 22x - 45, 2 \leq x \leq 20$, donde x es el costo de un boleto.

a) ¿Cuánto deben cobrar para obtener el ingreso máximo?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

78. Lanzamiento de una pelota Josh Vincent lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 75 pies. La altura, $s(t)$, de la pelota en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $s(t) = -16t^2 + 80t + 75$.

a) ¿En qué instante la pelota llegará a su altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

Grafique cada función.

79. $f(x) = (x - 3)^2$

80. $f(x) = -(x + 2)^2 - 3$

81. $g(x) = -2(x + 4)^2 - 1$

82. $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$

[8.6] *Grafique la solución de cada desigualdad en una recta numérica.*

83. $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

84. $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

85. $x^2 \leq 11x - 20$

86. $3x^2 + 8x > 16$

87. $4x^2 - 9 \leq 0$

88. $6x^2 - 30 > 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación constructiva de conjuntos.

89. $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$

90. $\frac{x - 3}{x + 2} \leq 0$

91. $\frac{2x - 4}{x + 3} \geq 0$

92. $\frac{3x + 5}{x - 6} < 0$

93. $(x + 4)(x + 1)(x - 2) > 0$

94. $x(x - 3)(x - 6) \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y proporcione la solución en notación de intervalos.

95. $(3x + 4)(x - 1)(x - 3) \geq 0$

96. $2x(x + 2)(x + 4) < 0$

97. $\frac{x(x - 4)}{x + 2} > 0$

98. $\frac{(x - 2)(x - 8)}{x + 3} < 0$

99. $\frac{x - 3}{(x + 2)(x - 7)} \geq 0$

100. $\frac{x(x - 6)}{x + 3} \leq 0$

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

101. $\frac{5}{x + 4} \geq -1$

102. $\frac{2x}{x - 2} \leq 1$

103. $\frac{2x + 3}{3x - 5} < 4$

Examen de práctica del capítulo 8

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el ***Chapter Test Prep Video CD.*** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

Resuelva completando el cuadrado.

1. $x^2 + 2x - 15 = 0$

2. $a^2 + 7 = 6a$

Resuelva utilizando la fórmula cuadrática.

3. $x^2 - 6x - 16 = 0$

4. $x^2 - 4x = -11$

Resuelva utilizando el método de su preferencia.

5. $3r^2 + r = 2$

6. $p^2 + 4 = -7p$

7. Escriba una función cuyas intersecciones con el eje x sean $4, -\frac{2}{5}$.

8. Despeje v en la fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$.

9. Costo El costo, c, de una casa en Duquoin, Illinois, es una función del número de pies cuadrados, s, de la casa. El costo de la casa puede calcularse mediante

$$c(s) = -0.01s^2 + 78s + 22{,}000, \quad 1300 \leq s \leq 3900$$

a) Calcule el costo de una casa de 1600 pies cuadrados.

b) Si Clarissa Skocy quiere gastar \$160,000 en una casa, ¿qué tan grande puede ser ésta?

10. Viaje a un parque Tom Ficks condujo su automóvil desde Anchorage, Alaska, hasta el parque recreativo de Chena River, que se encuentra a 520 millas de distancia. Si hubiera manejado en promedio a 15 millas por hora más rápido, el viaje habría durado 2.4 horas menos. Determine la velocidad promedio a la que condujo Tom.

Parque Recreativo Estatal de Chena River

Resuelva.

11. $2x^4 + 15x^2 - 50 = 0$

12. $3r^{2/3} + 11r^{1/3} - 42 = 0$

13. Determine todas las intersecciones con el eje x de $f(x) = 16x - 24\sqrt{x} + 9$.

Grafique cada función.

14. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

15. $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

16. Determine si $6x^2 = 2x + 3$ tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o no tiene soluciones reales. Explique su respuesta.

17. Considere la ecuación cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$.
    a) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
    b) Determine la intersección con el eje y.
    c) Determine el vértice.
    d) Determine las intersecciones con el eje x (si las hay).
    e) Trace la gráfica.

18. Escriba una función cuadrática cuyas intersecciones con el eje x sean $(-7, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

19. $x^2 - x \geq 42$

20. $\dfrac{(x + 5)(x - 4)}{x + 1} \geq 0$

Resuelva la desigualdad siguiente. Escriba la respuesta en ***a)*** *notación de intervalos, y* ***b)*** *en notación constructiva de conjuntos.*

21. $\dfrac{x + 3}{x + 2} \leq -1$

22. **Alfombra** La longitud de una alfombra persa es 3 pies mayor que el doble de su ancho. Determine la longitud y el ancho de la alfombra, si su área mide 65 pies cuadrados.

23. **Lanzamiento de una pelota** José Ramírez lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio. La distancia, d, de la pelota respecto del piso en cualquier instante, t, es $d = -16t^2 + 80t + 96$. ¿Cuánto tardará la pelota en chocar contra el piso?

24. **Utilidad** Una compañía que produce esculturas de madera obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.4x^2 + 56x - 70$, donde x es el número de esculturas que fabrica y vende cada semana.
    a) Determine el número de esculturas que la compañía debe vender cada semana para maximizar su utilidad.
    b) ¿Cuál es la utilidad semanal máxima?

25. **Venta de escobas** Un negocio vende n escobas, $n \leq 32$, a un precio de $(10 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas escobas debe vender para tener un ingreso de \$160?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Evalúe $-4 \div (-2) + 18 - \sqrt{49}$.

2. Evalúe $2x^2 + 3x + 4$ cuando $x = 2$.

3. Exprese 2,540,000 en notación científica.

4. Determine el conjunto solución para la ecuación $|4 - 2x| = 5$.

5. Simplifique $6x - \{3 - [2(x - 2) - 5x]\}$.

6. Resuelva la ecuación $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$.

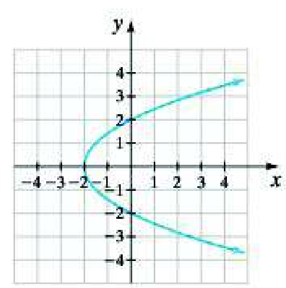
7. Resuelva la desigualdad $-4 < \dfrac{x + 4}{2} < 6$. Escriba la solución en notación de intervalos.

8. Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica de $9x + 7y = 15$.

9. **Huerto** El número de canastas de manzanas, N, que se producen por x árboles en un pequeño huerto está dado por la función $N(x) = -0.2x^2 + 40x$. ¿Cuántas canastas de manzanas producen 50 árboles?

10. Escriba la ecuación, en la forma punto pendiente, de una recta que pasa por los puntos $(6, 5)$ y $(4, 3)$.

11. **a)** Determine si la gráfica siguiente representa una función. Explique su respuesta.



    b) Determine el dominio y el rango de la función o relación.

12. Grafique cada una de las ecuaciones siguientes.
    a) $x = -4$
    b) $y = 2$

13. Evalúe el determinante siguiente.

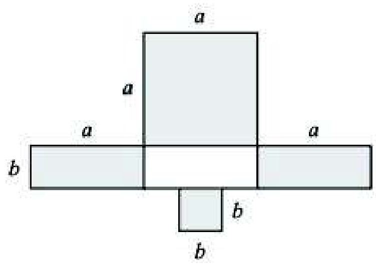
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

14. Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$4x - 3y = 10$$
$$2x + y = 5$$

15. Factorice $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$.

16. **a)** Escriba una expresión para determinar el área sombreada de la figura siguiente, y **b)** escriba la expresión en forma factorizada.



17. Sume $\dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x - 3}{x^2 - 8x + 15}$.

18. Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{a - 2} = \frac{4a - 1}{a^2 + 5a - 14} + \frac{2}{a + 7}.$$

19. **Consumo en watts** El consumo en watts, w, de un aparato varía conjuntamente con el cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si un aparato consume 12 watts cuando la corriente es de 2 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determine su consumo en watts cuando la corriente es de 0.8 amperes y la resistencia es de 600 ohms.

20. Simplifique $\dfrac{3 - 4i}{2 + 5i}$.