Capítulo 11

Variaciones con respecto al tiempo

VARIACION CON RESPECTO AL TIEMPO. Si una variable x es función del tiempo t, la *variación* de x en la unidad de tiempo viene dada por dx/dt.

Cuando dos o más variables, todas funciones de t, están relacionadas por una ecuación, se puede obtener la relación entre sus variaciones derivando la ecuación con respecto a t.

Problemas resueltos

1. Un gas escapa de un globo esférico a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la disminución de su superficie en la unidad de tiempo, sabiendo que el radio es de 12 metros.

   Sea r el radio de la esfera en el instante t. El volumen correspondiente es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie, $S = 4\pi r^2$.

   Tendremos, $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS/dt}{dV/dt} = \dfrac{2}{r}$, de donde, $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{2}{r}\left(\dfrac{dV}{dt}\right) = \dfrac{2}{12}(-2) = -\dfrac{1}{3}$ m²/min

2. De un embudo cónico sale agua a razón de 1 centímetro cúbico por segundo. Sabiendo que el radio de la base es de 4 centímetros y la altura de 8 centímetros, calcular el descenso del nivel en la unidad de tiempo en el instante en que la superficie libre se encuentra a una distancia de 2 centímetros de la base del embudo.

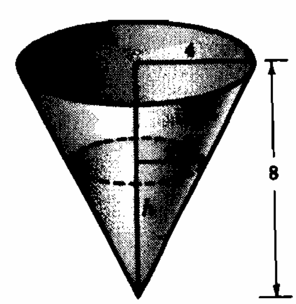
   

   Fig. 11-1

   Sea r el radio, h la altura de la superficie del agua en el instante t y V el volumen de agua que contiene el cono.

   De los triángulos semejantes, $r/4 = h/8$ ó $r = \frac{1}{2}h$.

   $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$ y $dV/dt = \frac{1}{4}\pi h^2\, dh/dt$.

   Cuando $dV/dt = -1$ y $h = 8 - 2 = 6$, tendremos $dh/dt = -1/9\pi$ cm/seg

3. Se forma un montículo cónico de arena cuya altura es constantemente, igual a los 4/3 del radio de la base. Hallar: (*a*) el incremento del volumen en la unidad de tiempo cuando el radio de la base es de 3 metros, sabiendo además que éste aumenta a razón de 25 cm cada minuto; (*b*) el incremento del radio en la unidad de tiempo cuando éste es de 6 metros y el volumen aumenta a razón de 24 metros cúbicos por minuto.

   Sea r = radio de la base y h = altura del cono en el tiempo t.

   Como $h = \dfrac{4}{3}r$, $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4}{9}\pi r^3$, y $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

   (*a*) Cuando $r = 3$ y $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{dV}{dt} = 3\pi$ m³/min. (*b*) Cuando $r = 6$ y $\dfrac{dV}{dt} = 24$, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$ m/min.

4. Un barco A navega hacia el sur a una velocidad de 16 millas por hora, y otro B, situado 32 millas al sur de A, lo hace hacia el este con una velocidad de 12 millas por hora. Hallar (*a*) la velocidad a la que dichos barcos se aproximan o separan al cabo de una hora de haberse iniciado el movimiento. (*b*) Idem, después de 2 horas; (*c*) el momento en que dejan de aproximarse y comienzan a separarse así como la distancia a que se encuentran en dicho instante.

Sean A_0 y B_0 las posiciones iniciales de los barcos, y A_t y B_t las correspondientes al cabo de t horas. Llamemos D a la distancia que los separa t horas después de iniciado el movimiento.

$$D^2 = (32 - 16t)^2 + (12t)^2 \quad \text{y} \quad \frac{dD}{dt} = \frac{400t - 512}{D}$$

(*a*) Cuando $t = 1$, $D = 20$ y $dD/dt = -5{,}6$. Se aproximan a razón de 5,6 min/h.

(*b*) Cuando $t = 2$, $D = 24$ y $dD/dt = 12$. Se separan a razón de 12 min/h.

(*c*) Dejarán de aproximarse cuando $dD/dt = 0$, e.d. cuando $t = 512/400 = 1{,}28$ h, en cuyo momento $D = 19{,}2$ millas.

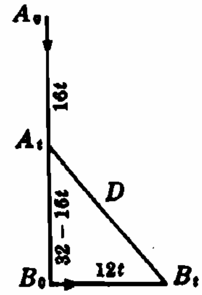


Fig. 11-2

5. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 centímetros cada segundo, mientras que los otros 2, se acortan de manera que la figura resultante, en todo momento, es un rectángulo de área constante e igual a 50 centímetros cuadrados. Calcular la variación en la unidad de tiempo del perímetro P cuando la longitud de los lados extensibles es de (*a*) 5 centímetros (*b*) 10 centímetros. (*c*) Hallar las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

Sea x = longitud de los lados que se alargan e y = longitud de los otros lados en el tiempo t.

$$P = 2(x + y) \text{ y } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \quad A = xy = 50 \text{ y } x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$$

(*a*) Cuando $x = 5$, $y = 10$ y $dx/dt = 2$.

$$\text{Por tanto } 5\frac{dy}{dt} + 10(2) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dt} = -4, \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4 \text{ cm/s (disminuyendo).}$$

(*b*) Cuando $x = 10$, $y = 5$ y $dx/dt = 2$.

$$\text{Por tanto } 10\frac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dt} = -1, \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2 \text{ cm/s (aumentando).}$$

(*c*) El perímetro dejará de disminuir cuando $dP/dt = 0$, e.d., cuando $dy/dt = -dx/dt = -2$.

Por tanto $x(-2) + y(2) = 0$, y el rectángulo es un cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}$ cm.

6. Sea r el radio de una esfera en el instante t. Hallar dicho radio cuando su incremento en la unidad de tiempo es igual, numéricamente, al de la superficie.

Superficie de la esfera, $S = 4\pi r^2$. $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$.

Cuando $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dr}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$, y el radio es $r = \dfrac{1}{8\pi}$ cm.

7. Un peso W está unido a una cuerda de 50 metros de longitud que pasa por una polea P situada a una altura de 20 metros con respecto al suelo. El otro extremo de la cuerda, se encuentra unido a un vehículo en el punto A, situado a una altura de 2 metros como indica la Fig. 11-3. Sabiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 9 metros segundo, calcular la velocidad a la que se eleva el cuerpo cuando se halle a una altura de 6 metros.

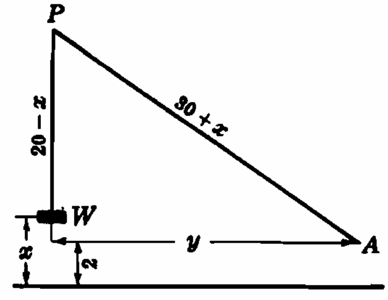


Fig. 11-3

Sea x el espacio recorrido por el cuerpo e y la distancia horizontal hasta el punto A en el instante t.

Tenemos que calcular $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\dfrac{dy}{dt} = 9$ y $x = 6$.

Ahora bien, $y^2 = (30 + x)^2 - (18)^2$ y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{30 + x}{y} \cdot \dfrac{dx}{dt}$.

Para $x = 6$, $y = 18\sqrt{3}$ y $\dfrac{dy}{dt} = 9$. Por tanto, $9 = \dfrac{30 + 6}{18\sqrt{3}} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ de donde $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ m/s.

8. Un foco de luz está situado a una altura de H metros sobre la calle. Un objeto de h metros de altura se encuentra en el punto O justamente debajo del foco y se mueve en línea recta, a partir de esta posición inicial, a lo largo de la calle a una velocidad de v metros por segundo. Hallar la velocidad V del extremo de la sombra sobre la calle al cabo de t segundos. (Ver Fig. 11-4.)

Al cabo de t segundos el objeto ha recorrido una distancia vt. Sea y = distancia del extremo de la sombra a O.

$$\frac{y-vt}{y} = \frac{h}{H} \text{ o sea } y = \frac{Hvt}{H-h} \quad \text{y} \quad V = \frac{dy}{dt} = \frac{Hv}{H-h} = \frac{1}{1-h/H}\,v$$

Por consiguiente, la velocidad del extremo de la sombra es proporcional a la velocidad del objeto, y el factor de proporcionalidad depende de la relación h/H. Cuando $h \to 0$, $V \to v$, mientras que si $h \to H$, V aumenta mucho más rápidamente.

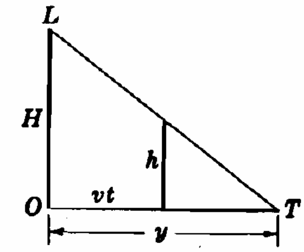


Fig. 11-4

Problemas propuestos

9. Las dimensiones de un depósito paralelepipédico son en metros, 8 largo, 2 de ancho y 4 de profundidad. Se llena de agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto, hallar la variación de la altura del nivel, con respecto al tiempo, cuando la profundidad del agua es de 1 metro. *Sol.* 1/8 m/min.

10. Un líquido penetra en un tanque cilíndrico vertical de 6 metros de radio a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua con respecto al tiempo. *Sol.* $2/9\pi$ m/min.

11. Un objeto de 5 metros de altura se encuentra justamente debajo de un foco de luz de la calle situado a 20 metros de altura. Suponiendo que el objeto se mueve a una velocidad de 4 metros por segundo, calcular: (*a*) la velocidad del extremo de la sombra, (*b*) la variación de la longitud de la sombra en la unidad de tiempo. *Sol.* (*a*) 16/3 m/s. (*b*) 4/3 m/s.

12. Un globo se eleva desde un punto A de la tierra a una velocidad de 15 metros por segundo y su ascenso se observa desde otro punto B situado en la horizontal que pasa por A y a una distancia de este punto de 30 metros. Hallar la variación de la distancia del punto B al globo cuando la altura de éste es de 40 metros. *Sol.* 12 metros/segundo.

13. Una escalera de 20 metros se apoya contra un edificio. Hallar (*a*) la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de 2 metros por segundo y se encuentra a una distancia de él de 12 metros, (*b*) la velocidad a la que disminuye la pendiente. *Sol.* (*a*) 3/2 m/s., (*b*) 25/72 cada segundo.

14. De un recipiente cónico de 3 metros de radio y 10 de profundidad sale agua a razón de 4 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación, con respecto al tiempo, de la altura de la superficie libre y del radio de ésta cuando la profundidad del agua es de 6 metros. *Sol.* $100/81\pi$ m/min, $10/27\pi$ m/min.

15. Un barco, cuya cubierta está a una distancia de 10 metros por debajo de la superficie de un muelle, es arrastrado hacia éste por medio de un cable unido a la cubierta y que pasa por una argolla situada en el muelle. Sabiendo que cuando el barco se encuentra a una distancia del muelle de 24 metros, aproximándose con una velocidad de 3/4 metros por segundo, hallar la velocidad del extremo del cable. *Sol.* 9/13 m/s.

16. Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150 metros. Sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20 metros por segundo, hallar la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros del muchacho. *Sol.* 16 m/s.

17. Un tren que sale a las 11 horas de la mañana se dirige hacia el este a una velocidad de 45 kilómetros por hora, mientras que otro, que sale al mediodía desde la misma estación, se dirige hacia el sur a una velocidad de 60 kilómetros por hora. Hallar la velocidad a que se separan ambos trenes a las tres de la tarde. *Sol.* $150\sqrt{2}/2$ km/h.

18. Un foco de luz está situado en la cúspide de una torre de 80 metros de altura. Desde un punto situado a 20 metros del foco y a su misma altura, se deja caer una pelota. Suponiendo que ésta cae según la ley $s = 16t^2$, hallar la velocidad a la que se mueve la sombra de la pelota sobre el suelo, un segundo después de empezar a caer. *Sol.* 200 m/s.

19. Un barco A se encuentra a una distancia de 15 millas al este de un punto O, y se mueve hacia el oeste a una velocidad de 20 millas por hora. Otro barco B, a 60 millas de O, se mueve hacia el norte a una velocidad de 15 millas por hora. Determinar: (*a*) si los barcos se aproximan o se separan al cabo de 1 hora y a qué velocidad, (*b*) ídem al cabo de 3 horas, (*c*) el momento en que están más próximos. *Sol.* (*a*) Aprox., $115\sqrt{82}$ millas/h; (*b*) Sep. $9\sqrt{10}/2$ millas/h; (*c*) 1 h. 55 min.

20. Un depósito cónico, de 8 metros de diámetro y 16 de profundidad, se llena de agua a razón de 10 metros cúbicos por minuto. Sabiendo que el depósito en cuestión tiene una fuga y que cuando la profundidad del agua es de 1 metro el nivel se eleva a razón de 1/3 metros por minuto, hallar la cantidad de agua que abandona el depósito en la unidad de tiempo. *Sol.* $(10 - 3\pi)$ m^3/min.

21. Una solución llega a un depósito cilíndrico de 30 centímetros de diámetro después de haber pasado por un filtro cónico de 60 centímetros de profundidad y 40 de diámetro. Hallar la velocidad a la que se eleva la superficie libre de la solución en el cilindro, sabiendo que cuando su profundidad en el filtro es de 30 centímetros, su nivel desciende a razón de 2,5 centímetros por minuto. *Sol.* 10/9 cm/min.

Capítulo 12

Derivada de las funciones trigonométricas

MEDIDA EN RADIANES. Sea s la longitud de un arco AB correspondiente al ángulo AOB de una circunferencia de radio r, y S el área del sector AOB. (Si s corresponde a 1/360 de circunferencia, $\angle AOB = 1°$; si $s = r$, $\angle AOB = 1$ radián.) Suponiendo que $\angle AOB$ es de α grados, tendremos

(i) $$s = \frac{\pi}{180}\alpha r \quad \text{y} \quad S = \frac{\pi}{360}\alpha r^2$$

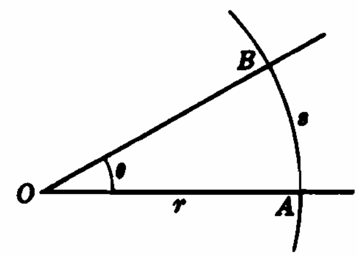


Fig. 12-1

Supongamos ahora que $\angle AOB$ es de θ radianes; en este caso,

(ii) $$s = \theta r \quad \text{y} \quad S = \tfrac{1}{2}\theta r^2$$

Comparando (i) con (ii) se aprecia, claramente, la enorme ventaja que representa la medida de un ángulo en radianes.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Sea θ un número real cualquiera. Tracemos un ángulo cuya medida sea θ radianes de forma que su vértice esté situado en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas, siendo el eje x el origen de ángulos. Tomando un punto $P(x, y)$ sobre el otro lado del ángulo, a una unidad de O, se verifica: sen $\theta = y$ y cos $\theta = x$. El dominio de definición de sen θ y de cos θ es el conjunto de los números reales; el campo de variación de sen θ es $-1 \leq y \leq 1$ y el de cos θ, $-1 \leq x \leq 1$. De las expresiones

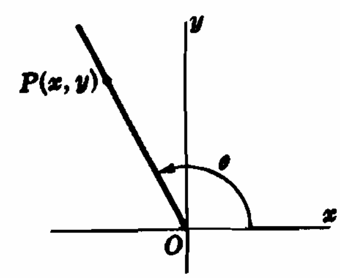


Fig. 12-2

$$\text{tag}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \quad \text{y} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

se deduce que el campo de variación de las funciones tag θ y sec θ es el conjunto de los números reales, mientras que el dominio de definición (cos $\theta \neq 0$) es $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2}\pi, (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Se deja como ejercicio para el alumno la consideración, desde este punto de vista, de las funciones cot θ y csc θ.

En el Problema 1 se demuestra que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$$

(Si el ángulo se mide en grados, este límite vale $\pi/180$. Por esta razón se utiliza la medida en radianes, en los cálculos.)

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; en estas condiciones,

14. $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}\,u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen}\,u \dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}(\text{tag}\,u) = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\, \text{tag}\,u \dfrac{du}{dx}$

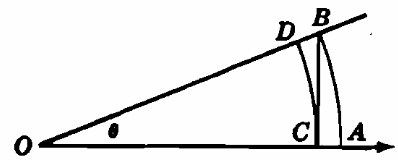
19. $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-23).

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$

Como $\dfrac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} = \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta}$, consideraremos solamente $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta}$.



$OC = \cos \theta$, $CB = \text{sen } \theta$

Fig. 12-3

En la Fig. 12-3, sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo en el centro, positivo y pequeño, de radio $OA = 1$. Llamando C al pie de la perpendicular trazada desde B a OA y D la intersección de OB con un arco de radio OC, tendremos,

$$\text{sector } COD \leqslant \Delta COB \leqslant \text{sector } AOB$$

con lo que $$\tfrac{1}{2}\theta \cos^2 \theta \leqslant \tfrac{1}{2} \text{sen } \theta \cos \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\theta$$

Dividiendo por $\frac{1}{2}\theta \cos \theta > 0$, tenemos

$$\cos \theta \leqslant \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \leqslant \frac{1}{\cos \theta}$$

Si $\theta \to 0^+$; se tendrá $\cos \theta \to 1$, $\dfrac{1}{\cos \theta} \to 1$, y $1 \leqslant \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} \leqslant 1$; de donde, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$,

2. Derivar $\dfrac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

Sea $$y = \text{sen } u$$

tendremos $$y + \Delta y = \text{sen}(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \text{sen}(u + \Delta u) - \text{sen } u = 2 \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u) \text{ sen } \tfrac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u) \frac{\text{sen } \frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u) \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\text{sen } \frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u} = \cos u$$

y derivando la función de función,

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \frac{d}{du}(\text{sen } u) \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

3. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = \dfrac{d}{dx}[\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - u)] = \dfrac{d}{du}[\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - u)] \dfrac{du}{dx} = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - u) \dfrac{du}{dx} = -\text{sen } u \dfrac{du}{dx}.$

4. $\dfrac{d}{dx}(\text{tag } u) = \dfrac{d}{dx} \cdot \left(\dfrac{\text{sen } u}{\cos u}\right) = \dfrac{\cos u \cdot \cos u \dfrac{du}{dx} - \text{sen } u\left(-\text{sen } u \dfrac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u} \dfrac{du}{dx} = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}.$

Hallar la primera derivada de las funciones de los Problemas 5-12.

5. $y = \text{sen } 3x + \cos 2x.$ $\quad y' = \cos 3x \dfrac{d}{dx}(3x) - \text{sen } 2x \dfrac{d}{dx}(2x) = 3 \cos 3x - 2 \text{ sen } 2x$

6. $y = \text{tag } x^2.$ $\quad y' = \sec^2 x^2 \dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x \sec^2 x^2$

7. $y = \text{tag}^2 x = (\text{tag } x)^2.$ $\quad y' = 2 \text{ tag } x \dfrac{d}{dx}(\text{atg } x) = 2 \text{ tag } x \sec^2 x$

8. $y = \cot(1 - 2x^2).$ $\quad y' = -\csc^2(1 - 2x^2) \dfrac{d}{dx}(1 - 2x^2) = 4x \csc^2(1 - 2x^2)$

9. $y = \sec^3 \sqrt{x} = \sec^3 x^{1/2}.$

$$y' = 3 \sec^2 x^{1/2} \frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 3 \sec^2 x^{1/2} \cdot \sec x^{1/2} \text{ tag } x^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \sec^3 \sqrt{x} \text{ tag } \sqrt{x}$$

10. $\varrho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2}.$

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \frac{d}{dx}(\csc 2\theta) = -\tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \cdot \csc 2\theta \cot 2\theta \cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta} \cdot \cot 2\theta$$

11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$ $\quad f'(x) = x^2 \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}.$ $\quad f'(x) = \dfrac{x \dfrac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

Hallar las derivadas indicadas en los Problemas 13-16.

13. $y = x \operatorname{sen} x;\ y'''.$

$$y' = x \cos x + \operatorname{sen} x$$

$$y'' = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x + \cos x = -x \operatorname{sen} x + 2\cos x$$

$$y''' = -x \cos x - \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x = -x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$$

14. $y = \operatorname{tag}^2(3x-2);\ y''.$

$$y' = 2 \operatorname{tag}(3x-2) \sec^2(3x-2) \cdot 3 = 6 \operatorname{tag}(3x-2)\sec^2(3x-2)$$

$$y'' = 6[\operatorname{tag}(3x-2) \cdot 2\sec(3x-2) \cdot \sec(3x-2)\operatorname{tag}(3x-2) \cdot 3 + \sec^2(3x-2)\sec^2(3x-2) \cdot 3]$$

$$= 36 \operatorname{tag}^2(3x-2)\sec^2(3x-2) + 18\sec^4(3x-2)$$

15. $y = \operatorname{sen}(x+y);\ y'.$ $\quad y' = \cos(x+y) \cdot (1+y')$ e $y' = \dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

16. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1;\ y''.$

$$\cos y \cdot y' - \operatorname{sen} x = 0 \text{ e } y' = (\operatorname{sen} x)/(\cos y)$$

$$y'' = \frac{\cos y \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cdot y'}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y(\operatorname{sen} x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$$

17. Hallar $f'(\pi/3), f''(\pi/3), f'''(\pi/3)$, en la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos 3x$.

$$f'(x) = -3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x + \cos 3x \cos x$$

$$= (\cos 3x \cos x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$$

$$= \cos 4x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x. \qquad f'(\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\tfrac{1}{2}$$

$$f''(x) = -4 \operatorname{sen} 4x - 2(3 \operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x)$$

$$= -4 \operatorname{sen} 4x - 2(\operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x) - 4 \operatorname{sen} x \cos 3x$$

$$= -6 \operatorname{sen} 4x - 4f(x). \qquad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \qquad f'''(\pi/3) = -24(-\tfrac{1}{2}) - 4(-\tfrac{1}{2}) = 14$$

18. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas (*1*) $y = \operatorname{sen}^2 x$ y (*2*) $y = \cos 2x$, en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

(*a*) De la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, se obtiene $\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, que son las abscisas de los puntos de intersección pedidos.

(*b*) $y' = 4 \operatorname{sen} x \cos x$ en (*1*), e $y' = -2 \operatorname{sen} 2x$ en (*2*).

En el punto $\pi/6$, $m_1 = \sqrt{3}$ y $m_2 = -\sqrt{3}$.

(*c*) $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$; el ángulo agudo de intersección es de 60°. En los demás puntos los ángulos de intersección también son de 60°.

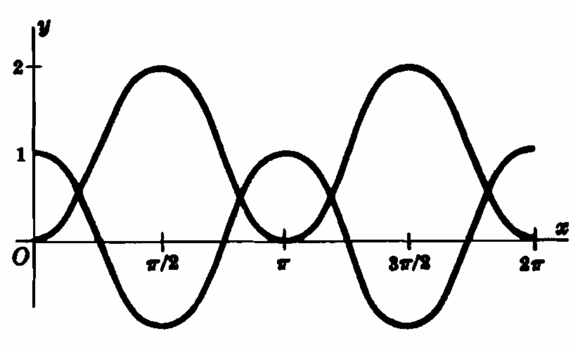


Fig. 12-4

19. Un terreno rectangular está limitado por dos caminos M y N, y en uno de sus vértices P se encuentra el extremo de un pequeño lago. Sabiendo que la distancia de P a los caminos M y N es de 108 y 256 metros, respectivamente, hallar la longitud de la trayectoria más corta por la que se puede ir de un camino al otro cruzando el terreno y pasando por el extremo del lago.

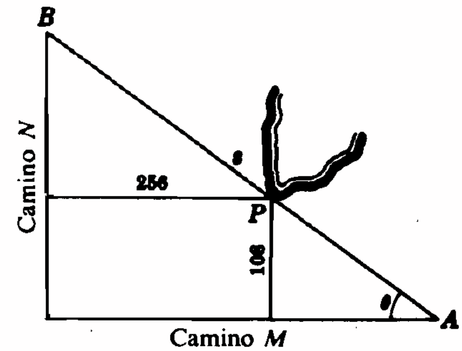


Fig. 12-5

Sea s la longitud de la trayectoria buscada y θ el ángulo que forma con el camino M.

$$s = AP + PB = 108 \csc\theta + 256 \sec\theta$$

$$ds/d\theta = -108 \csc\theta \cot\theta + 256 \sec\theta \operatorname{tag}\theta$$

$$= \frac{-108\cos^3\theta + 256 \operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

De $-108\cos^3\theta + 256\operatorname{sen}^3\theta = 0$, $\quad \operatorname{tag}^3\theta = 27/64$ y el valor crítico es $\theta = \operatorname{arc\,tag} 3/4$.

Por tanto, $s = 108\csc\theta + 256\sec\theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500$ m.

20. Estudiar la función $y = f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Cuando $x = 0$, $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$.

$f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3\cos x$. De la ecuación $f(x) = 0$, resulta $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los puntos de intersección con el eje x son $x = 0{,}64$ radianes y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$ radianes.

$f'(x) = 4\cos x + 3 \operatorname{sen} x$. De la ecuación $f'(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = -4/3$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = 2\pi - 0{,}93 = 5{,}35$.

$f''(x) = -4 \operatorname{sen} x + 3\cos x$. De la ecuación $f''(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$.

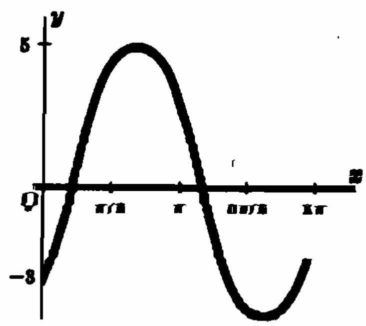


Fig. 12-6

$f'''(x) = -4\cos x - 3\operatorname{sen} x$.

(*a*) Para $x = 2{,}21$, $\operatorname{sen} x = 4/5$ y $\cos x = -3/5$; $f''(x) < 0$ y, por tanto, en $x = 2{,}21$ hay un mínimo relativo e igual a 5. En $x = 5{,}35$, se tiene un mínimo relativo igual a -5.

(*b*) $f'''(0{,}64) \neq 0$ y $f'''(3{,}78) \neq 0$. Los puntos de inflexión son $(0{,}64; 0)$ y $(3{,}78; 0)$.

(*c*) La curva es cóncava desde $x = 0$ a $x = 0{,}64$; convexa desde $x = 0{,}64$ a $3{,}78$, y cóncava desde $x = 3{,}78$ a 2π.

21. Cuatro barras de longitudes a, b, c, d están articuladas formando un cuadrilátero. Demostrar que el área A es máxima cuando los ángulos opuestos son suplementarios.

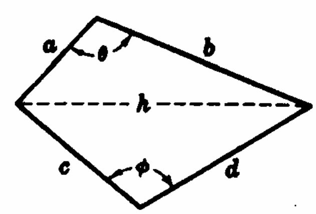


Fig. 12-7

Sea θ el ángulo formado por las barras de longitudes a y b, ϕ el ángulo opuesto y h la longitud de la diagonal opuesta a dicho ángulo.

Hemos de calcular el máximo de la función.

(*1*) $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}cd \operatorname{sen}\phi$ con la condición

(*2*) $h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\phi$. Derivando con respecto a θ:

$$(1')\quad \frac{dA}{d\theta} = \tfrac{1}{2}ab\cos\theta + \tfrac{1}{2}cd\cos\phi\,\frac{d\phi}{d\theta} = 0 \qquad \text{y} \qquad (2')\quad ab\operatorname{sen}\theta = cd\operatorname{sen}\phi\,\frac{d\phi}{d\theta}$$

Despejando $d\phi/d\theta$ en (*2'*) y sustituyendo en (*1'*), resulta,

$$ab\cos\theta + cd\cos\phi\,\frac{ab\operatorname{sen}\theta}{cd\operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\phi\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\phi+\theta) = 0$$

de donde $\phi + \theta = 0$ ó π, con lo que queda demostrado prescindiendo de la primera solución.

22. El piloto de un bombardero, que vuela a 2 kilómetros de altura y a una velocidad de 240 kilómetros por hora, observa un blanco terrestre hacia el que se dirige. Calcular la velocidad a la que debe girar el instrumento óptico cuando el ángulo entre la ruta del avión y la línea de mira es de 30°.

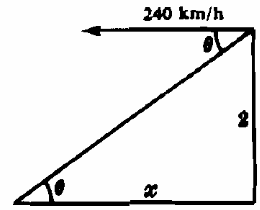


Fig. 12-8

$$\frac{dx}{dt} = -240 \text{ km/h}, \quad \theta = 30°, \quad y \quad x = 2\cot\theta.$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\csc^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} \text{ o sea } -240 = -2(4)\,\frac{d\theta}{dt}, \quad y \quad \frac{d\theta}{dt} = 30 \text{ rad/h} = \frac{3}{2\pi} \text{ grados/s.}$$

23. Un rayo de luz parte de un punto P y se propaga por el aire a una velocidad v_1 incidiendo sobre un punto O de una superficie de agua situada a unidades de longitud por debajo de P. Sabiendo que en el interior del agua se propaga a una velocidad v_2 y que pasa por otro punto Q a una distancia de b unidades de la superficie, demostrar que el paso de luz de P a Q se verifica de la manera más rápida cuando $\dfrac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, siendo θ_1 y θ_2 los ángulos de incidencia y refracción con la normal a la superficie.

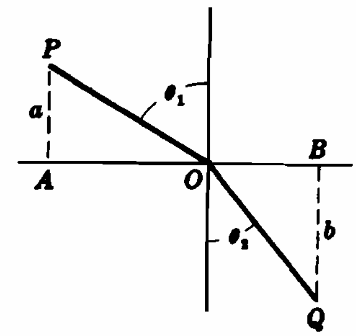


Fig. 12-9

Sea t el tiempo que emplea la luz en ir de P a Q y c la distancia de A a B; en estas condiciones,

$$t = \frac{a\sec\theta_1}{v_1} + \frac{b\sec\theta_2}{v_2} \quad y \quad c = a\,\text{tag}\,\theta_1 + b\,\text{tag}\,\theta_2$$

Derivando con respecto a θ_1,

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a\sec\theta_1\,\text{tag}\,\theta_1}{v_1} + \frac{b\,\text{tag}\,\theta_2\sec\theta_2}{v_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad y \quad 0 = a\sec^2\theta_1 + b\sec^2\theta_2\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

De la última ecuación, $\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\dfrac{a\sec^2\theta_1}{b\sec^2\theta_2}$. Para que t sea mínimo se precisa que

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a\sec\theta_1\,\text{tag}\,\theta_1}{v_1} + \frac{b\sec\theta_2\,\text{tag}\,\theta_2}{v_2}\left(-\frac{a\sec^2\theta_1}{b\sec^2\theta_2}\right) = 0$$

de donde se obtiene la relación pedida.

Problemas propuestos

24. Hallar: (*a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,2x}{2x}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,ax}{\text{sen}\,bx}$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2 2x}{x\,\text{sen}^2 3x}$, (*d*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.
Sol. (*a*) 2, (*b*) a/b, (*c*) 8/9, (*d*) 0.

25. Deducir la fórmula 17 de derivación utilizando las relaciones (*a*) $\cot u = \dfrac{\cos u}{\text{sen}\,u}$ y (*b*) $\cot u = \dfrac{1}{\text{tag}\,u}$. Deducir asimismo las fórmulas de derivación 18 y 19.

Hallar las derivadas dy/dx o $d\rho/d\theta$ en los Problemas 26-45.

26. $y = 3\,\text{sen}\,2x$ *Sol.* $6\cos 2x$

27. $y = 4\cos\frac{1}{2}x$ *Sol.* $-2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x$

28. $y = 4\,\text{tag}\,5x$ *Sol.* $20\sec^2 5x$

29. $y = \frac{1}{4}\cot 8x$ *Sol.* $-2\csc^2 8x$

30. $y = 9\sec\frac{1}{3}x$ *Sol.* $3\sec\frac{1}{3}x\,\text{tag}\,\frac{1}{3}x$

31. $y = \frac{1}{4}\csc 4x$ *Sol.* $y = -\csc 4x\cot 4x$

32. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ *Sol.* $x \operatorname{sen} x + 2x + 4$

33. $\varrho = \sqrt{\operatorname{sen} \theta}$ *Sol.* $(\cos \theta)/(2\sqrt{\operatorname{sen} \theta})$

34. $y = \operatorname{sen} 2/x$ *Sol.* $(-2 \cos 2/x)/x^2$

35. $y = \cos (1 - x^2)$ *Sol.* $2x \operatorname{sen} (1 - x^2)$

36. $y = \cos (1 - x)^2$ *Sol.* $y = 2(1 - x) \operatorname{sen} (1 - x)^2$

37. $y = \operatorname{sen}^2 (3x - 2)$ *Sol.* $3 \operatorname{sen} (6x - 4)$

38. $y = \operatorname{sen}^3 (2x - 3)$ *Sol.* $-\frac{3}{2} \{\cos (6x - 9) - \cos (2x - 3)\}$

39. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tag} x \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $\operatorname{sen} 2x$

40. $\varrho = \dfrac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ *Sol.* $\dfrac{-3 \sec 2\theta \operatorname{tag} 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{5/2}}$

41. $\varrho = \dfrac{\operatorname{tag} 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ *Sol.* $2\,\dfrac{\sec^2 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$

42. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$ *Sol.* $x^2 \cos x$

43. $\operatorname{sen} y = \cos 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos y}$

44. $\cos 3y = \operatorname{tag} 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \sec^2 2x}{3 \operatorname{sen} 3y}$

45. $x \cos y = \operatorname{sen} (x + y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos y - \cos (x + y)}{x \operatorname{sen} y + \cos (x + y)}$

46. Si $x = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$, siendo A,B,k constantes, demostrar que $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ y $\dfrac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n} x$.

47. Demostrar: (*a*) $y'' + 4y = 0$ siendo $y = 3 \operatorname{sen} (2x + 3)$, (*b*) $y''' + y'' + y' + y = 0$ siendo $y = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$.

48. Estudiar las funciones siguientes en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$:

(*a*) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ (*c*) $y = x - 2 \operatorname{sen} x$ (*e*) $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
(*b*) $y = \cos^2 x - \cos x$ (*d*) $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$

Sol. (*a*) Max. en $x = \pi/4, 5\pi/4$; min. en $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; P.I. en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
(*b*) Max. en $x = 0, \pi$; min. en $x = \pi/3, 5\pi/3$; P.I. en $x = 32°32', 126°23', 233°37', 327°28'$
(*c*) Max. en $x = 5\pi/3$; min. en $x = \pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi$
(*d*) Max. en $x = \pi/3$; min en $x = 5\pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi, 104°29', 255°31'$
(*e*) Max. en $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; min. en $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$; P.I. en $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11/\pi 6$

49. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de 45° y que va disminuyendo a razón de $\frac{1}{4}$ radianes por hora, hallar la velocidad a que se desplaza la sombra de una torre de 50 metros de altura sobre la tierra. *Sol.* 25 m/h.

50. Un cometa, a una altura de 120 metros sobre la tierra, se mueve horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad a la que disminuye el ángulo de inclinación del hilo con la horizontal cuando la longitud de éste sea de 240 metros. *Sol.* 1/48 rad/s.

51. La luz de un foco situado a una distancia de 3 600 metros de una costa rectilínea gira a una velocidad de 4π radianes por minuto. Hallar la velocidad a la que se desplaza un rayo de luz sobre la costa (*a*) en el punto más próximo, (*b*) en un punto situado a 4 800 metros del punto más próximo. *Sol.* (*a*) 240π m/s, (*b*) $2\,000\pi/3$ m/s.

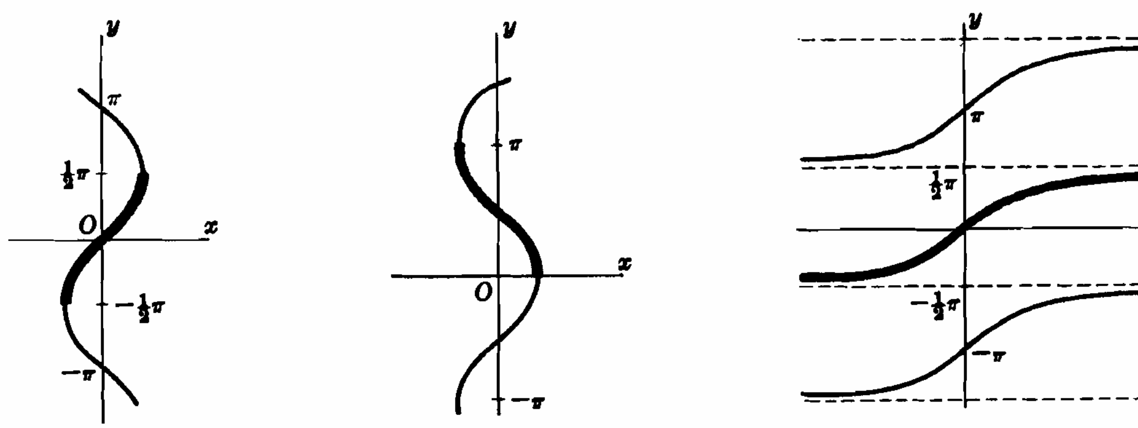
52. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 15 y 20 metros. Hallar (*a*) la velocidad de variación del tercer lado cuando el ángulo formado por los otros dos es de 60° y aumenta a razón de 2° por segundo (*b*) la velocidad a la que aumenta el área. *Sol.* (*a*) $\pi/\sqrt{39}$ m/s, (*b*) $\frac{5}{6}\pi$ m²/s.

Capítulo 13

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. La función inversa de $x = \operatorname{sen} y$ es $y = \operatorname{arc\,sen} x$ (o bien, $\operatorname{sen}^{-1}x$). El dominio de definición del arc sen x es $-1 \leq x \leq 1$, es decir, el campo de variación de y; el campo de variación de arc sen x es el conjunto de los números reales, es decir el dominio de la definición de sen y. El dominio de definición y el campo de variación de las restantes funciones trigonométricas inversas se establece de forma análoga.

Las funciones trigonométricas inversas son multiformes. Con objeto de evitar confusiones de referirnos a una determinada parte de estas funciones, se define para cada una de ellas un arco llamado *rama principal.* En los gráficos que figuran a continuación la rama principal se representa con un trazo más grueso.



$y = \operatorname{arc\,sen} x$ $\qquad$ $y = \operatorname{arc\,cos} x$ $\qquad$ $y = \operatorname{arc\,tag} x$

Fig. 13-1

Función	**Rama Principal**
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \operatorname{arc\,tag} x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \operatorname{arc\,cot} x$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arc\,sec} x$	$-\pi \leqq y < -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leqq y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \operatorname{arc\,csc} x$	$-\pi < y \leqq -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 < y \leqq \frac{1}{2}\pi$

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; entonces

20. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tag} u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} u) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc} u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

Problemas resueltos

1. Derivar: (*a*) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$, (*b*) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$.

(*a*) Sea $y = \text{arc sen } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \text{sen } y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen } y) = \frac{d}{dy}(\text{sen } y)\frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\cos y \geq 0$ en el intervalo $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$. Por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$.

(*b*) Sea $y = \text{arc sec } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \sec y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dy}(\sec y)\frac{dy}{dx} = \sec y \text{ tag } y \frac{dy}{dx} = u\sqrt{u^2-1}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\text{tag } y \geq 0$ en los intervalos $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ y $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$. Por tanto, $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$.

Hallar la primera derivada en los problemas 2-9.

2. $y = \text{arc sen}(2x-3)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\dfrac{d}{dx}(2x-3) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

3. $y = \text{arc cos } x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}\dfrac{d}{dx}(x^2) = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $y = \text{arc tag } 3x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+(3x^2)^2}\dfrac{d}{dx}(3x^2) = \dfrac{6x}{1+9x^4}$

5. $f(x) = \text{arc cot}\dfrac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc sen}\dfrac{x}{a}$

$$f'(x) = x\cdot\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

7. $y = x \text{ arc csc}\dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = x\left[\frac{-1}{\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \text{arc csc}\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \text{arc csc}\frac{1}{x}$$

8. $y = \dfrac{1}{ab}\text{ arc tag}\left(\dfrac{b}{a}\text{ tag } x\right)$

$$y' = \frac{1}{ab}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{b}{a}\text{ tag } x\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)\Big] = \frac{1}{ab}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x}\cdot\frac{b}{a}\sec^2 x$$

$$= \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x} = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\text{ sen}^2 x}$$

9. $y^2\text{ sen } x + y = \text{arc tag } x$ $\qquad 2yy'\text{ sen } x + y^2\cos x + y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$y'(2y\text{ sen } x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2\cos x \quad \text{y} \quad y' = \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{(1+x^2)(2y\text{ sen } x+1)}$$

10. En un terreno circular hay un foco de luz L situado como indica la figura. Un objeto parte de B y se mueve hacia el centro O a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad de su sombra sobre la circunferencia cuando el objeto se encuentra en el punto medio de BO.

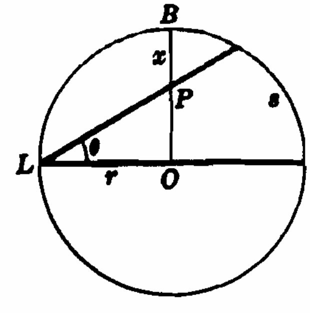


Fig. 13-2

Sea x (metros) la distancia de P a B en el instante t; llamando r al radio del círculo, θ el ángulo OLP y s el arco interceptado por θ, tendremos

$s = r(2\theta)$, y $\theta = \text{arc tag } OP/LO = \text{arc tag}\,(r - x)/r$.

$$\frac{ds}{dt} = 2r\,\frac{d\theta}{dt} = 2r \cdot \frac{1}{1 + [(r-x)/r]^2} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2 - 2rx + 2r^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = \frac{1}{2}r$ y $dx/dt = 10$, será $ds/dt = -16$ m/s.

La sombra se mueve a una velocidad de 16 m/s.

11. La arista inferior de un cartel de 12 metros de altura, está situado a 6 metros por encima de los ojos de un observador. Suponiendo que la visión más favorable se obtiene cuando el ángulo subtendido por el cartel y los ojos es máximo, calcular la distancia de la pared a la que se debe situar el observador.

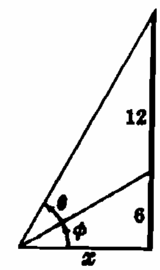


Fig. 13-3

Sea θ el ángulo subtendido y x la distancia a la pared. De la Fig. 13-3, se deduce $\text{tag}\,(\theta + \phi) = 18/x$, $\text{tag}\,\phi = 6/x$ y

$$\text{tag}\,\theta = \text{tag}\,\{(\theta+\phi) - \phi\} = \frac{\text{tag}\,(\theta+\phi) - \text{tag}\,\phi}{1 + \text{tag}\,(\theta+\phi)\,\text{tag}\,\phi} = \frac{18/x - 6/x}{1 + (18/x)(6/x)} = \frac{12x}{x^2 + 108}$$

$$\theta = \text{arc tag}\,\frac{12x}{x^2+108} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{12(-x^2+108)}{x^4 + 360x^2 + 11.664}.$$ El valor crítico es

$x = 6\sqrt{3} = 10{,}4$. El observador se debe situar a una distancia de 10,4 m de la pared.

Problemas propuestos

12. Deducir las fórmulas de derivación 21, 22, 23 y 25.

Hallar dy/dx en los Problemas 13-20.

13. $y = \text{arc sen}\,3x$ *Sol.* $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

14. $y = \text{arc cos}\,\frac{1}{2}x$ *Sol.* $-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

15. $y = \text{arc tag}\,3/x$ *Sol.* $-\dfrac{3}{x^2+9}$

16. $y = \text{arc sen}\,(x-1)$ *Sol.* $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

17. $y = x^2\,\text{arc cos}\,2/x$ *Sol.* $2x\left(\text{arc cos}\,\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

18. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}$ *Sol.* $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

19. $y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2\,\text{arc sen}\,\dfrac{x-a}{a}$ *Sol.* $2\sqrt{2ax-x^2}$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \dfrac{1}{2}\,\text{arc sec}\,\dfrac{x}{2}$ *Sol.* $\dfrac{8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

21. En la vertical del centro de un terreno circular de 30 metros de radio se quiere situar un foco de luz a una altura tal que la iluminación en el perímetro sea máxima. Sabiendo que la intensidad en un punto cualquiera del contorno es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia (ángulo entre el rayo luminoso y la vertical) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco, hallar la altura que debe tener este.

Ind: Sea x la altura, y la distancia del foco a un punto de la circunferencia exterior y θ el ángulo de incidencia. Tendremos $I = k\,\dfrac{\cos\theta}{y^2} = \dfrac{kx}{(x^2+900)^{3/2}}$. *Sol.* $15\sqrt{2}$ metros.

22. Dos barcos parten de un mismo punto A, uno se dirige hacia el Sur a una velocidad de 15 millas por hora y el otro hacia el Este a una velocidad de 25 millas por hora, durante 1 hora, volviendo después hacia el Norte. Hallar la velocidad de rotación de la línea que los une al cabo de 3 horas de iniciado el movimiento. *Sol.* 20/193 rad/h.

Capítulo 14

Derivada de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas

NUMERO $e = \lim_{h \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{k \to 0} (1 + k)^{1/k}$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$$

(Ver Problema 1.)

NOTACION. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y si $a^y = x$, entonces $y = \log_a x$.

$$y = \log_e x = \ln x \qquad y = \log_{10} x = \log x$$

El dominio de definición es $x > 0$; el intervalo de variación es el conjunto de los números reales.

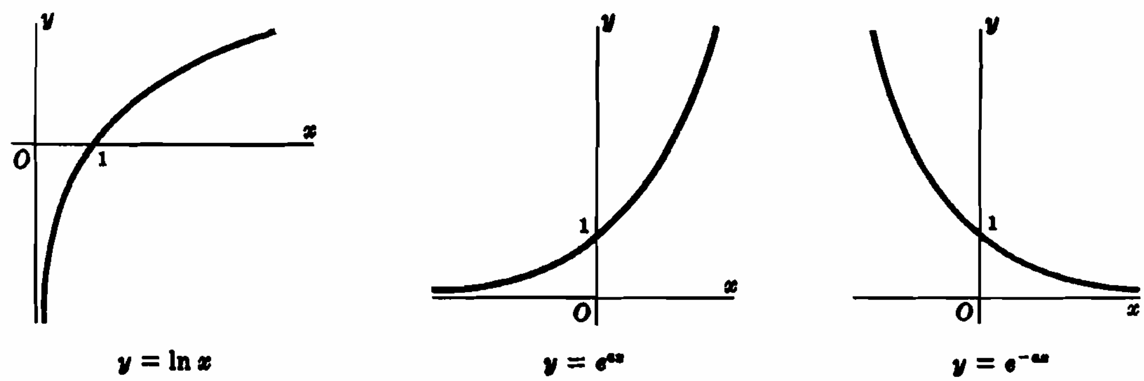


Fig. 14-1

REGLAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

26. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

27. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$, $(a > 0)$

29. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-17.)

DERIVADA LOGARITMICA. Cuando una función derivable, $y = f(x)$, es un producto de factores, el proceso de derivación se simplifica tomando previamente logaritmos neperianos, o lo que es igual, aplicando la fórmula

30. $$\frac{d}{dx}(y) = y \frac{d}{dx}(\ln y)$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $2 < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$

Desarrollando por el binomio de Newton, siendo n un número entero positivo,

$$\text{(i)}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

Evidentemente, para cualquier valor de $n \neq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$. También, si en (i) cada diferencia $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... se sustituye por un número mayor 1, tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$< 3 \quad \left(\text{puesto que } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1\right)$$

Por tanto, $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Si $n \to \infty$ tomando valores positivos enteros; tendremos

$$1-\frac{1}{n}\to 1,\quad 1-\frac{2}{n}\to 1,\quad \ldots,\quad \text{y}\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!}$$

Esto conduce a $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$

2. Derivar $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

Sea $y = \log_a u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos

$$y + \Delta y = \log_a(u+\Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a(u+\Delta u) - \log_a u = \log_a\frac{u+\Delta u}{u} = \log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

y

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\lim_{\Delta u\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\} = \frac{1}{u}\log_a e$$

Así pues, derivando como función de función $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{du}(\log_a u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$.

Cuando $a = e$, $\log_a e = \log_e e = 1$ y $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

3. $y = \log_a(3x^2-5)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2-5}\log_a e\cdot\frac{d}{dx}(3x^2-5) = \frac{6x}{3x^2-5}\log_a e$

4. $y = \ln(x+3)^2 = 2\ln(x+3)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2}{x+3}$

5. $y = \ln^2(x+3)$

$$y' = 2\ln(x+3)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(x+3)] = 2\ln(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

6. $y = \ln(x^3+2)(x^2+3) = \ln(x^3+2) + \ln(x^2+3)$

$$y' = \frac{1}{x^3+2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+2) + \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{2x}{x^2+3}$$

7. $f(x) = \ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln(3x-4)^2 = 4\ln x - 2\ln(3x-4)$

$$f'(x) = 4\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) - 2\frac{1}{3x-4}\frac{d}{dx}(3x-4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$$

8. $y = \ln \operatorname{sen} 3x \qquad y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) = 3\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = 3\cot 3x$

9. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x + (1+x^2)^{1/2}} = \frac{1 + x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

10. Deducir $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$.

Sea $y = a^u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\ln y = u \ln a$,

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a\frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y\ln a\frac{du}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\frac{du}{dx}$$

Cuando $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, con lo cual $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$.

11. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad y' = e^{-\frac{1}{2}x}\dfrac{d}{dx}(-\tfrac{1}{2}x) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

12. $y = e^{x^2} \qquad y' = e^{x^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$

13. $y = a^{3x^2} \qquad y' = a^{3x^2}\ln a\cdot\dfrac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2}\ln a$

14. $y = x^2 3^x \qquad y' = x^2\cdot\dfrac{d}{dx}(3^x) + 3^x\cdot\dfrac{d}{dx}(x^2) = x^2 3^x\ln 3 + 3^x 2x = x3^x(x\ln 3 + 2)$

15. $y = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$

$$y' = \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}-e^{-ax}) - (e^{ax}-e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}+e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= \frac{(e^{ax}+e^{-ax})[a(e^{ax}+e^{-ax})] - (e^{ax}-e^{-ax})[a(e^{ax}-e^{-ax})]}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= a\frac{(e^{2ax}+2+e^{-2ax}) - (e^{2ax}-2+e^{-2ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

16. Hallar y'', en la función $y = e^{-x}\ln x$.

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x\frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x}\frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

17. Hallar y'', en la función $y = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$.

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) + \operatorname{sen} 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$y'' = 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y'$$

$$= -9e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x)$$

$$= -e^{-2x}(12\cos 3x + 5\operatorname{sen} 3x)$$

Hallar la primera derivada aplicando la derivación logarítmica.

18. $y = (x^2+2)^3(1-x^3)^4 \qquad \ln y = \ln (x^2+2)^3(1-x^3)^4 = 3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)$

$$y' = y\frac{d}{dx}[3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)] = (x^2+2)^3(1-x^3)^4\left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$
$$= 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$$

19. $y = \dfrac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \qquad \ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

20. Hallar (*a*) los máximos y mínimos relativos y (*b*) los puntos de inflexión de la curva $y = f(x) = x^2e^x$.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$
$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2)$$
$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2e^x = e^x(6+6x+x^2)$$

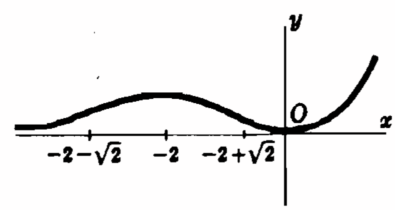


Fig. 14-2

(*a*) Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos los valores críticos $x = 0$ y $x = -2$.

$f''(0) > 0$ y $(0, 0)$ es un mínimo relativo.
$f''(-2) < 0$ y $(-2, 4/e^2)$ es un máximo relativo.

(*b*) Resolviendo $f''(x) = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión en $x = -2 \pm \sqrt{2}$.
$f'''(-2-\sqrt{2}) \neq 0$ y $f'''(-2+\sqrt{2}) \neq 0$; los puntos $x = -2 \pm \sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

21. Estudiar la curva de probabilidades $y = ae^{-b^2x^2}$, $a > 0$.

(*a*) La curva está situada por encima del eje x, puesto que $e^{-b^2x^2} > 0$ para todos los valores de x. Cuando $x \to \pm\infty$, $y \to 0$, con lo que el eje x es una asíntota horizontal.

(*b*) $y' = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$ e $y'' = 2ab^2(2b^2x^2-1)e^{-b^2x^2}$.

Cuando $y' = 0$, $x = 0$; y cuando $x = 0$, $y'' < 0$. El punto $(0, a)$ es un máximo de la curva.

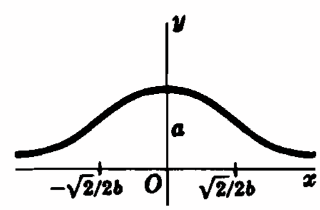


Fig. 14-3

(*c*) Cuando $y'' = 0$, $2b^2x^2 - 1 = 0$, y $x = \pm\sqrt{2}/2b$ son posibles puntos de inflexión.

	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2b}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2b}$	
$y'' > 0$ cóncava		$y'' < 0$ convexa		$y'' > 0$ cóncava

Los puntos $(\pm\sqrt{2}/2b,\ ae^{-1/2})$ son puntos de inflexión.

22. La constante de equilibrio K de una reacción química, varía con la temperatura absoluta T según la ley $K = K_0 e^{-\frac{1}{2}q(T-T_0)/T_0T}$, siendo K_0, q y T_0 constantes. Hallar la variación de K por grado de variación de T expresando el resultado en tantos por ciento.

El tanto por ciento de la variación de K por grado de variación de T viene dado por $\dfrac{1}{K}\dfrac{dK}{dT} = \dfrac{d(\ln K)}{dT}$

Por tanto $\ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2}q\dfrac{T - T_0}{T_0T}$ y $\dfrac{d(\ln K)}{dT} = -\dfrac{q}{2T^2} = -\dfrac{50q}{T^2}\,\%$.

23. Estudiar la función de las vibraciones forzadas $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\,2\pi t$.

(*a*) Cuando $t = 0$, $y = 0$. La intersección con el eje y es 0.

Cuando $y = 0$, $\text{sen}\,2\pi t = 0$ y $t = \ldots, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$
Estos son los puntos de intersección con el eje t.

(*b*) Cuando $t = \ldots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$, $\text{sen}\,2\pi t = 1$ y $y = e^{-\frac{1}{2}t}$.
Cuando $t = \ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$, $\text{sen}\,2\pi t = -1$ y $y = -e^{\frac{1}{2}t}$.

La función dada oscila entre las dos curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$, siendo tangente a ellas en los puntos mencionados.

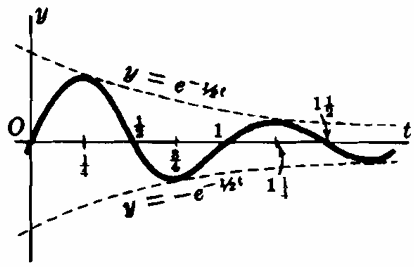


Fig. 14-4

(*c*)
$$y' = f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(2\pi\cos 2\pi t - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi t)$$
$$y'' = f''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\{(\tfrac{1}{4} - 4\pi^2)\,\text{sen}\,2\pi t - 2\pi\cos 2\pi t\}$$

Cuando $y' = 0$, $2\pi\cos 2\pi t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi t = 0$, esto es, $\text{tag}\,2\pi t = 4\pi$.

Si $t = \xi = 0{,}237$ es el ángulo positivo más pequeño que satisface esta relación, tendremos que $t = \ldots, \xi - \frac{3}{2}$ $\xi - 1, \xi - \frac{1}{2}, \xi, \xi + \frac{1}{2}, \xi + 1, \ldots$ son los valores críticos.

Para $n = 0,1,2,\ldots, f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+1}{2}\right)$ tienen signo contrario y $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+2}{2}\right)$ tienen el mismo signo; por tanto, los valores críticos dan lugar, alternativamente, a máximos y mínimos de la función. Estos puntos están situados ligeramente a la izquierda de los puntos de contacto con las curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

(*d*) Cuando $y'' = 0$, $\text{tag}\,2\pi t = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4} - 4\pi^2} = \dfrac{8\pi}{1 - 16\pi^2}$.

Si $t = \eta = 0{,}475$ es el menor ángulo positivo que satisface esta relación, tendremos, $t = \ldots, \eta - 1, \eta - \frac{1}{2}, \eta, \eta + \frac{1}{2}, \eta + 1, \ldots$ son los posibles puntos de inflexión. Estos puntos, situados ligeramente a la izquierda de los puntos de intersección de la curva con el eje x, son puntos de inflexión.

24. En la ecuación $s = ce^{-bt}\,\text{sen}(kt + \theta)$ del movimiento de vibración amortiguado y en la que c, b, k y θ son constantes, demostrar que $a = -2bv - (k^2 + b^2)s$.

$$v = ds/dt = ce^{-bt}\,[-b\,\text{sen}\,(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)]$$

$$\begin{aligned} a = dv/dt &= ce^{-bt}\,[(b^2 - k^2)\,\text{sen}\,(kt + \theta) - 2bk\cos(kt + \theta)] \\ &= ce^{-bt}\,[-2b\{-b\,\text{sen}\,(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)\} - (k^2 + b^2)\,\text{sen}\,(kt + \theta)] \\ &= -2bv - (k^2 + b^2)s \end{aligned}$$

Problemas propuestos

Hallar dy/dx en los Problemas 25-35.

25. $y = \ln(4x - 5)$ *Sol.* $4/(4x - 5)$

26. $y = \ln \sqrt{3 - x^2}$ *Sol.* $x/(x^2 - 3)$

27. $y = \ln 3x^5$ *Sol.* $5/x$

28. $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ *Sol.* $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$

29. $y = x \cdot \ln x - x$ *Sol.* $\ln x$

30. $y = \ln(\sec x + \text{tag}\, x)$ *Sol.* $\sec x$

31. $y = \ln(\ln \text{tag}\, x)$ *Sol.* $2/(\text{sen}\, 2x \ln \text{tag}\, x)$

32. $y = (\ln x^2)/x^2$ *Sol.* $(2 - 4 \ln x)/x^3$

33. $y = \frac{1}{5}x^5(\ln x - \frac{1}{5})$ *Sol.* $x^4 \ln x$

34. $y = x(\text{sen} \ln x - \cos \ln x)$ *Sol.* $2 \,\text{sen} \ln x$

35. $y = x \ln(4 + x^2) + 4 \,\text{arc tag}\, \frac{1}{2}x - 2x$
Sol. $\ln(4 + x^2)$

36. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ en uno de sus puntos (x_0, y_0). Deducir un procedimiento para trazar la tangente a la curva utilizando la intersección con el eje y.

37. Estudiar la función: $y = x^2 \ln x$. *Sol.* Min. en $x = 1/\sqrt{e}$, P.I. en $x = 1/e^{3/2}$.

38. Demostrar que el ángulo de intersección de las curvas $y = \ln(x - 2)$ e $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto $(3, 0)$ es $\phi = \text{arc tag}\, 1/3$.

Hallar dy/dx en los Problemas 39-46.

39. $y = e^{5x}$ *Sol.* $5e^{5x}$

40. $y = e^{x^3}$ *Sol.* $3x^2e^{x^3}$

41. $y = e^{\text{sen}\, 3x}$ *Sol.* $3e^{\text{sen}\, 3x} \cos 3x$

42. $y = 3^{-x^2}$ *Sol.* $-2x \cdot 3^{-x^2} \ln 3$

43. $y = e^{-x} \cos x$ *Sol.* $-e^{-x}(\cos x + \text{sen}\, x)$

44. $y = \text{arc sen}\, e^x$ *Sol.* $e^x/\sqrt{1 - e^{2x}}$

45. $y = \text{tag}^2 e^{3x}$ *Sol.* $6e^{3x}\, \text{tag}\, e^{3x} \sec^2 e^{3x}$

46. $y = e^{e^x}$ *Sol.* $e^{(x + e^x)}$

47. Si $y = x^2e^x$, demostrar que $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

48. Si $y = e^{-2x}(\text{sen}\, 2x + \cos 2x)$, demostrar que $y'' + 4y' + 8y = 0$.

49. Estudiar la función: (*a*) $y = x^2e^{-x}$, (*b*) $y = x^2e^{-x^2}$.
Sol. (*a*) Max. en $x = 2$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = 2 \pm \sqrt{2}$
(*b*) Max. en $x = \pm 1$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = \pm 1{,}51$, $x = \pm 0{,}47$.

50. Hallar el rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$ y uno de sus lados sobre el eje x.
Ind: $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$, siendo $P(x,y)$ un vértice del rectángulo sobre la curva. *Sol.* $A = \sqrt{2/e}$.

51. Demostrar que las curvas $y = e^{ax}$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son tangentes en los puntos $x = 2n\pi/a$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ y que las curvas $y = e^{-ax}/a^2$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son mutuamente perpendiculares en los mismos puntos.

52. Dada la curva $y = xe^x$, demostrar (*a*) que el punto $(-1, -1/e)$ es un número relativo, (*b*) que el punto $(-2\ -2/e^2)$ es un punto de inflexión y (*c*) que la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha del punto de inflexión.

Hallar dy/dx en los Problemas 53-56, aplicando la derivación logarítmica.

53. $y = x^x$ *Sol.* $x^x(1 + \ln x)$

54. $y = x^{\ln x}$ *Sol.* $2\, x^{(\ln x - 1)} \ln x$

55. $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$ *Sol.* $x^2 e^{2x} \cos 3x \{2/x + 2 - 3\, \text{tag}\, 3x\}$

56. $y = x^{e^{-x^2}}$ *Sol.* $e^{-x^2} x^{e^{-x^2}} (1/x - 2x \ln x)$

57. Demostrar (*a*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x + n)e^x$, (*b*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Capítulo 15

Derivada de las funciones hiperbólicas

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS. Supondremos que u es un número real, mientras que no se advierta otra cosa:

$$\operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \coth u = \frac{1}{\operatorname{tagh} u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\operatorname{tagh} u = \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \qquad \operatorname{csch} u = \frac{1}{\operatorname{senh} u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \dfrac{du}{dx}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tagh} u) = \operatorname{sech}^2 u \dfrac{du}{dx}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \dfrac{du}{dx}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tagh} u \dfrac{du}{dx}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \dfrac{du}{dx}$

Ver Problemas 1-12.

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.

$\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$, para todos los valores de u $\qquad \coth^{-1} u = \frac{1}{2}\ln\dfrac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1)$

$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad (u \geqq 1) \qquad \operatorname{sech}^{-1} u = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1-u^2}}{u}, \quad (0 < u \leqq 1)$

$\operatorname{tagh}^{-1} u = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) \qquad \operatorname{csch}^{-1} u = \ln\left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right), \quad (u \neq 0)$

(Unicamente figuran los valores principales de $\cosh^{-1}x$ y $\operatorname{sech}^{-1}x$.)

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

37. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

38. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \quad (u > 1)$

39. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tagh}^{-1} x) = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1)$

40. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1)$

41. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1)$

42. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}, \quad (u \neq 0)$

Ver Problemas 13-19.

Problemas resueltos

1. Demostrar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \tfrac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

2. Derivar: $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ en los Problemas 3-12.

3. $y = \operatorname{senh} 3x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3\cosh 3x$

4. $y = \cosh \tfrac{1}{2}x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\operatorname{senh} \tfrac{1}{2}x$

5. $y = \operatorname{tagh}(1 + x^2)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1 + x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(1 + x^2)$

6. $y = \coth \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2 \frac{1}{x}$

7. $y = x \operatorname{sech} x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)\\ &= x(-\operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2)2x + \operatorname{sech} x^2\\ &= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2 + \operatorname{sech} x^2\end{aligned}$$

8. $y = \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2 + 1)]\\ &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1)[-\operatorname{csch}(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1) \cdot 2x]\\ &= -4x \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1)\end{aligned}$$

9. $y = \tfrac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \tfrac{1}{2}x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{4}(\cosh 2x)2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \operatorname{senh}^2 x$

10. $y = \ln \operatorname{tagh} 2x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tagh} 2x}(2\operatorname{sech}^2 2x) = \frac{2}{\operatorname{senh} 2x \cosh 2x} = 4\operatorname{csch} 4x$

11. Hallar las coordenadas del punto mínimo de la catenaria $y = a\cosh \frac{x}{a}$.

$$f'(x) = \frac{1}{a}\left(a\operatorname{senh}\frac{x}{a}\right) = \operatorname{senh}\frac{x}{a}, \qquad f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$$

Cuando $f'(x) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0$, $x = 0$; $f''(0) > 0$. El punto $(0, a)$ es el mínimo.

12. Hallar los puntos de inflexión de las funciones (*a*) $y = \operatorname{senh} x$, (*b*) $y = \cosh x$, (*c*) $y = \operatorname{tagh} x$.

(*a*) $f'(x) = \cosh x, f''(x) = \operatorname{senh} x$, y $f'''(x) = \cosh x$.

$f''(x) = \operatorname{senh} x = 0$, cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

(*b*) $f'(x) = \operatorname{senh} x, f''(x) = \cosh x \neq 0$ para todos los valores de x. No tiene punto de inflexión.

(*c*) $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x, f''(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tagh} x = -2 \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}$, y $f'''(x) = \dfrac{4 \operatorname{senh}^2 x - 2}{\cosh^4 x}$.

$f''(x) = 0$ cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

13. Deducir: (*a*) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$,

(*b*) $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \dfrac{1}{x} = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, 0 < x \leq 1$.

(*a*) Sea $\operatorname{senh}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ o sea $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

Despejando e^y: $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, puesto que $e^y > 0$. Por tanto, $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(*b*) Sea $\operatorname{sech}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{1}{\cosh y}$, $\cosh y = \dfrac{1}{x}$, e $y = \cosh^{-1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$.

También, $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{2}{e^y + e^{-y}}$ o $e^{2y} x - 2e^y + x = 0$.

Despejando e^y: $e^y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, cuando $y \geq 0$. Por tanto, $y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, 0 < x \leq 1$.

14. Deducir: $\dfrac{d}{dx} (\operatorname{senh}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \dfrac{du}{dx}$.

Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\operatorname{senh} y = u$,

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}$$

Hallar dy/dx en los Problemas 15-19.

15. $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$$

16. $y = \cosh^{-1} e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

17. $y = 2 \operatorname{tagh}^{-1} (\tan \frac{1}{2}x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{tag} \tfrac{1}{2}x)$$

$$= 2 \frac{1}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} \sec^2 \tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} = \sec x$$

18. $y = \coth^{-1} \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1}$$

19. $y = \operatorname{sech}^{-1} (\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot \frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \sec x$$

Problemas propuestos

20. (*a*) Representar las funciones $y = e^x$ e $y = -e^{-x}$ y promediar las ordenadas de las dos curvas para todos los valores de x con objeto de obtener puntos de la función $y = \text{senh } x$. Trazar esta curva.

(*b*) Representar la función $y = \cosh x$ aplicando (*a*) a las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

21. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, demostrar: (*a*) que el punto $P(\cosh u, \text{senh } u)$ es un punto de la hipérbola, (*b*) que la tangente en A corta a la recta OP en el punto $T(1, \text{tagh } u)$. (Ver Fig. 15-1.)

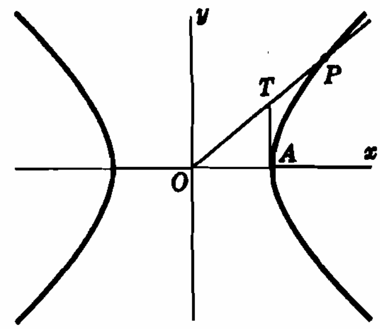


Fig. 15-1

22. Demostrar: (*a*) $\text{senh}(x + y) = \text{senh } x \cosh y + \cosh x \text{ senh } y$

(*b*) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh } x \text{ senh } y$

(*c*) $\text{senh } 2x = 2 \text{ senh } x \cosh x$

(*d*) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2 \text{ senh}^2 x + 1$

(*e*) $\text{tagh } 2x = \dfrac{2 \text{ tagh } x}{1 + \text{tagh}^2 x}$

Hallar dy/dx en los Problemas 23-28.

23. $y = \text{senh } \frac{1}{2}x$ *Sol.* $\frac{1}{2} \cosh \frac{1}{2}x$

24. $y = \cosh^2 3x$ *Sol.* $3 \text{ senh } 6x$

25. $y = \text{tagh } 2x$ *Sol.* $2 \text{ sech}^2 2x$

26. $y = \ln \cosh x$ *Sol.* $\text{tagh } x$

27. $y = \text{arc tag senh } x$ *Sol.* $\text{sech } x$

28. $y = \ln\sqrt{\text{tagh } 2x}$ *Sol.* $2 \text{ csch } 4x$

29. Demostrar: (*a*) Si $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$, se verifica $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$.

(*b*) Si $y = A \cosh bx + B \text{ senh } bx$, siendo b, A, B constante, se verifica $y'' = b^2 y$.

30. Demostrar: (*a*) $\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$, $u \geq 1$.

(*b*) $\text{tagh}^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1 + u}{1 - u}$, $u^2 < 1$.

31. (*a*) Representar la curva $y = \text{senh}^{-1} x$, trazando la simétrica de la función $y = \text{senh } x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

(*b*) Representar la rama principal de la función $y = \cosh^{-1} x$ trazando la simétrica de la mitad derecha de la función $y \cosh x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

32. Deducir las fórmulas de derivación 32-36 y 38-40,42.

Hallar dy/dx en los Problemas 33-36.

33. $y = \text{senh}^{-1} \frac{1}{2}x$ *Sol.* $1/\sqrt{x^2 + 4}$

34. $y = \cosh^{-1}(1/x)$ *Sol.* $-1/x\sqrt{1 - x^2}$

35. $y = \text{tagh}^{-1}(\text{sen } x)$ *Sol.* $\sec x$

36. $x = a \text{ sech}^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$ *Sol.* $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$