.

“Buscando una intuición del caos”

Jesús Muciño Raymundo,

Instituto de Matemáticas UNAM, Morelia, Mich.

Versión preliminar, Taller de Ciencia para Jovenes, CIMAT, Guanajuato, agosto 2003.

Resumen:
Un fenómeno que cambia con el tiempo es *“caótico”* si a primera vista no podemos hallar un “patrón” en su comportamiento a lo largo del tiempo. Por ejemplo: la posición de la luna respecto a la tierra no es caótica pues guarda un patrón. Un segundo ejemplo es: el número de bacterias en una caja de Petri tampoco es caótico, primero aumenta y al agotarse los nutrientes en la caja su número decae a cero. Mientras que las fechas en las que ocurre un temblor de magnitud significativa en la Cd. de México si es un fenómeno caótico. Una de las (des)agradables sorpresas en las matemáticas de los últimos treinta años ha sido el descubrimiento de que fenómenos descritos por reglas muy, pero muy, sencillas resultan ser caóticos. Es apasionante el problema de decidir cuando un fenómeno (tomado de la matemática o de la naturaleza) es caótico. Esto es apasionante, porque no se tiene una respuesta nítida hoy en día sobre cuales son los mecanismos que lo originan.

El objetivo del curso es describir fenómenos no caóticos y caóticos (¡ claro !) usando objetos matemáticos sencillos; rectas, parábolas, y bichos así. Nuestro laboratorio esta formado por hojas de papel, regla y lápiz. Cuando haga falta usaremos la computadora para mirar los fenómenos a escalas grandes o pequeñas; con ello la computadora a veces es como un telescopio y otras como un microscopio (lo que resulta ser un laboratorio más de acuerdo a nuestros tiempos).

-1. La matemática como ciencia de los modelos.

¿ Qué es la matemática ?, sin duda es una pregunta complicada. Quizá hay tantas respuestas como matemáticos hay (¡ viva la libertad !). Para el objetivo de estas notas nos convendra decir que:

"la matemática es la ciencia de los modelos".

¿ Qué significado tiene esto ?

Ejemplo. Los números naturales; 1, 2, 3,... etc. son un modelo.

Ejemplo. El calcular el área del piso de una habitación rectángular mediante $(base) \times (altura)$ es un modelo.

Evidentemente; los modelos y su estudio constituyen algo útil. Un ejemplo dramático de esto lo constituye el siguiente:

Ejemplo. El modelo de Erastótenes para calcular la longuitud del ecuador terrestre.

El problema de Erastótenes (hacia el siglo III A. C.) es estimar la longitud E de un ecuador terreste.

Se tiene como *hipótesis* el hecho de que la tierra es esférica y que los rayos del sol llegan a la tierra formando lineas paralelas.

La solución rudimentaria seria recorrer un ecuador terrestre y medir su distancia. La *solución* con el modelo es como sigue: Erastótenes observa que los rayos solares en la ciudad de Cirene, también llamada Asuán (al sur de Egipto), cierta fecha de verano a mediodía, caen perpendiculares a la superficie terrestre. La misma fecha de otro año, hace la misma observación desde Alejandría (ciudad al norte de Cirene), estableciendo que la inclinación de los rayos solares era ahí de 9^o grados. La distancia entre Alejandría y Cirene era conocida, digamos, 1000 kilómetros actuales. Una regla de tres:

$$\frac{1000}{9^o} = \frac{E}{360^o} ,$$

le da la respuesta $E = 40000$ kilómetros. Finalmente podriamos comparar el resultado de Erastótenes con los resultados actuales para E. Cabe notar que diversas fuentes, dan distintos valores a las mediciones de Erastótenes con respecto a grados y distancias.

El modelo de Erastótenes exhibe claramente las virtudes y defectos de la matemática como "ciencia de los modelos".

Virtudes:

- El modelo nos ahorra trabajo.
- El modelo nos permite "predecir".
- El modelo capta solo algunos aspectos del problema que nos interesa, es una simplificación (no necesitamos considerar a las montañas o valles de la tierra).
- El modelo es universal, esto es, aplica a muchas otras situaciones (un marciano o un selenita lo pueden usar, para medir el ecuador de Marte, la Luna etc.).

Etc.

Defectos:
- El modelo puede ocultar algunos aspectos esenciales del problema (ahora sabemos que la tierra no es perfectamente esférica, es achatada por los polos).
- Los resultados del modelo deben contrastarse con los resultados experimentales; hoy sabemos que el ecuador terrestre mide 40076 kilómetros apróximadamente.
- El modelo resulta inexacto a ciertas escalas (haciendo la segunda medición no en Alejandría, sino solo a 10 kilómetros al norte de Cirene, el modelo predice que la tierra es plana, esto es una esfera de radio infinito).
- Al buscar mejorar las predicciones del modelo; se complican las matemáticas (queda de tarea al lector meditar como mejorar el modelo).
Etc.

Quizá lo más relevante para el estudioso de las matemáticas es que: una vez que hemos creado el modelo; el posee "vida" propia, y no tiene por que predecir lo que apriori deseamos, no nos obedece, (a esto le llamo la paradoja del Dr. Frankestein).

Ejercicio. Considera un mapa plano de los cinco continentes de la tierra, pensado como un modelo de la esfera terrestre. Determina algunas virtudes y defectos del modelo.

0. Sobre la dificultad de hablar de matemáticas: codificar y decodificar.

Una de las dificultades mayores para platicar de matemáticas es que sus objetos y modelos son abstractos; esto es, estan codificados.

Para comunicarnos mejor debemos a aprender a decodificiarlos.

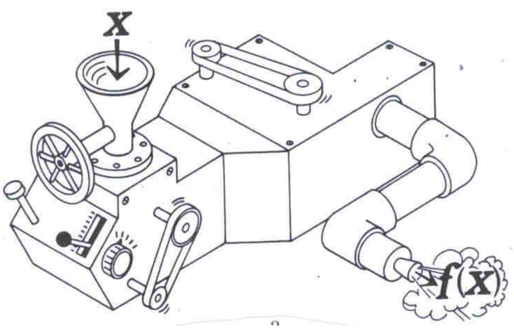
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. Un intervalo cerrado por definición es un conjunto del tipo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Una función

$$f : [a, b] \to [c, d]$$

es una ley o correspondencia tal que a cada punto $x \in [a, b]$ le asocia un único punto llamado $f(x) \in [c, d]$.

Decimos que la frase anterior esta codificada; hemos seleccionado las palabras y símbolos para abstraer algo. Tratemos de decodificarla. Burdamente dicho una función $f : [a, b] \to [c, d]$ es como una máquina; introducimos x y obtenemos $f(x)$, ver figura.



Otra manera de decodificarla es dando ejemplos: La correspondencia que cada número le asocia su cuadrado es una función, en símbolos $f(x) = x^2$.

La correspondencia que cada número x le asocia el número $(1.1)x$ (que puede ser el interés anual de una cantidad depositada en el banco es una función), en símbólos $f(x) = (1.1)x$.

Entonces las funciónes son útiles pues nos intervienen en nuestros ahorros bancarios.

1. Sistemas dinámicos discretos.

Los modelos matemáticos que estudiaremos en estas notas son como sigue.

Consideramos un intervalo de valores posibles que puede asumir un fenómeno que deseamos estudiar

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} ,$$

donde $\mathbb{R}$ son los números reales, al conjunto $[a, b]$ le llamamos *el espacio de estados del sistema.* Cada x representa un posible valor que puede asumir el fénomeno que deseamos estudiar, por ejemplo x puede ser; el número de habitantes en una población, una temperatura, la proporción de cierto tipo de átomos en una substancia etc.

Nos es permitido hacer observaciones de nuestro fenómeno cada tiempo Δt, donde Δt es una unidad de tiempo adecuada al fenómeno, con ello podemos pensar *el tiempo de sistema* como la colección de tiempos

$$\{0\Delta t, 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ...\}$$

o escrito de forma más abreviada

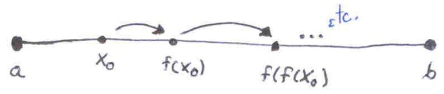
$$\{0, 1, 2, 3, ...\} \ = \{n\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \ .$$

Consideremos una función $f : [a, b] \to [a, b]$, definimos que;
- si x es un estado del sistema al tiempo n, entonces
- $f(x)$ nos proporciona el estado del sistema correspondiente al tiempo $n + 1$.

A $f(x)$ le llamamos *la ley de evolución del sistema.*

Con ello tenemos que si x_0 es el estado del sistema al tiempo $t = 0$, entonces;
$f(x_0)$ es el estado del sistema al tiempo $t = 1$,
$f(f(x_0))$ es el estado del sistema al tiempo $t = 2$,
$f(f(f(x_0)))$ es el estado del sistema al tiempo $t = 3$,
etc. O quizá sea más gráfico escribir la evolución de un punto x_0 bajo el sistema dinámico como:

$$x_0 \mapsto f(x_0) \mapsto f(f(x_0)) \mapsto f(f(f(x_0)))...$$



Definición. Un *sistema dinámico discreto* es una terna $\{[a, b], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f(x)\}$, de objetos como los descritos arriba.

Ejemplo. El amigo incómodo. Supongamos que tenemos un amigo que cada vez que nos encuentra nos pide la mitad del dinero que traemos en la bolsa. Si pensamos que $x \in \mathbb{R}$ es el dinero que traemos y la ley de evolución es $f(x) = x/2$ podemos preguntarnos: ¿ Empezando con \$ 1320, cuanto tardará nuestro "amigo" en dejarnos con menos de \$ 1 ? ¿ Si nuestro dinero fuese infinitamente divisible nuestro "amigo" podría dejarnos sin dinero en un tiempo finito n ?

Ejemplo. El calculista obsesivo. Provisto de una calculadora un niño marca un número x y aprieta n veces la tecla $\sqrt{\ }$. La ley de evolución es $f(x) = \sqrt{x}$. ¿ Si empieza con $x = 64$ que número verá en la pantalla después de apretar la tecla de la raíz cuadrada cinco veces ?, ¿ déspues de cien veces ?

Ejemplo. Consideremos x como el número de individuos de una especie en un hábitat, supondremos que

- los recursos del hábitat son ilimitados,
- la población se encuentra aislada,
- la población es homogénea,
- el hábitat es homogéneo.
- La capacidad reproductiva de cada individuo es como rx, donde $r > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.

El *modelo de Thomas Robert Maltus* (1776–1884), es el que describe el cambio en la población como sigue; si a tiempo $n\Delta t$ tenemos x_0 individuos en la población, entonces al trancurrir un intervalo de tiempo Δt tenemos que el nuevo número de individuos es:

$$f_M(x_0) = rx_0 \ .$$

Si una población pasa de 10 millones de habitantes a 15 millones en un periódo Δt de 10 años. ¿ Cuanto vale r para el modelo de Malthus respectivo ? ¿ Cuantos años son necesarios para que esa población alcanze los 100 millones ?

Asociado a un sistema dinámico tenemos los siguientes conjuntos.

El conjunto de las funciones que resultan de aplicar la función n–veces,

$$\{f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ..., \text{etc. }\},$$

usamos para ellas la notación

$$f^{(n)}(x) = f(...f(x)...) \quad \text{con } n \text{ repeticiones de } f.$$

A la función $f^{(n)}(x) : [a,b] \to [a,b]$ le llamamos la *n–ésima iterada de f.*

Dado un punto $x_0 \in [a,b]$ tenemos el conjunto de todos los puntos que visita x_0 en $[a,b]$ bajo las iteradas de f, este conjunto se escribe como

$$\mathcal{O}(x) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...\} \ ,$$

a este conjunto le llamamos la *órbita de x_0 bajo f.*

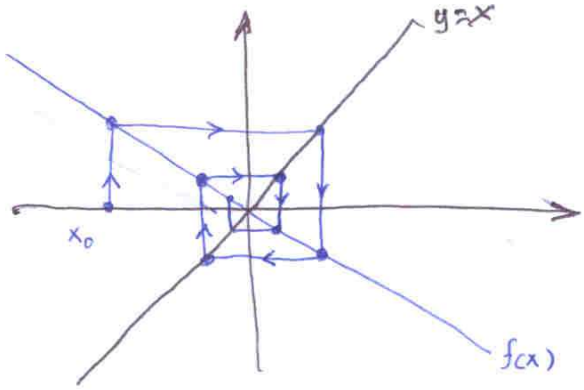
2. El método de la telaraña.

Dada $f : [a,b] \to [a,b]$, nos interesa dar un método gráfico que nos permita visualizar las órbitas de f.

i) Dibujamos la gráfica de f en el plano cartesiano, esto es dibujamos en el plano todos los puntos de la forma $\{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$.
ii) Dibujamos la gráfica de la recta $y = x$, esta es una recta diagonal de pendiente uno que pasa por el origen en $\mathbb{R}^2_{xy}$.
iii) Supongamos que partimos de $x \in [a, b]$, gráficamos el punto $(0, x)$ en el eje x.
iv) Trazamos el segmento de recta vertical que une el punto $(x, 0)$ con $(x, f(x))$.
v) Trazamos el segmento de recta horizontal que une el punto $(x, f(x))$ con $(f(x), f(x))$.
vi) Trazamos el segmento de recta vertical que une el punto $(f(x), f(x))$ con $(f(x), f(f(x)))$.
vii) Trazamos el segmento de recta horizontal que une el punto $(f(x), f(f(x)))$ con $(f(f(x)), f(f(x)))$.
Etc.

Al hacer esto obtenemos en el plano una poligonal formada por los segmentos verticales y horizontales que describe como evoluciona x bajo f.

Ejemplo. El nombre del método es evidente cuando lo aplicamos para $f(x) = (0.7)x$.



Hablando con sinceridad el método de la telaraña trabaja bien para ciertos comportamientos de f pero es insuficiente para comportamientos complicados, como veremos más adelante.

3. El problema fundamental: predecir el comportamiento del sistema al futuro.

Dado un sistema dinámico cuya ley de evolución es $f : [a, b] \to [a, b]$, *el problema fundamental* es: describir para todo punto inicial x_0 como se comporta la órbita respectiva

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...\}$$

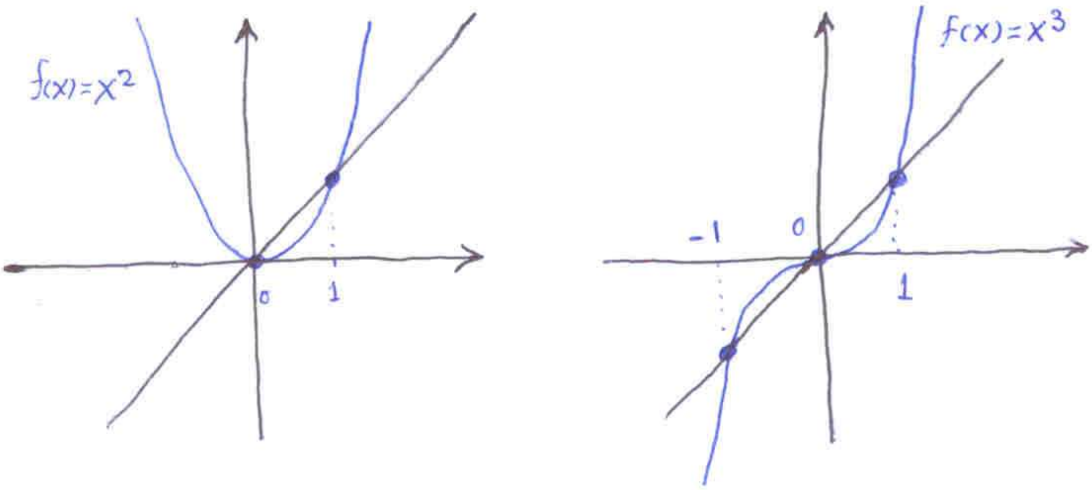
cuando el tiempo n va a infinto.

Con esta redacción es difícil decir que tipo de respuesta podemos esperar, entonces es más explícito mencionar algunos comportamientos típicos que pueden aparecer.

Definición. Decimos que x_* es un *punto fijo* de f si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ consta unicamente del punto x_*, esto es, $f(x_*) = x_*$.

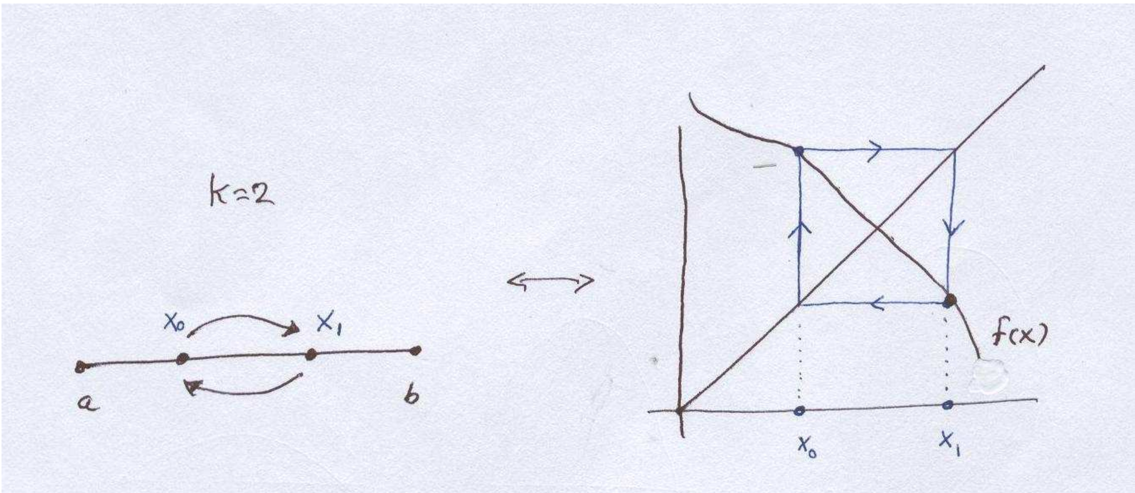
Pictóricamente, un punto fijo se queda sin moverse bajo f. Esto se muestra en las figuras del ejemplo siguiente.

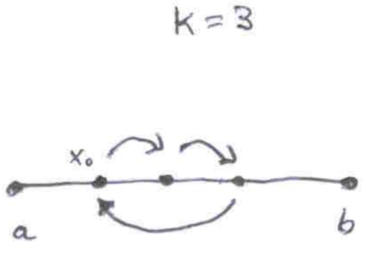
Técnicas para detectar este comportamiento: Los puntos fijos pueden detectarse resolviendo la ecuación $f(x) = x$, donde x es la incógnita. Los puntos fijos los detectamos como la intersección de la gráfica de $f(x)$ con la gráfica de $y = x$ en el plano $\mathbb{R}_{x,y}$.
Ejemplo. Los puntos fijos para $f(x) = x^2$ son dos 0 y 1. Los puntos fijos para $f(x) = x^3$ son tres $-1,\ 0$, y 1.

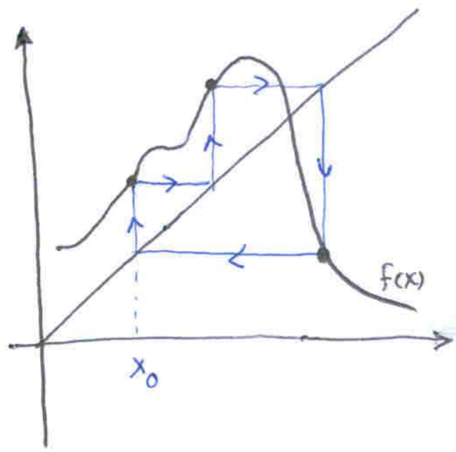


Ejercicio. Calcula los puntos fijos de:
$f(x) = sen(x)$,
$f(x) = x^2 - 2x - 5$.
Definición. Decimos que x_* es un *punto périodico de orden* k de f si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ posee exactamente k puntos distintos, esto es, $f^{(k)}(x_*) = x_*$ y adicionalmente $f^{(i)}(x_*) \neq f^{(j)}(x_*)$ para todo i y j distintos entre si y tomando valores de 1 a k.

Pictóricamente un punto periódico de orden k se mueve recorriendo exactamente k lugares distintos cuando el tiempo n va a infinito, ello se ve como:



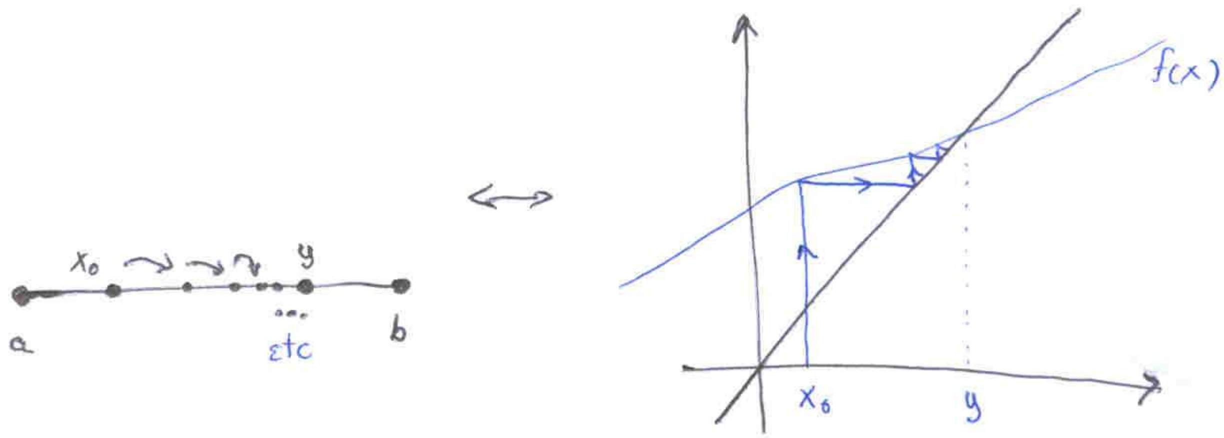




Técnicas para detectar este comportamiento: Los puntos periódicos de orden k, pueden detectarse resolviendo la ecuación $f^{(k)}(x) = x$, aunque dicho con sinceridad aún en f sencillas las ecuación es difícil. Los puntos periódicos de orden k los detectamos como la intersección de la gráfica de $f^{(k)}(x)$ con la gráfica de $y = x$ en el plano $\mathbb{R}_{x,y}$. Pero en ambos casos debe también verificarse que los puntos detectados no aparezcan como puntos periódicos de periodo menor, ya que un punto periódico de orden $j \geq 1$ es también un punto periódico de orden $2j$, $3j$... etc.
Ejemplo. En los dibujos mostramos puntos periódicos de orden 2 y 3.

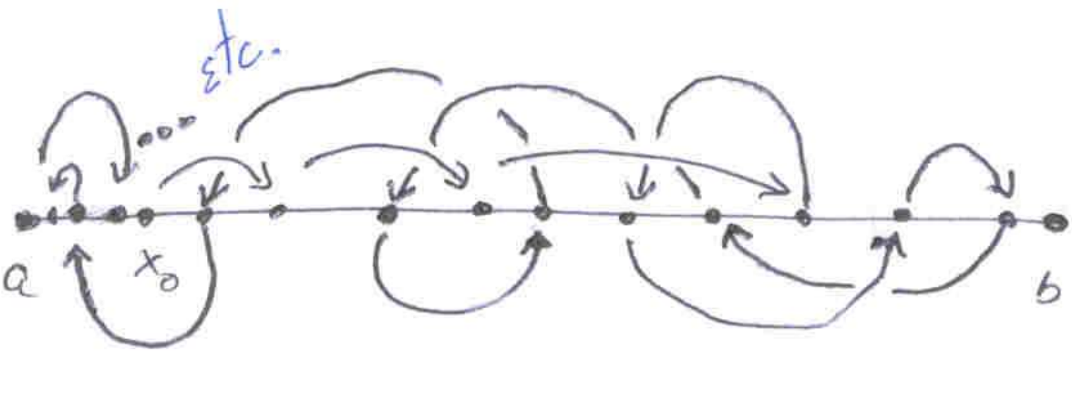
Ejercicio. Calcula los puntos fijos y los puntos de periódo 2 de $f(x) = 1 - x^2$. Muestra funciones $f(x)$ que se vean como el dibujo anterior.
Definición. Decimos que x_* *tiene órbita que cae a un punto* y bajo f, para $y \in [a, b]$ un punto dado, si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ posee un número infinito de puntos distintos, y dado cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $[y - \delta, y + \delta] \subset [a, b]$ la órbita intersecta al intervalo $[y - \delta, y + \delta]$. Esto es la órbita de x_* contiene elementos que se acercan tanto como pidamos al punto $y \in [a, b]$ y se queda siempre cerca de él.

Pictóricamente un punto x_* tiene órbita que se acumula al punto y si bajo f se acerca cada vez más a y, ello se ve como:



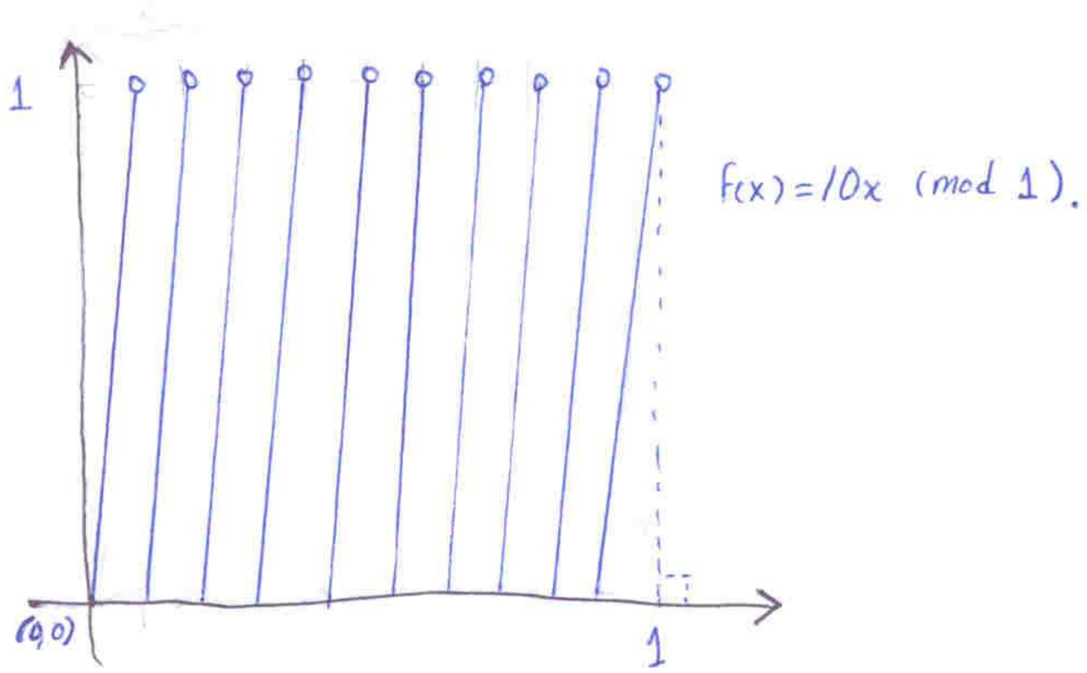
Técnicas para detectar este comportamiento: Se describen en una sección 5, más adelante.
Ejemplo. La órbita de cualquier número x_* positivo cae a $x = 1$, bajo la función $f(x) = \sqrt{x}$.
Ejercicio. Gŕafica la familia de funciones $f(x) = x^m$, para m un entero fijo, y que puede tener signo positivo o negativo ($f(x) = x^7$ y $f(x) = (1/x)$... etc., son ejemplos de la familia). El punto $x_* = 1$ es siempre punto fijo. Discute para que valores de m, los puntos cercanos a $x_* = 1$ caen a él. Usa el método de la telaraña.
Definición. Decimos que x_* *tiene orbita densa* bajo f si la órbita $\mathcal{O}(x_*)$ posee un número infinito de puntos distintos, y dado cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $[y-\delta, y+\delta] \subset [a,b]$ la órbita intersecta al intervalo $[y-\delta, y+\delta]$. Esto es la órbita de x_* contiene elementos que se acercan tanto como pidamos a cualquier otro punto $y \in [a,b]$.

Pictóricamente un punto x_* tiene órbita densa bajo f si visita cercanamente a todo punto y en $[a,b]$ para tiempos n suficientemente grandes; es como un vagabundo nunca para y se acerca a los demas puntos en $[a,b]$, ello se ve casi como (note que este fenómeno es indibujable):



Técnicas para detectar este comportamiento: el método de la telaraña es insuficiente. El autor no conoce una técnica general.
Ejemplo. Sea $f(x) : [0,1] \to [0,1]$ la función que a $x \in [0,1]$ lo múltiplica por 10 y le quita su parte entera, esto es la función se queda con la parte decimal de $(10)x$. Por ejemplo

$f(0.314159...) = (0.14159...)$, $f(0.14159...) = (0.4159...)$, etc. La notación para esta función es $f(x) = 10x(mod\ 1)$. La gráfica de f es como sigue:



La función $f(x) = 10x(mod\ 1)$ posee puntos x_0 tal que su órbita se hace densa en todo $[0, 1]$.
Ejercicio.

4. ¿ Por qué el problema fundamental es difícil ?

Algunas dificultades para estudiar las órbitas de $f(x)$ son las siguientes:
- ¿ Si f es un polinomio de grado d mayor o igual a dos (por ejemplo $f(x) = 4x(1-x)$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, etc.), entonces $f^{(n)}(x)$ es un polinomio de grado d^n. Al ir el tiempo n a infinito, el grado de $f^{(n)}$ va a infinito.
- Para otros tipos de funciones el cálculo támbien se complica, por ejemplo, si $f(x) = sen(x)$, entonces la órbita de un punto x_0 toma la forma

$$\{x_0, sen(x_0), sen(sen(x_0)), sen(sen(sen(x_0))), ...\}$$

que es una descripción poco intuitiva.
De hecho el problema es que deseamos estimaciones del comportamiento de la órbita para cuando n va a infinito. ¿ Como puede hacerse eso sin equivocación ?
Otro problema es que al usar computadoras ellas solo pueden mirar a un número finito de puntos x_* en $[a, b]$. ¿ Explique por qué ?

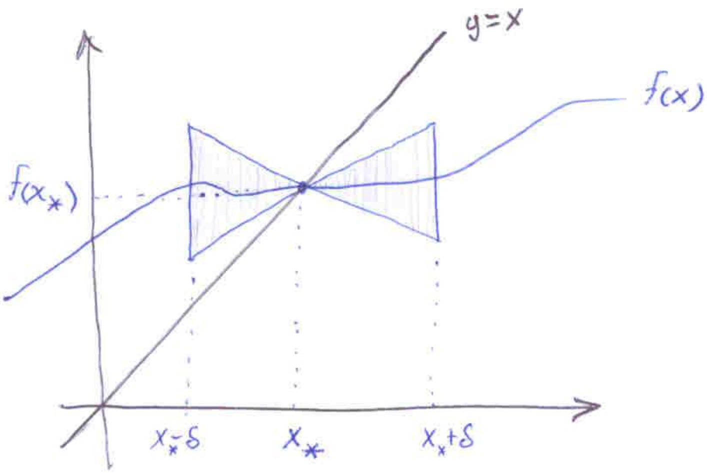
Ello simplifica el problema: por ejemplo si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito toda función $f : A \to A$ da origen a un sistema dinámico discreto con todos sus puntos periódicos.

Afortunadamente $[a, b]$ tiene siempre una infinidad de puntos.

5.- Atractores y repulsores.

Nuestro objetivo es decribir el comportamiento de las órbitas cerca de un punto fijo. Vamos a caracterizar dos comportamientos que ocurren con frecuencia.

Sea x_* un punto fijo de $f(x)$, consideramos dos rectas que pasan por el punto $(x_*, f(x_*))$ con pendientes $+m$ y $-m$, para $0 \leq m < 1$. Esas dos rectas determinan una región sombreada que llamamos un moñito, ver figura abajo.



Lema. *Si la gráfica de f se encuentra dentro del moñito con vértice $(x_*, f(x_*))$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para todo número $z \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ la órbita de z cae a x_*.*

Definición. A un punto fijo x_0 que satisface afirmativamente las hipótesis del Lema le llamamos un *punto atractor*.

Los puntos atractores son amigables; atraen a los puntos cercanos a ellos.

Idea de la demostración del Lema. El argumento es por comparación, para simplificar la notación supongamos sin pérdida de generalidad que $(x_*, f(x_*)) = (0, 0)$. Sea $h(x) = mx$ la función que tiene como gráfica a una de las rectas que determinan el moñito.

Si tomamos z_0 cercano al punto fijo $x_* = 0$ tal que la gráfica de f esta contenida en el moñito entonces;

$$|h(z_0)| \geq |f(z_0)| \geq 0,$$

donde $| * |$ es la distancia del número $*$ al origen, y repitiendo la aplicación de h y f tenemos

$$|h(h(z_0))| \geq |f(f(z_0))| \geq 0$$

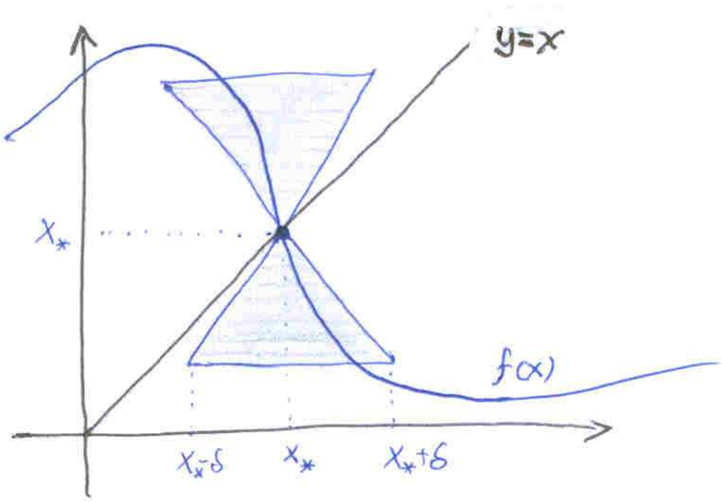
$$|h(h(h(z_0)))| \geq |f(f(f(z_0)))| \geq 0$$

y así sucesivamente. Calculamos ahora el caso general, subtituyendo la expresión de h y realizando las operaciones tenemos que

$$|h^{(n)}(z_0))| = |m^n z_0| \geq |f^{(n)}(z_0)| \geq 0.$$

Como $|m|$ es menor que uno, entonces m^n va a cero cuando n va a infinito y necesariamente $|m^n z_0|$ va a cero también. Otra forma de verificar esto es usar el metodo de la telaraña para h usando que $0 < |m| < 1$. Por la desigualdad de arriba $h^{(n)}(z_0)$ empuja a $f^{(n)}(z_0)$ a ir al punto fijo $x_* = 0$.

Sea x_* un punto fijo de $f(x)$, consideramos dos rectas que pasan por el punto $(x_*, f(x_*))$ con pendientes $+M$ y $-M$, para $M > 1$. Esas dos rectas determinan una región sombreada que llamamos un moñito, ver figura abajo.



Lema. *Si la gráfica de f se encuentra dentro del moñito con vértice $(x_*, f(x_*))$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para todo número $z_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ la órbita de z_0 abandona el intervalo $[x_* - \delta, x_* + \delta]$.*

Definición. A un punto fijo x_* que satisface afirmativamente las hipótesis del Lema le llamamos un *punto repulsor*.

Los puntos atractores son desgradables; alejan a los puntos cercanos a ellos.

Idea de la demostración del Lema. El argumento es por comparación, para simplificar la notación supongamos sin pérdida de generalidad que $(x_*, f(x_*)) = (0, 0)$. Sea $h(x) = Mx$ la función que tiene como gráfica a una de las rectas que determinan el moñito.

Si tomamos z_0 cercano al punto fijo $x_* = 0$ tal que la gráfica de f esta contenida en el moñito entonces;

$$|f(z_0)| \geq |h(z_0)| \geq 0,$$

y repitiendo la aplicación de h y f tenemos

$$|f(f(z_0))| \geq |h(h(z_0))| \geq 0$$

$$|f(f(f(z_0)))| \geq |h(h(h(z_0)))| \geq 0$$

y así sucesivamente. Subtituyendo la expresión de h y realizando las operaciones tenemos que

$$|f^{(n)}(z_0)| \geq |h^{(n)}(z_0))| = |M^n z_0| \geq 0.$$

Como $|M|$ es mayor que uno, entonces M^n va a infinito cuando n va a infinito y necesariamente $|M^n z_0|$ se hace mayor que δ para un n adecuado. Otra forma de verificar esto es usar el método de la telaraña para h usando que $|M| > 1$. Por la desigualdad de arriba $h^{(n)}(z_0)$ empuja a $f^{(n)}(z_0)$ también a salir de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

6. Sistemas dinámicos que provienen de parábolas.

Vamos a considerar ahora una familia de sistemas dinámicos que es famosa; la función es

$$f(x) = \lambda x(1 - x) : [0, 1] \to [0, 1]$$

para λ un número que podemos seleccionar en $[0, 4]$. Cada que seleccionamos una λ, tenemos una función, por ello es una familia de sistemas dinámicos.

¿ Como surgio esta familia ?

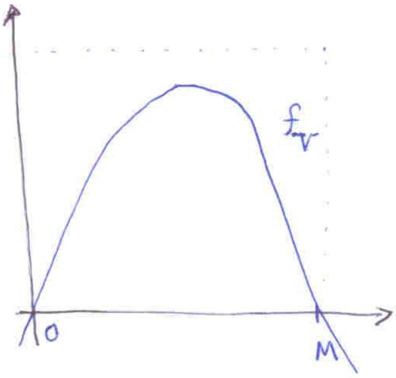
Consideremos x como el número de individuos de una especie en un hábitat, supondremos que

- los recursos del hábitat son finitos,
- la población se encuentra aislada,
- la población es homogénea,
- el hábitat es homogéneo.
- Cada intervalo de tiempo el número de encuentros entre dos individuos será como $sx(x - 1)$, donde $1 > s > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.
- La capacidad reproductiva de cada individuo sera como rx, donde $r > 0$ es una constante biológica que depende de la especie.

El *modelo de Pierre-Francois Verhulst* (1809– ?) o *modelo lógistico discreto* es el que describe el cambio en la población como sigue; si a tiempo t tenemos x_0 individuos en la población, entonces al trancurrir un intervalo de tiempo δt tenemos que el nuevo número de individuos es:

$$f_V(x_0) = rx_0 - sx_0(x_0 - 1) = (r + s)x_0 - sx_0^2 \ .$$

Ya que para los modelos de población solo nos interesa $x \geq 0$ y $f_V(x) \geq 0$, esto es las poblaciones con valor negativo no tienen interpretación. Entonces el dibujo de la gráfica de f_V se ve como abajo, donde 0 y M son las raices de la cuadrática f_V.



Es natural pensar M como el número máximo de individuos que asume la población y ello implíca que f_V debe ser una función del tipo $f_V : [0, M] \to [0, M]$. En resumen:
- f_V es una parábola,
- abre hacia abajo,
- tiene raices en 0 y M,
- su máxima altura, $f(M/2)$, es menor o igual a M.

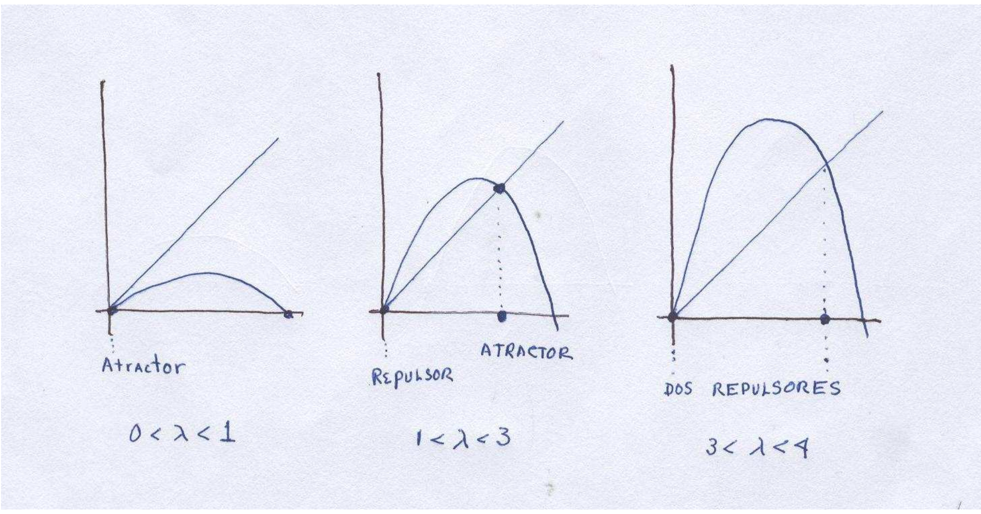
Las propiedades del sistema dinámico de $f_V : [0, M] \to [0, M]$, al cambiar la escala de [0,M] por [0,1], son exactamente las mismas que describe la familia

$$f(x) = \lambda x(1 - x) : [0, 1] \to [0, 1] \ .$$

Resumimos a continuación parte del estudio de Robert May (en los 70's) para el modelo logistico:

Lema. *Si* $0 < \lambda < 1$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1 - x)$ *posee un solo punto atractor.*
Si $1 < \lambda < 3$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1 - x)$ *posee un punto atractor y un repulsor.*
Si $3 < \lambda \leq 4$, *entonces* $f(x) = \lambda x(1 - x)$ *posee dos puntos repulsores.*

El lema es fácil de probar. En la siguientes figuras damos los casos respectivos.



7. Una primera intuición del caos: estirar y doblar produce caos.

Definición. Decimos que una función $f : [a, b] \to [a, b]$ posee *sensibilidad respecto a condiciones iniciales* si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cada x_0 y para conjunto abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existe un punto y en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y un número k tal que $f^{(k)}(x_0)$ y $f^{(k)}(y)$ se han separado más que ϵ.

Explicando en más detalle; arbitrariamente cerca del punto x_0 existen puntos y tal que al aplicar suficientes veces la función f sus puntos respectivos $f^{(k)}(x_0)$ y $f^{(k)}(y)$ se ha separado a distancia más que un número $\epsilon > 0$, que previamente se dio.

Definición. Debida a Robert Devaney en los 80's. Decimos que una función $f : [a, b] \to [a, b]$ es *caótica* si:

- posee una órbita densa,
- el conjunto de puntos periódicos de f es denso en [a,b], i.e. arbitrariamente cerca de todo $y \in [a, b]$ hay puntos periódicos,
- f posee sensibilidad respecto a condiciones iniciales.

Nuestro resultado principal es ahora:

Teorema. *Las funciones*
$f(x) = 4x(1 - x)$,
$f(x) = 10x(mod\ 1)$,
son caóticas.

Las idea de las pruebas se explorará en el Taller.

Podemos notar que ambas funciones satisfacen que:

(R) Todos sus puntos fijos son repulsores (con "suficiente fuerza de repulsión") y carecen de atractores.

(E-D) Ambas pueden interpretarse como que "estiran y doblan" $[0, 1]$ sobre si mismo.

Nuestra intuición es que cualquier función satisfaciendo (R) ó (E-D) debe ser caótica.

Esta intuición es confirmada por muchos otros ejemplos en otros contextos. Pero el autor no conoce un enunciado matématico riguroso que permita afirmar que: R o (E-D) implíca caos.

Podemos regresar a casa con esa intuición como un mecanismo de caos, concientes de que las matemáticas modernas tienen todavía mucho que aclarar.

Algunas preguntas que nadie sabe responder:

- ¿ Como hallar técnicas generales que permitan detectar órbitas periódicas ?
- ¿ Como hallar técnicas generales que permitan detectar órbitas densas ?
- Un teorema famoso de Li y Yorke afirma que "la existencia de puntos de periódo tres implíca que la función es caótica" ¿ Como hallar otras condiciones que impliquen caos ?

12. Referencias.

Discrete Chaos, por Saber N. Elyadi, Chapman and Hall (2000).
Matemáticas para las Ciencias Naturales, por José Luis Gutiérrez Sánchez y Faustino Sánchez Garduo, Aportaciones Matematicas, Sociedad Matemática Mexicana (1998).
The best possible time to be alive, por Robert May, en el libro It Must be Beautiful, Great Equations of Modern Sience. editado por G. Farmelo, Granta (2002).
¿ Juega Dios a los dados ? por Ian Stewart, Gijalbo Mondadori (1991).