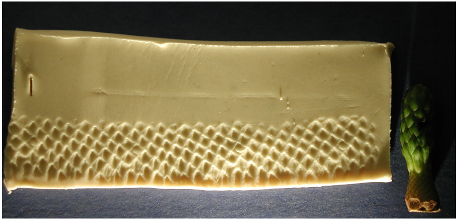
Taller "Matemáticas y Plantas"

Christophe Golé, Smith College

CIMAT, Guanajuato, 2016

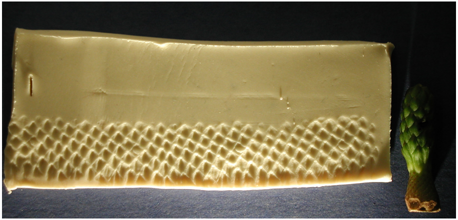
¿ Que tipo de números de espirales en plantas ?

1. Contar espirales en plantas



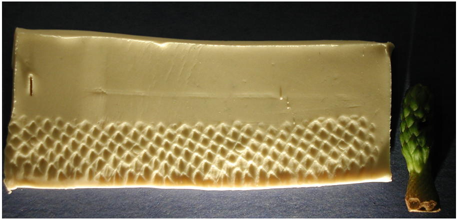
Magnolia

piña de pino



¿ Que tipo de números de espirales en plantas ?

1. Contar espirales en plantas



Magnolia

piñon

2. Desde los números observados, completar la secuencia $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots\}$ que parecen seguir las plantas y encontrar su definición

¿Que tipo de función es F_n?

Encontramos $\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (*) \quad F_0 = 0, F_1 = 1 \quad (**)}$

3. Genera y traza los puntos $(0, F_0), (1, F_1), (2, F_2), (3, F_3), \ldots, (10, F_{10})$ en Geogebra usando Spreadsheet.
4. Junto con estos puntos, traza una función que aproxima su progreción.
5. Busca dos reales $x > y$ tales que las secuencias $\{1 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ y $\{1 = y^0, y^1, y^2, \ldots, y^n, \ldots\}$ satisface $(*)$. (*Hint.* Nota que si supones $F_n = x^n$ en $(*)$, x tiene que ser solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$)
6. Encuentre números reales a, b tales que

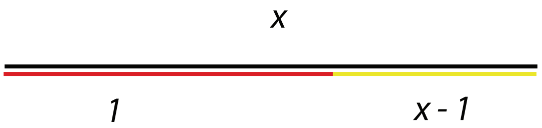
$$F_n = ax^n + by^n$$

(*Hint.* Usa $(**)$)

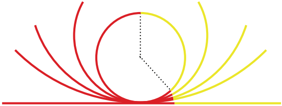
Números de espirales v.s. ángulo de divergencia

7. Calcula la representacíon decimal de los cocientes F_n/F_{n-1} para $n = 1$ hasta $n = 10$. ¿Que observas?
8. Usando Pregunta 6, calcula el limite de F_n/F_{n-1} cuando n va al infinito (Hint. Uno de x^n o y^n va a cero cuando n va al infinito)
9. Comparte un segmento de línea de longitud x en dos segmentos: uno de longitud 1, el otro de longitud $x - 1$ (ve el dibujo). Prueba que la longitudes de esta partición del segmento satisface :

$$\text{Todo}/\text{Grande} = \text{Grande}/\text{Pequeño}$$



10. Compartiendo la circunferencia del circulo con la proporción anterior, se obtiene dos àngulos. Calculalos.
11. Compara los ángulos anteriores con los àngulos entre hojas consecutivas en la planta de la foto. (Estos ángulos se llaman *ángulos de divergencia.*)



números racionales y irracionales

Un número racional es de la forma $\frac{p}{q}$ donde ambos p y q son enteros. Un número real que no es racional es ... irracional.

10. Prueba que $\sqrt{5}$ es irracional.
11. Prueba que el número de oro es irracional

Nunca conocemos el valor de un irracional perfectamente. Solamente conocemos algunas de sus aproximaciónes racionales. La exploraciòn que viene es inspirada por el bonito articulo deTony Phillips.

Por ejemplo, para $\pi = 3.141592654\cdots$:

$$\begin{aligned} r_0 &= 3 &&= \frac{3}{1} \\ r_1 &= 3.1 &&= \frac{31}{10} \\ r_2 &= 3.14 &&= \frac{314}{100} \\ r_3 &= 3.141 &&= \frac{3141}{1000} \\ r_4 &= 3.1415 &&= \frac{31415}{10000} \\ &\vdots \end{aligned}$$

El error que hacemos usando la aproximación r_k en lugar de π es:

$$\pi - r_k < 10^{-k}$$

(¿Porque?)

Fracciónes continuas

Hay otras aproximación mejores. Por ejemplo, el error

$$\pi - 22/7 = \pi - 3.14286 < 0.00127$$

es mucho menor que $1/10$, aunque $7 < 10$
Las mejores aproximaciónes de un real $x > 0$ siempre vienen de su **fraccion continua**:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

en donde $a_k \in \mathbb{N}$

Se aproxima x truncando su fracción continua:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_1 \\
c_2 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2} \\
c_3 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} \\
c_4 &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

donde $\lim_{k\to\infty} c_k = x$.

Los c_k's siempre oscilan alrededor de x: $c_1 < x$, $c_2 > x$, $c_3 < x$ etc. Y los a_k son los mas grandes que hacen eso posible.

Fracción continua de π

- $c_1 = 3 = a_1$ (siempre es la parte entera de x)
- a_2 es el mas grande entero tal que que $3 + 1/a_2 > \pi$.
  - $a_2 = 10$ es demasiado grande: $3 + 1/10 = 3.1 < \pi$.
  - $a_2 = 5$ resulta en $3 + 1/5 = 3.2 > \pi$, pero se puede mejorar: $3 + 1/7 = 22/7 = 3.14286 > \pi$ (¡nuestro viejo amigo!).
  - 7 es el mas grande a_2 posible: $a_2 = 8$ resulta en $3 + 1/8 = 3.125 < \pi$.
  - Entonces:

$$a_2 = 7, c_2 = \frac{22}{7}$$

12. Encontrar a_3 y c_3 para π
13. Encontrar maneras de computar los a_n y c_n para n arbitrario en la computadora

Si x es solución de $x^2 - bx + 1 = 0$, $b > 0$, se puede cálcular su fracción continua de manera sencilla. Por ejemplo, $1 + \sqrt{2}$ es raíz de $x^2 - 2x + 1 = 0$. Dividiendo la ecuación por x obtenemos $x = 2 - 1/x$

Reemplazando x por $2 - 1/x$ a la derecha:
$x = 2 - 1/(2 - 1/x)$. Siguiendo así, se ve que
$x = 2 - 1/(2 - 1/2 - 1/(2 - 1/x))$ y al final:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

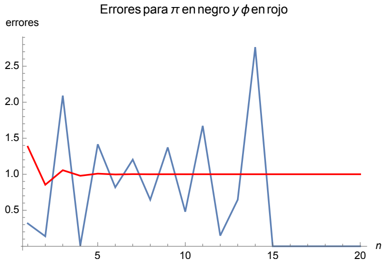
14. Encuentra la fracción continua para $\sqrt{2}$ (usa el resultado anterior).
15. Encuentra la fracción continua del número de oro y calcula c_1, c_2, c_3

Medida de la aproximación

Se mide el error de una approximación racional p/q de un x por

$$\text{error} = \left| x - \frac{p}{q} \right| \sqrt{5} q^2$$

Se puede approximar π mucho mejor que ϕ por sus c_n's:



¡Con esta medida de error, se puede comprobar que ϕ es el mas irracional de todos los reales!

Definición y algebra de $\mathbb{C}$

Los números complejos son de la forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, y donde i es el número tal que

$$i^2 = -1.$$

$a = \Re(z)$ es la *parte real* de z, $b = \Im(z)$ es la *parte imaginaria*.
Si $a + ib = a' + ib'$ entonces $a = a', b = b'$.
Sean $z = a + ib, w = c + id$. Sus suma y producto son:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + i(b + d) \\ zw &= (a + ib)(c + id) = ac + i(bc + ad) + (i^2)bd \\ &= ac - bd + i(bc + ad) \end{aligned}$$

16. Sea $z = 2 + 3i, w = -1 + 5i$. Calcula $z + w$ y zw.
17. Escribe $\sqrt{-9}$ como número complejo
18. Resuelva la ecuación $2x^2 - 8x + 58 = 0$

Geométria de los complejos: suma

A cada complejo $a + ib$ le corresponde el punto (a, b).
La suma de complejos es como suma de vectores:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) \leftrightarrow (a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$$

Geometría de los complejos: producto

Para "ver" el producto, mejor usar *coordenadas polares*. Cada punto (x, y) del plano puede ser escrito como (r, θ) donde:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Es decir: r es la distancia al origen, θ es ángulo que el vector (x, y) forma con la horizontal.

Complejos en coordenadas polares

Las coordenadas polares se pueden escribir en $\mathbb{C}$:

$$x + iy = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

Formula de Euler (se justifica usando series de Taylor del Calculo)

$$\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) = e^{i\theta}$$

El caso particular, con $\theta = \pi$ (reordenando los términos) ha sido votada la formula mas linda de las matemática:

$$\boxed{e^{i\pi} - 1 = 0}$$

¡ Relaciona los cuatros números mas importante de las matemáticas!

En general, todo número complejo puede ser escrito en forma polar como $z = re^{i\theta}$. Se dice que $r = |z|$ es el *módulo* de z, y $\theta = Arg(z)$ su *argumento*.

Las propriedades de la exponencial explican la geométria de la multiplicación compleja:

19. Pon $z = -1 + i$ en forma polar.
20. Encontra una formula para el producto de dos complejos $re^{i\theta}$ y $r'e^{i\theta'}$. Describe como se combinaron los módulos y argumentos en el producto. Interpreta tu respuesta en términos geométricos.
21. Sea $z = re^{i\theta}$. Calcula z^n. Imagina la figura que trazan los puntos $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ en el plano, para un z dado (ejemplo:$z = re^{i\theta}$ con $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$).
22. Desarrolla $(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))(\cos(\theta') + i\text{sen}(\theta')) = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ en ambos lados para encontrar dos formulas de trigonometria conocida.

latíces en espirales con complejos

Un *latís en espirales* es un conjunto de puntos de la forma $L = \{(r^n \cos(n\theta), r^n \mathrm{sen}(n\theta)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ para θ y $r > 0$ dos reales.

23. Sea $z = re^{i\theta}$. Averigua que, en términos complejos, el latís L nada mas es el conjunto de potencias de z.
24. Ahora vas a construir una aplicación interactiva con Geogebra de latíces en espirales (ve las instrucciónes).

Construir un latís en espirales

1. Abre una nueva ventana en Geogebra
2. Usa la herramienta "Circunferencia (centro, radio)" para dibujar el circulo de radio 1 centrado a la origen
3. en la ventanita "Entrada" define la variable **anguloro = pi*(3-sqrt(5))** (eso es el angulo de oro)
4. clica la herramienta "Deslizador" y clica la ventana para definir una variable R que varia dentro de [0.98, 1.1] con incrementos de 0.0001
5. clica la herramienta "Deslizador" y clica la ventana para definir una variable θ que varia dentro de [0, anguloro] con incrementos de 0.0001 (usa el botton $\boxed{\alpha}$)
6. clica la herramienta "Deslizador" y clica la ventana para definir una variable entera "numptos" que varia dentro de [0, 150] con incrementos de 1

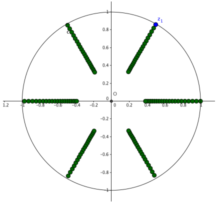
7. En "Entrada", define la variable compleja z_1, generador del latíz:

   z_1 = R*exp($i * \theta$)

   Cuidado: hay que escoger i y θ en los symbolos $\boxed{\alpha}$.
8. En "Entrada", define la lista

   latis = Sequence[(z_1)^n, n, 0, numptos]

   Los puntos del latís son las potencias de z_1 (ve Preg. 23).
9. Varia R y θ para ver como varia el latís respecto a esos parametros. ¿Cual ángulo te parece repartir mas uniformemente los puntos?
10. Usando Propriedades/Básico/Definición de θ, consiga:



11. ¿Se encuentran plantas con estructuras como la anterior en la naturaleza ?
12. Abre https://www.geogebra.org/m/XwJsSbDX un programa en Geogebra escrito por Elizabeth Freeman, cuando era alumna de primer año de Smith College .
13. Encuentra el conjunto de z's para cuales el latís tiene números Fibonacci de espirales ("parastichies").