CIMAT, VI Escuela de verano, 25 de julio - 7 de agosto 1999
Introducción a la Geometría de la Mecánica Clásica

Problemas 1 - 3

1. Una partícula se mueve a lo largo del eje de x segun la ecuación $\ddot{x} = -x$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

   (a) Dibuja la gráfica de $x(t)$.

   (b) ¿Es periódico su movimiento? En caso que sí, encuentra el periodo de su movimiento (i.e. el tiempo que le toma volver a su posión y velocidad inicial).

   (c) Dibujar en el plano de coordenadas (x, y) la curva parametrizada por $(x(t), \dot{x}(t))$.

   (d) Dibujar las gráficas de su energía cinética $T = (\dot{x})^2/2$ y potencial $V = x^2/2$ como función de tiempo. Dibuja las dos gráficas ensimadas y verifique la ley de conservación de energía, $E = T + V = constante$.

   (e) Repetir los 4 incisos anteriores con $x(1) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.

   (f) Dibuja el retrato de fase de la ecuación.(Es decir, hay que dibujar curvas como en el inciso (c), para todas condiciones iniciales posibles, o un número suficiente de ellas para tener idea clara de como se ve el retrato).

2. Dibujar el retrato de fase de las siguientes ecuaciones:

   (a) $\ddot{x} = -2x$ (oscilador harmónico).

   (b) $\ddot{x} = x$ (equilibrio inestable).

   (c) $\ddot{x} = -\text{sen } x$ (péndulo).

   (d) $\ddot{x} = -1$ (piedra que se cae).

   (e) $\ddot{x} = -1/x^2$ (aterizaje duro).

3. Una partícula se mueve en el plano segun la fórmula $(x, y) = (\cos 2t, \text{sen } 2t)$.

   (a) Encuenra su posicion cuando $t = 1/4$.

   (b) Encuentra los timepos t cuando se encuentra en $(0, 1)$.

   (c) Encuentra los vectores de velocidad y acceleración al pasar en $(0, 1)$. Dibujar.