EXAMEN FINAL DEL CURSO DE ALGEBRA LINEAL 1

FAC. DE METEMATICAS DE LA UNIV. DE GTO., 10 DE JUNIO 2003

Nota: *Todos los espacios vectoriales en este examen son de dimensión finita.*

1. Hay que responder "Cierto" o "Falso" a cada uno de los incisos abajo, y luego dar una explicación *breve* (1-2 frases).
   (a) Toda transformación lineal no nula $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es invertible.
   (b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (0, 1)$, $T(1, 1) = (0, 7)$.
   (c) Un sistema homogeneo arbitrario de ecuaciones lineales, con mas incognitas que ecuaciones, simepre tiene una solución no nula.
   (d) Si $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$, entonces $\det(A + B) = 5$, donde A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño.
   (e) Dado un conjunto de 9 vectores en $\mathbb{R}^8$ es posible exprasar uno de ellos como una combinación lineal de los otros 8.
   (f) La unión de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es también un subespacio vectorial.
   (g) Dados 3 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^5$, es posible encontrar 3 funcionales lineales en $\mathbb{R}^5$ que son linealmente independientes y que anulan a los 3 vectores simultaneamente.
   (h) En un espacio vectorial de dimension 10, la intersección de dos subespacios vectoriales, cada uno de ellos de dimensión 7, es un subespacio vectorial de dimensión por lo menos 4.
2. Sea V el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax + b$, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (con las operaciones usuales de espacio vectorial). Sea $B = \{f_1, f_2\}$, $\tilde{B} = \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$, donde $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x - 1$, $\tilde{f}_1(x) = 1$, $\tilde{f}_2(x) = x$.
   (a) Demuetsra que B y $\tilde{B}$ son bases de V.
   (b) Sea $D : V \to V$ la transformación que manda una función de V a su derivada. Calcular las matrices $[D]_B$ y $[D]_{\tilde{B}}$ (las matrices de D con respecto a las bases B y $\tilde{B}$).
   (c) Calcular $\det(D)$.
   (d) Encuentra la nulidad y rango de D.
   (e) Se sabe que la matriz de una transformación lineal $T : V \to V$, con respecto a B, es
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Encuentra la matriz de T con respecto a $\tilde{B}$.
3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F con una base $B \subset V$. Demuestra que una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y solo si las columnas de la matriz de T con respecto a B forman una base de F^n.