Álgebra Lineal I: Examen Parcial núm. 1
Soluciones

1. Sea F un campo. Define: V es un espacio vectorial sobre F.

   Solución. Un espacio vectorial sobre un campo F ("los escalares") consiste en

   - un conjunto no vacio V ("los vectores"),
   - una operación $V \times V \to V$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ("la suma de vectores"),
   - una operación $F \times V \to V$, $(c, \mathbf{v}) \mapsto c\mathbf{v}$ ("multiplicación de vector por escalar"),
   - una operación $V \to V$, $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ ("el negativo de un vector"),
   - un elemento $\mathbf{0} \in V$ ("el vector nulo"),

   que satisfacen las siguientes axiomas:

   (Ax.1) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.
   (Ax.2) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$.
   (Ax.3) $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$.
   (Ax.4) $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \in V$.
   (Ax.5) $(c_1 + c_2)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$, $c_1, c_2 \in F$.
   (Ax.6) $(c_1c_2)\mathbf{v} = c_1(c_2\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in V$, $c_1, c_2 \in F$.
   (Ax.7) $c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $c \in F$.
   (Ax.8) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Demuestra que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

   Solución. Para todo $\mathbf{v} \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0\mathbf{v} &= 0\mathbf{v} + \mathbf{0} && \text{(por el axioma 3),} \\
&= 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-(0\mathbf{v}))) && \text{(por el axioma 4)} \\
&= (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-(0\mathbf{v})) && \text{(por el axioma 2)} \\
&= (0 + 0)\mathbf{v} + (-(0\mathbf{v})) && \text{(por el axioma 5).} \\
&= 0\mathbf{v} + (-(0\mathbf{v})) && \text{(porque } 0 + 0 = 0 \text{ en cualquier campo)} \\
&= \mathbf{0} && \text{(por el axioma 4).}
\end{aligned}$$

   así que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. QED

3. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sea $W \subset V$ un subconjunto. Define: W es un subespacio vectorial de V.

   Solución. W es un subespacio vectorial de V si (1) W es no vacio (2) $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W \Longrightarrow \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, y (3) $\mathbf{w} \in W$, $c \in F \Longrightarrow c\mathbf{w} \in W$.

   Nota: La definición que aparece en el libro (en la p. 34) es confusa y es mejor ignorarla y usar la definición que damos aquí, que es la definición que dimos en la clase y similar a la condición que aparece en el libro en el teorema 1 de la p. 34.

4. Demuestra que el conjunto $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3a_1+1 = 0\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (con su estructura ordinaria de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) .

   Solución. Sea $\mathbf{w} = (-1/3, 0, 0)$. Entonces $\mathbf{w} \in W$, ya que $3(-1/3) + 1 = 0$, pero $2\mathbf{w} = (-2/3, 0, 0) \notin W$, ya que $3(-2/3) + 1 = -1 \neq 0$. QED

5. Sea $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$.

   (a) Demuestra que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (con su estructura ordinaria de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).

   (b) Encuentra dos vectores en W que lo generan; es decir, dos vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ tal que cualquer vector en W se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$.

   Solución.

   (a) (1) Notemos que $(0, 0, 0) \in W$, ya que $0 + 0 + 0 = 0$, así que W no es vacio. (2) Sean $\mathbf{w}_1 = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{w}_2 = (b_1, b_2, b_3) \in W$. Entonces $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Así que $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = 0$, y esto impica que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in W$. (3) Si $\mathbf{w} = (a_1, a_2, a_3) \in W$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Longrightarrow ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3) = 0$, asi que $c\mathbf{w} = (ca_1, ca_2, ca_3) \in W$. QED

   (b) Sean $\mathbf{w}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, -1)$. Entonces $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, ya que $1 + 0 + (-1) = 0+1+(-1) = 0$. Si $\mathbf{w} = (a_1, a_2, a_3) \in W$ entonces $a_1+a_2+a_3 = 0$, así que $a_3 = -a_1-a_2$, por lo que

   $$\mathbf{w} = (a_1, a_2, -a_1 - a_2) = (a_1, 0, -a_1) + (0, a_2, -a_2) = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2.$$

   La última ecuacíon presenta a $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$. QED