Examen Parcial núm. 1

(9 sept, 2003)

Parte A (80 pts)

Hay que responder a cada uno de los siguientes incisos primero con "Cierto" ó "Falso" y luego dar una explicación **breve** (máximo 4-5 lineas, no tiene que ser una demostración formal completa).

Ejemplo: En cualquer campo F, $\forall a \in F$, $\exists b \in F$ tal que $b^2 = a$.

Respuesta: Falso. Por ejemplo, para $F = \mathbb{Q}$, $a = -1$, no existe tal b.

1. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, con sus operaciones usuales de producto y suma, es un campo.

2. Sean A, B dos conjuntos. Si A es un conjunto infinito y $A \sim B$ entonces B tambien es infinito.

3. Existe una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que es suprayectiva pero no invertible.

4. Existe una función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(1) = -2$.

5. Para todo conjunto no vacio A, si $B \subset A$ y $A \sim B \implies A = B$.

6. Sea R una relación de equivalenca en un conjunto. Sean A, B dos clases de equivalencia (según R). Entonces $A \sim B$.

7. Sean A y B dos conjuntos finitos no vacios. Existe una inyección $f : A \to B$ si y solo si $\#A \leq \#B$.

8. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto infinito. Entonces el conjunto de las clases de equivalencia según R es infinito.

Parte B (20 pts)

9. Define: F es un campo.

10. Sea F un campo. Demuestra (usando las axiomas de campo): si $a, b \in F$, $ab = 0 \implies a = 0$ ó $b = 0$.

Parte C (opcional, solo si te alcanza el tiempo)

11. Demuestra que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (el conjunto de todas las funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$) no es numerable.

12. Demuestra que el conjunto de todas las funciones biyectivas $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable.