Examen Parcial núm. 2 – soluciones

Parte A *"cierto" o "falso".*

1. Toda isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (con el producto interior canónico) satisface $\det(T) = 1$.

$\triangleright$ Falso. Por ejemplo, $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ es una isometría con $\det(T) = -1$. $\square$

2. Si v_1, v_2 son dos vectores en un espacio euclideano V tal que $(v_1, w) = (v_2, w)$ para todo $w \in V$ entonces $v_1 = v_2$.

$\triangleright$ Cierto. $(v_1, w) = (v_2, w) \implies (v_1 - v_2, w) = 0$ para todo w. Para $w = v_1 - v_2$ obtenemos $\|v_1 - v_2\|^2 = 0 \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$. $\square$

3. Sea V un espacio euclideano y $p : V \to V$ la proyección ortogonal sobre un subespacio $W \subset V$. Entonces $\|p(v)\| \le \|v\|$ para todo $v \in V$ con igualdad ssi $v \in W$.

$\triangleright$ Cierto. Si $v \in V$ entonces $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in W$, $v_2 \in W^\perp$, y $v_1 = p(v)$. Por el teorema de Pitágoras, $\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$, así que $\|v_1\| \le \|v\|$ con igualdad ssi $\|v_2\| = 0$, ie $v = v_1 \in W$. $\square$

4. Sea V un espacio euclideano y $T : V \to V$ un operador autoadjunto. Entonces T tiene un vector propio.

$\triangleright$ Cierto. Hemos visto en clase que todo operador autoadjunto es diagonalizable, o sea existe en V toda una *base* de vectores propios de T. $\square$

5. La suma de dos operadores autoadjuntos es un operador autoadjunto.

$\triangleright$ Cierto. $T^* = T$, $S^* = S \implies (T + S)^* = T^* + S^* = T + S$. $\square$

6. Dados dos vectores no nulos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, existe en $\mathbb{R}^2$ un producto interno tal que $v_1 \perp v_2$.

$\triangleright$ Falso. Toma $v_1 = v_2 = v \neq 0$, entonces $(v_1, v_2) = \|v\|^2 > 0$. $\square$

7. Para todo subespacio W de un espacio euclideano V, $(W^\perp)^\perp = W$.

$\triangleright$ Cierto. Por la definición de $W^\perp$, todos los vectores de W son ortogonales a $W^\perp$, así que $W \subset (W^\perp)^\perp$. Calculando dimensiones, $\dim[(W^\perp)^\perp] = \dim(V) - \dim(W^\perp) = \dim(V) - [\dim(V) - \dim(W)] = \dim(W)$, así que $W = (W^\perp)^\perp$. $\square$

8. La inversa de un operador lineal autoadjunto invertible es tambien un operador autoadjunto.

$\triangleright$ Cierto. Si $T^* = T \implies (T^{-1})^* T = (T^{-1})^* T^* = (TT^{-1})^* = I^* = I \implies (T^{-1})^* = T^{-1} \implies T^{-1}$ es autoadjunto. $\square$

9. Existe una matriz 2×2 con entradas reales A tal que $A^{2003} = \begin{pmatrix} 2001 & 2002 \\ 2002 & 2003 \end{pmatrix}$.

$\triangleright$ Cierto. Como $Q = \begin{pmatrix} 2001 & 2002 \\ 2002 & 2003 \end{pmatrix}$ es simétrica, existe una base (ortonormal) B en donde la matriz de Q es diagonal, digamos D. Tomando la raíz 2003 de los elementos del diagonal de D obtenemos la matriz del operador requerido A, en la base B. $\square$

10. Si T es un operdaor autoadjunto en un espacio euclideano V entonces V es la suma directa del kernel y la imagen de T.

$\triangleright$ Cierto. Basta demostrar que $\mathrm{Ker(T)} \cap \mathrm{Im(T)} = \{0\}$, ya que $\dim \mathrm{Ker(T)} + \dim \mathrm{Im(T)} = \dim(\mathrm{V})$. Sea $v = Tw \in \mathrm{Ker(T)} \cap \mathrm{Im(T)}$. Entonces $(v, v) = (v, Tw) = (Tv, w) = (0, w) = 0 \implies v = 0$. $\square$

Parte B (30 puntos)
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador definido por $T(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2 + 3x_3)(1, 2, 3)$. Encontrar una matriz diagonal D y una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico) tal que $[T]_B = D$ (la matriz de T con respecto a B es D).

$\triangleright$ Sea $v_0 = (1, 2, 3)$. Entonces $T(v) = (v, v_0)v_0$. Tenemos entonces para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$ que

$$(Tv, w) = ((v, v_0)v_0, w) = (v, v_0)(v_0, w) = (v, (w, v_0)v_0) = (v, Tw),$$

así que $T = T^*$, o sea T es autoadjunto, así que existe en $\mathbb{R}^3$ una base ortonormal de vectores propios de T.

Nota: se puede tambien demostrar que T es autoadjunto verficando que su matriz con respecto a la base canónica es simétrica.

Por la forma que está dada T, es claro que $\mathrm{Im(T)}$ está generado por $(1, 2, 3)$. Esto implica que $(1, 2, 3)$ es un vector propio (su imagen bajo T es un múltiplo de él mismo). Calculamos: $T(1, 2, 3) = 14(1, 2, 3)$, así que $(1, 2, 3)$ es un vector propio asociado al valor propio 14. Luego, como T tiene rango 1, Ker(T) tiene dimension 3-1=2. Así que

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de vectores propios, normalizamos primero el vector propio que encontramos, $v_1 := (1, 2, 3)/\sqrt{14}$. Luego, encontramos una base (cualquiera) de Ker(T) y le aplicamos el proceso de Gramm-Schmidt. Ker(T) es el espacio de soluciones de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Es fácil adivinar dos soluciones linealmente independientes: digamos $(2, -1, 0)$ y $(0, 3, -2)$. Aplicando el proceso de Gramm-Schmidt obtenemos $v_2 := (2, -1, 0)/\sqrt{5}$, $v_3 = \tilde{v}_3/\|v_3\|$, donde $\tilde{v}_3 = (0, 3, -2) - ((0, 3, -2), (2, -1, 0))(2, -1, 0)/5 = (0, 3, -2) + \frac{3}{5}(2, -1, 0) \sim (0, 15, -10) + 3(2, -1, 0) = (6, 12, -10) \sim (3, 6, -5)$ (el símbolo $\sim$ significa que estamos multiplicando el vector por una constante no-nula, según lo que nos conviene; de todos modos al final normalizamos). Así que $v_3 = (3, 6, -5)/\sqrt{70}$. $\square$