Algebra Lineal 2, Facultad de Matemáticas de la UG, ene.- jun. 2004.

Tarea num. 3

(Por entregar el viernes, 13 de feb., 2004.)

Definiciones:

1. Una permutación de un conjunto X es una biyección $\sigma : X \to X$.
2. S_n es el conjunto de las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Una permutación $\sigma \in S_n$ se denota tambien por la matriz $2 \times n$ de la forma
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$
3. Una transposición en un conjunto X es una permutación τ que "intercambia" exactamente dos de los elementos de X; o sea, existen dos distintos $x_1, x_2 \in X$ tal que $\tau(x_1) = x_2$, $\tau(x_2) = x_1$, y $\tau(x) = x$ para todo $x \in X$ distinto de x_1 y x_2.
4. El *signo* de una permutación $\sigma \in S_n$ se define por $signo(\sigma) := (-1)^{m(\sigma)}$, donde $m(\sigma)$ es el número de pares de elementos (i, j) tal que $1 \leq i < j \leq n$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$ (el número de pares que σ cambia su orden). Una permutación con signo $+1$ se llama una permutación par y una con signo -1 se llama impar.

Resultados demostrados en clase:

1. Para toda $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, $signo(\sigma_1\sigma_2) = signo(\sigma_1)signo(\sigma_2)$.
2. Para toda k-forma alternada f en un espacio vectorial V, vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$ y $\sigma \in S_k$,
$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = signo(\sigma)f(v_1, \ldots, v_k).$$

Problemas

1. Demuestra que S_n tiene $n!$ elementos.

2. (Opcional) Demuestra que $m(\sigma)$ se puede calcular de la manera siguiente: si en la matriz $2 \times n$ que representa a σ uno conecta, con n segmentos lineales, cada número de la primera fila con el mismo número en la segunda fila, entonces $m(\sigma)$ es el número de puntos de intersecciones, i.e. el número de pares de segmentos que se intersectan (si es necesario, movemos los segmentos un poco para evitar puntos en donde intersectan mas que dos segmentos.)

3. Demuestra que una transposición es una permutación impar.

4. (a) Demuestra que cada permutación se puede escribir como un producto (composición) de transposiciones.

   (b) Expresa la permutación
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$
   como un producto de tranposiciones.

5. (Opcional) Encuentra el entero mínimo m tal que toda permutación en S_n es un producto de no mas que m transposiciones

   (Nota: no sé la respuesta a esta pregunta, ni si es dificil. Solo conozco un argumento fácil para demostrar que $m < n$).

6. Pág. 154-155 del libro: 3, 4, 13.