Exámen Final (reposición)

10 enero, 2006

Duración: 3 horas.

Parte A. Resolver 10 de los siguientes 12 incisos (80 pts, 8 pts cada inciso).

Nota: puedes usar cualquer teorema visto en el curso, siempre y cuando lo anuncies de manera completa y precisa y demostar que las condiciones en este teorema se cumplen en el caso en donde lo quieres aplicar.

Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y)=1+xy+y^3$.

1. Demuestra que F es diferenciable.
2. Encuentra los puntos críticos de F.
3. Encuentra la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}F$ en $(1,2)$ donde $\mathbf{v}=(3,4)$.
4. Encuentra la ecuación de la linea tangente a la curva de nivel de F que pasa por $(1,2)$.
5. Demuestra que existe un $a>0$ y una función continuamente diferenciable $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ tal que $F(x,f(x))=9$ para todo $x\in(-a,a)$.
6. Encuentra las primeras tres derivadas de la función f del inciso anterior en $x=0$.
7. Calcula a $f(0.1)$ usando la serie de Taylor de f de tercer orden alrededor de $x=0$ y estima el error de tu respuesta.
8. Encuentra todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que la función F crece en la dirección de $(3,4)$.
9. ¿Existe una función continuamente diferenciable $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que la función $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x,y)=(F(x,y),G(x,y))$ tiene una inversa continuamente diferenciable? Explica tu respuesta.
10. Encontrar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z=F(x,y)$ en $(1,2,F(1,2))$.
11. Encontrar el coseno del ángulo entre el plano del inciso anterior y el eje de x.
12. Encuentra los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ en donde el plano tangente a la supeficie $z=F(x,y)$ es horizontal (paralelo al plano de coordenadas xy).

Parte B. Resolver uno de los siguientes problemas (20 pts).

1. Formular y demostrar el teorema de función implicita para la ecuación $F(x,y,z)=0$, en donde se requiere expresar z en términos de x,y.
2. Demostrar que una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con derivadas parciales contínuas es diferenciable.