Exámen parcial núm. 1

11 sept, 2006

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2 - y$.

   a) Dibuja en el plano x, y las curvas de nivel de f que pasan por los puntos $(1, 3)$, $(1, 2)$ y $(1, 1)$.

   b) Demuestra que f es contínua y diferenciable.

   Nota: hay que dar primero una definición precisa de "contínua" y "diferenciable".

   c) Encuentra la derivada de f en $(1, 3)$.

   d) Encuentra y dibuja el gradiente de f en $(1, 3)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$.

   a) Calcula la matriz Jacobiana de f en $(2, 3)$.

   b) Demuestra que $(u, v) = f(x, y)$ satisface $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

   c) Demuestra que las componentes u, v de f son funciones armónicas.

   Nota: una función $\phi(x, y)$ es ármonica si es dos veces diferenciable y $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$.

   d) Demuestra que para toda función armónica $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la composición $\phi \circ f$ es armónica.

   Sugerencia: usa solamente las relaciones $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y no la forma específica de u, v.