Calculo III, aug-dic 2006.

Tarea num. 4
(Para el 18 de oct. 2006)

1. Pág. 73 del libro de Courant y John: 2,5.

   Nota: en problema 2, $D_{(\alpha)}f(x_0, y_0)$ significa $Df(x_0, y_0)v$, donde $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ("la derivada direccional en la direccion del vector unitario que forma ángulo α con el eje de x").

2. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ (números complejos) por $(x, y) \mapsto z = x + iy$. Calcula $Df(z)$ para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$.

3. Definición: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa si es diferenciable y sus componentes u, v satifacen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
   a) Demuestra: si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa entonces $Df(z)v = f'(z)v$ (producto de números complejos), donde $f'(z)$ se define como el número complejo $u_x(z)+iv_x(z)$.
   b) Demuestra: si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son holomorfas entonces su producto es tambien holomorfo y $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
   c) Usando el último inciso resuelve de nuevo el problema 2.
   d) Calcula $Df(z)$ para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
   e) Calcula $Df(z)$ para $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^n$, $n = -1, -2, -3, \ldots$.
   f) Demuestra que la composición de funciones holomorfas es holomorfa y da una fórmula para la derivada de la composición.
   Nota: esta es la regla de la cadena para funciones holomorfas.
   g) Demuestra que las componentes u, v de una función holomorfa son funciones armónicas.
   h) (Opcional) Demuestra que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \log r + i\theta$, donde r, θ son las coordenadas polares de z, es holomorfa y calcula su derivada.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $Df = 0$ (o sea, $Df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$). Demestra que f es constante.

   Sugerencia: dado un $x \in \mathbb{R}^n$, define $g(t) = f(tx)$. Demuestra que $g' = 0$ así que g es constante y en particular $g(0) = g(1)$.