Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2006.

Tarea num. 2

(Por entregar el lunes, 13 feb, 2006.)

Definicion. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Una *elipse* con *focos* en P_1, P_2 es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ cuya suma de distancias a P_1, P_2 es una constante, digamos $2a$, donde $2a > \|P_1 - P_2\|$. El punto $(P_1 + P_2)/2$ se llama el *centro* de la elipse, la línea que pasa por P_1, P_2 es el *eje mayor*, y la línea ortogonal al eje mayor que pasa por el centro es el *eje menor*. La constante a es el *semi-eje mayor* (o más bien su tamaño) . Los puntos más lejos y más cercanos al centro son los *vértices* de la elipse.

Nota: si los focos coinciden, $P_1 = P_2$, la elipse es un círculo; los ejes y los vértices no estan definidos en este caso y a es el radio del círculo.

1. Demuestra que la ecuación de una elipse con focos en $P_1 = (c, 0)$, $P_2 = (-c, 0)$, se puede escribir en la forma $Q(P) = 1$, donde Q es una forma cuadrática positiva definida.

   Sugerencia: jugar con la ecuación $\|P - P_1\| + \|P - P_2\| = 2a$.

2. Demuestra que si Q es una forma cuadrática positiva definida, $Q(P) = 1$ es la ecuación de una elipse cuyos focos estan simétricamente situados con respecto al origen ($P_2 = -P_1$). Encuentra la relación entre Q y los ejes de la elipse.

   Sugerencia: al diagonalizar Q, la ecuación se reduce al caso del inciso anterior.

3. Demuestra que la ecuación de una elipse en general se puede escribir de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde la parte cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ es una forma positiva definida.

   Sugerencia: sea $P_0 = (P_1 + P_2)/2$ el centro de la elipse. Demuestra que la ecuacion de la elipse se puede escribir de la forma $Q(P - P_0) = 1$.

4. Demuestra que una forma cuadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es positiva definida ssi $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.

   Sugerencia: si la determinante de una matriz simétrica 2×2 es positiva, entonces sus valores propios son ambos positivos o negativos. Si son ambos negativos entonces la forma cuadrática asociada es negativa definida. La condición $a > 0$ significa que Q tiene por lo menos un valor positivo (para el vector $(1, 0)$).

5. Demuestra que $12x^2 - 12xy + 7y^2 + 3x = 10$ es la ecuación de una elipse. Encuentra su centro, focos, ejes y vertices. Dibuja la elipse.

   Sugerencia: define un cambio de variables ortogonal $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ que diagonaliza la parte cuadrática $12x^2 - 12xy + 7y^2$. Luego, al rescribir la ecuación en términos de (x_1, y_1), puedes "completar los cuadrados", o sea definir una traslación $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$ que absorbe la parte lineal en la parte cuadrática. La ecuación, en términos de (x_2, y_2), se reduce al caso del primer inciso.

6. (Opcional) Demuestra que la intersección de un plano en $\mathbb{R}^3$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ es una elipse ssi el plano no pasa por el origen y el ángulo que forma con el eje de z es $> 45^0$. Demuestra que los focos de la elipse se encuentran mediante la siguiente construcción: se considera esferas inscritas dentro del cono y tangentes al plano. Hay dos tales esferas, una (pequeña) "atrapada" entre el cono y el plano y otra, más grande, al otro lado del plano. Los puntos de contacto de estas esferas con el plano son los focos de la elipse.