Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2006.

Tarea num. 7 – solución

Usaremos las siguiente definiciones (vistas en la clase): una forma diferencial lineal en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una expresión de la forma $L = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, donde las a_i son funciones en U. La diferencial de una función $f : U \to \mathbb{R}$ es la forma diferencial lineal $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Una forma diferencial lineal es cerrada si sus coeficientes satisfacen $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ para todo $1 \le i, j \le n$. Es exacta si $L = df$ para alguna función $f : U \to \mathbb{R}$. La integral de L sobre una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to U$ es la integral (de una variable)

$$\int_\gamma L = \int_a^b \sum_i (a_i \circ \gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} dt.$$

La integral de línea de un campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$ se define como la integral de la forma $L = \sum_i F_i dx_i$.

NOTA: todas las funciones que aparecen aquí son diferenciables tantas veces como sea necesario (3 veces es suficiente.)

1. Demuestra que una forma diferencial lineal exacta es cerrada.

   Respuesta: Si $L = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, y $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para una función C^2 $f : U \to \mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$. $\square$

2. Demuestra que la forma diferencial en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $L = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ es cerrada.

   Respuesta: Aquí tenemos que $a = -y/r^2$, $b = x/r^2$, así que $a_y = (-r^2 + 2x^2)/r^4 = (y^2 - x^2)/r^4$, $b_x = (r^2 - 2x^2)/r^4 = (y^2 - x^2)/r^4$, así que $a_y = b_x$ y la forma es cerrada. $\square$

3. Demuestra que si L es una forma diferencial exacta, entonces su integral a lo largo de una curva depende solo del punto incial y final de la curva.

   Sugerencia: si $L = df$, demuestra que $\int_\gamma L = f(B) - f(A)$, donde $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(a)$. Para esto hay que usar el teorema fundamental de cálculo: $\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$.

   Respuesta: Si $L = df$, con $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces, por la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo de una variable, aplicado a la funcion $g = f \circ \gamma$, obtenemos

   $$\int_g ammaL = \int_\gamma \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b [\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt}] dt = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

   $\square$

4. Demuestra que la integral de línea de un campo gradiente $F = \nabla f$ a lo largo de una curva solo depende de los puntos extremos de la curva.

   Sugerencia: es una reformulación del problema anterior.

   Respuesta: Si $F = (F_1, \ldots, F_n) = \nabla f$, la forma $L = \sum_i F_i dx_i = df$, así que por el inciso anterior $\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma L = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. $\square$

5. Demuestra que si γ es una curva cerrada en U ($\gamma(a) = \gamma(b)$) entonces la integral de cualquer campo gradiente en U alrededor de γ se anula.

   Respuesta: Esto es una caso especial del anterior: $\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$. $\square$

6. Demuestra que la forma diferencial $L = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es exacta.

   Sugerencia: encuentra su integral a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Respuesta: Usando coordenadas polares, se calcula que $L = d\theta$, así que $\int_\gamma L = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$, así que L no puede ser exacta.

7. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva parametrizada y $\tilde{\gamma} : [a, b] \to U$ una reparametrización de γ; es decir $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$, donde $\phi : [a, b] \to [a, b]$ es una biección (diferenciable). Demuestra que para toda forma diferencial lineal L en U, $\int_{\tilde{\gamma}} L = \int_\gamma L$ si la reparametrización *preserva orientación*; es decir $\phi' > 0$.

   Respuesta:

8. Sea γ una curva cerrada parametrizada que atravieza el perímetro de un rectángulo en el plano en la direccion contraria a las manecillas del reloj. Demuestra que
   a) $\int_\gamma xdy = -\int_\gamma ydx = \int\int_R dxdy$.

      Nota: el último integral es simplemente el área de R.

   b) (Opcional) Para toda una forma diferencial lineal $L = adx + bdy$, $\int_\gamma L = \int\int_R (b_x - a_y) dxdy$.

9. Problema 1 de la pag.121.