Tarea núm. 10

(Para el viernes 17 oct 2008)

Definiciones

- Un conjunto en $\mathbb{R}^2$ está dado por una ecuación cuadrática si es de la forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) = 0\}$, donde $p(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$, tal que $A,\dots,F \in \mathbb{R}$ y donde A, B ó $C \neq 0$.
- Una elipse en $\mathbb{R}^2$ con focos P_1, P_2 y suma de distancias $d > dist(P_1, P_2)$ es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, P_1) + dist(P, P_2) = d\}$. Una hipérbola en $\mathbb{R}^2$ con focos P_1, P_2 y diferencia de distancias $0 < d < dist(P_1, P_2)$, es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid |dist(P, P_1) - dist(P, P_2)| = d\}$. Una parábola en $\mathbb{R}^2$ con directriz l (una recta) y foco $P_0 \notin l$ es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, P_0) = dist(P, l)\}$.
- Una traslación en $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $P \mapsto P + \mathbf{v}_0$, donde $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$.
- Una rotación en $\mathbb{R}^2$ (por el origen) es una función $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $\rho(x,y) = (ax - by, bx + ay)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$. Se dice que ρ es una rotación por ángulo θ si $a = \cos\theta$, $b = \operatorname{sen}\theta$.
- Dada una función $f : X \to Y$, donde X, Y son dos conjuntos, una inversa de f es una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$; o sea, $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ y $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Si f tiene inversa se dice que es invertible.
- Una función biyectiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si preserva distancias: $dist(f(P), f(Q)) = dist(P, Q)$ para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$.
- Una función $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una tranformación lineal si (1) $L(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1)+L(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^m$, (2) $L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

Algunas proposiciones vistas en clase

- Toda elipse en $\mathbb{R}^2$ está dada por una ecuación cuadrática. Si los focos son $(\pm a, 0)$ la elipse está dada por $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, donde $(\pm\alpha, 0)$, $(0, \pm\beta)$ son las intersecciones de la elipse con los ejes de x, y (resp.).
- Toda función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es una tranformación lineal. En particular, toda rotación en $\mathbb{R}^2$ por el origen es una tranformación lineal.
- Toda rotación y traslación en $\mathbb{R}^2$ es una isometría.
- La imagen de una elipse bajo una isometría es una elipse.

Problemas

1. Una función es biyectiva ssi es invertible. En caso de ser invertible, la inversa es única.
2. Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, existe una rotación que manda $\mathbf{v}$ a un vector cuya coordenada y se anula.

   Sugerencia: si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq 0$, se puede tomar en la fórmula para la rotación $(a, b) = (v_1, -v_2)/\|\mathbf{v}\|$.
3. Una elipse tiene focos en $(1, 2), (3, 4)$ y la suma de distancias a sus focos es 5.
   a) Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse.

   Sugerencia: encuentra una traslación T que manda el punto medio de los focos de la elipse al origen. Luego, usando el problema anterior, una rotación ρ que manda la imagen bajo T de uno los focos a un punto de la forma $(a, 0)$. Entonces $\rho \circ T$ manda los focos a los puntos $(\pm a, 0)$. Así que la imagen de la elipse bajo $\rho \circ T$ está dada por una ecuación de la forma $p(x, y) = (x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$. Luego la elipse original está dada por la ecuación $p((\rho \circ T)(x, y)) = 0$, lo cual es cuadrática.

   b) Encuentra las tangentes a la elipse que pasan por el origen.

   Sugerencia: busca las ecuaciones de la forma $y = mx$. La recta $y = mx$ tiene una sola intersección con la elipse ssi la descriminante de la ecuación cuadrática (para x) que se obtiene al sustituir $y = mx$ en la ecuación de la elipse se anula. Esto da una ecuación cuadrática para m.
4. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto de una elipse dada por la ecuación $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$.
   a) La tangente a la elipse en P_0 tiene pendiente $-\beta^2 x_0/\alpha^2 y_0$ si $P_0 \neq (\pm\alpha, 0)$, y tiene pendiente infinita si $P_0 = (\pm\alpha, 0)$.

   b) Las rectas que pasan por P_0 y los focos de la elipse forman ángulos iguales con la tangente a la elipse en P_0.
5. * Sea l una recta en $\mathbb{R}^2$.
   a) Una reflexión por l es una isometría. Esta isometría es una transformación lineal ssi l pasa por el origen.

   Nota: la reflexión por l es la función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto P^*$, tal que $\mathbf{v}^* = -\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}^* = P^* - P_0$, $\mathbf{v} = P - P_0$ y P_0 es la intersección entre l y la recta que pasa por P y perpendicular a l.

   b) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es una reflexión por una recta o la composición de una traslación y rotación por el origen.

   c) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es una reflexión por una recta o la composición de dos tales reflexiones.
6. * Una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distancias es una isometría (o sea el requisito de ser biyectiva en la definición de isometría está sobrado).