Tarea núm. 10 – soluciones

1. Una función es biyectiva ssi es invertible. En caso de ser invertible, la inversa es única.

   $\triangleright$ Sea $f : X \to Y$. Demostraremos que (1) f es inyectiva ssi tiene una "inversa por la derecha", i.e. una $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$, (2) f es suprayectiva ssi tiene una "inversa por la izquierda", i.e. una $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$. (3) Si f tiene una inversa es única.

   (1) Suponemos que f es inyectiva. Definimos a $g : Y \to X$ de la manera siguiente. Para cada $y \in Y$, si y está en la imagen de f, i.e. si existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$, entonces definimos $g(y) = x$. Si y no está en la imagen de f definimos a $g(y)$ como sea (por ejemplo $g(y) = x_0$ para un cierto $x_0 \in X$.) Ahora para todo $x \in X$ tenemos que $y = f(x)$ está en la imagen de f, y además, como f es inyectiva, x es el único tal que $f(x) = y$, así que por la definición de g, $g(y) = x$, así que $g(f(x)) = x$, o sea $g \circ f = id_X$.

   Ahora suponemos que existe un $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$. Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$.

   (2) Suponemos que f es suprayectiva y definimos $g : Y \to X$ de la manera siguiente. Como f es suprayectiva, para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$ (tal vez más que uno). Escogemos un tal x y definimos $g(y) = x$. Entonces $f(g(y)) = f(x) = y$, así que $f \circ g = id_Y$.

   Ahora suponemos que existe una $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$. Entonces para cada $y \in Y$ el elemento $x = g(y)$ satisface $f(x) = f(g(y)) = y$, así que f es suprayectiva.

   (3) Sean $g_1, g_2 : Y \to X$ dos funciones que satisfacen $f \circ g_i = id_Y$, $g_i \circ f = id_X$, $i = 1, 2$. Entonces para todo $y \in Y$, $g_1(y) = ((g_2 \circ f) \circ g_1)(y) = (g_2 \circ (f \circ g_1))(y) = g_2(y) \implies g_1 = g_2$. $\square$

   $\square$

2. Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, existe una rotación que manda $\mathbf{v}$ a un vector cuya coordenada y se anula.

   $\triangleright$ Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Si $\mathbf{v} = (0, 0)$ entonces para cualquier rotación ρ, $\rho(\mathbf{v}) = (0, 0)$. Si $\mathbf{v} \neq 0$, sea $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\rho(x, y) = (ax - by, bx + ay)$ con $(a, b) = (v_1, -v_2)/\|\mathbf{v}\|$. Entonces $a^2 + b^2 = [(v_1)^2 + (v_2)^2]/\|\mathbf{v}\|^2 = 1$, así que ρ es una rotación. Luego, $\rho(\mathbf{v}) = (v_1v_1 + v_2v_2, -v_2v_1 + v_1v_2)/\|\mathbf{v}\| = (\|\mathbf{v}\|, 0)$. $\square$

3. Una elipse tiene focos en $(1, 2), (3, 4)$ y la suma de distancias a sus focos es 5.

a) Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse.

⊳ Sea $\mathcal{E}$ la elipse con focos $(1,2),(3,4)$ y suma de distancias a los focos 5. Sea $\mathbf{v}_0 = [(1,2)+(3,4)]/2 = (2,3)$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Entonces T es una isometría así que manda la elipse $\mathcal{E}$ a la elipse $\mathcal{E}' = T(\mathcal{E})$ con focos en $T(1,2) = (-1,-1)$, $T(3,4) = (1,1)$, y suma de distancias a sus focos 5. Ahora definimos la rotación $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\rho(x,y) = (x+y, x-y)/\sqrt{2}$. Entonces ρ es una isometría así que manda la elipse $\mathcal{E}'$ a una elipse $\mathcal{E}'' = \rho(\mathcal{E}')$ con focos en $\rho(1,1) = (\sqrt{2},0)$, $\rho(-1,-1) = (-\sqrt{2},0)$ y suma de distancias a sus focos 5. Como $\mathcal{E}''$ tiene los focos simétricamente situados sobre el eje de x sabemos (lo hemos hecho en clase) que tiene una ecuación de la forma $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, con $\alpha^2 = a^2 + \beta^2$, donde $a = \sqrt{2}$, y suma de distancia a los focos $2\alpha = 5$. Así que $\alpha = 5/2$ y $\beta = \sqrt{17}/2$ y $\mathcal{E}''$ tiene la ecuación $4x^2/25 + 4y^2/17 = 1$.

Ahora $\mathcal{E} = (\rho \circ T)^{-1}(\mathcal{E}'')$ así que tiene ecuación que se obtiene de la ecuación de $\mathcal{E}''$ por la substitución $(x,y) \mapsto (\rho \circ T)(x,y) = \rho(x-2, y-3) = (x+y-5, x-y+1)/\sqrt{2}$, así que $\mathcal{E}$ tiene la ecuación $2(x+y-5)^2/25 + 2(x-y+1)^2/17 = 1$. □

b) Encuentra las tangentes a la elipse que pasan por el origen.

⊳ Primero vemos que tal recta tangente no puede tener pendiente infinita (vertical).

La recta vertical por el origen está dada por $x = 0$, y la intersección con la elipse está dada por $2(y-5)^2/25 + 2(-y+1)^2/17 = 1$. Simplificando, obetenmos para y una ecuación de la forma $ay^2 + by + c = 0$, con $a = 88$, $b = -440$ y $c = 475$. Ahora la descriminante de esta ecuación es $b^2 - 4ac = 440^2 - 4 \cdot 88 \cdot 475 > 0$, así que la recta vertical $x = 0$ intersecta a $\mathcal{E}$ en *dos* puntos, por lo que no es una tangente.

Así que una recta tangente a $\mathcal{E}$ que pasa por el origen tiene pendiente finita $m \in \mathbb{R}$, por lo que tiene una ecuación de la forma $y = mx$. Para encontrar la m, consideramos la intersección de la recta $y = mx$ con la elipse $\mathcal{E}$. Sustituimos $y = mx$ en la ecuación de $\mathcal{E}$ y obtenemos $2(x+mx-5)^2/25 + 2(x-mx+1)^2/17 = 1$. Simplificando, se obtiene una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a = 84m^2 - 32m + 84$, $b = -240m - 440$, $c = 475$. Ahora buscamos los valores de m tal que esta ecuación para x tenga una sola solución; esto sucede ssi la descriminante de la ecuación se anula. Esto es, $b^2 - 4ac = (-240m - 440)^2 - 4(84m^2 - 32m + 84)475 = 0$. Simplificando, se obtiene una ecuación para m de la forma $Am^2 + Bm + C = 0$, con $A = 274$, $B = 680$, $C = 85$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $m = (-340 \pm \sqrt{92310})/274$. □

4. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto de una elipse dada por la ecuación $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$.

a) La tangente a la elipse en P_0 tiene pendiente $-\beta^2 x_0/\alpha^2 y_0$ si $P_0 \neq (\pm\alpha, 0)$, y tiene pendiente infinita si $P_0 = (\pm\alpha, 0)$.

⊳ Sea m la pendiente de la tangente. Si m es infinita entonces la recta tiene ecuación $x = x_0$, y substituyendo en la ecuación de la elipse se obtiene $(y/\beta)^2 = 1 - (x_0/\alpha)^2$. Si el lado derecho es positivo o negativo tenemos 2 ó 0 soluciones (resp.), así que para que sea tangente necesitamos $1-(x_0/\alpha)^2=0$, o $x_0=\pm\alpha$, por lo que $P_0=(\pm\alpha,0)$.

Si $m\neq\infty$, la recta tangente tiene ecuación de la forma $y-y_0=m(x-x_0)$. Ahora es cómodo hacer un cambio de variables, $x=\alpha X$, $y=\beta Y$. En estos nuevos variables X,Y, la elipse tiene la ecuación $X^2+Y^2=1$ y la recta $Y-Y_0=M(X-X_0)$, con $M=m\alpha/\beta$. Ahora en los variables X,Y tenemos un círculo, y la recta es tangente ssi es perpendicular al vector (X_0,Y_0) (ver la sección de proposiciones de la tarea 9). El vector (X_0,Y_0) tiene pendiente Y_0/X_0, así que $M=-1/(Y_0/X_0)=-X_0/Y_0$. Ahora susbstituimos de regreso en la ecuación $M=-X_0/Y_0$ los valores m,x_0,y_0 y obtenemos $m\alpha/\beta=-(x_0/\alpha)/(y_0/\beta)$, o $m=-\beta^2x_0/\alpha^2y_0$. $\square$

b) Las rectas que pasan por P_0 y los focos de la elipse forman ángulos iguales con la tangente a la elipse en P_0.

$\triangleright$ Los focos de la elipse son $P_1=(a,0)$ y $P_2=(-a,0)$, con $a^2=\alpha^2-\beta^2$. Sea $P_0=(x_0,y_0)$ un punto en la elipse, i.e. x_0,y_0 satisfacen $(x_0/\alpha)^2+(y_0/\beta)^2=1$. En el punto P_0, la tangente a la elipse tiene pendiente $-\beta^2x_0/\alpha^2y_0$, así que el vector $\mathbf{n}=(\beta^2x_0,\alpha^2y_0)$ es perpendicular a la tangente. Definimos $\mathbf{v}_i=P_i-P_0$, $i=1,2$. Basta ver entonces que los ángulos α_1,α_2 que forman los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{n}$ son iguales. Para esto usamos la fórmula $\cos\alpha_i=\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{n}\rangle/\|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{n}\|$. Calculamos primero las $\|\mathbf{v}_i\|$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_1\|^2 &= \|(a-x_0,-y_0)\|^2=(a-x_0)^2+y_0^2=\\
&= a^2-2ax_0+x_0^2+y_0^2=\\
&= \alpha^2-\beta^2-2ax_0+x_0^2+\beta^2(1-(x_0/\alpha)^2)=\\
&= \alpha^2-2ax_0+x_0^2(1-\beta^2/\alpha^2)=\\
&= \alpha^2-2ax_0+x_0^2a^2/\alpha^2=\\
&= (\alpha-ax_0/\alpha)^2,
\end{aligned}$$

así que $\|\mathbf{v}_1\|=|\alpha-ax_0/\alpha|$.

Ahora demostraremos que de hecho $\alpha-ax_0/\alpha>0$. Para $x_0\leq 0$ es obvio (ya que $\alpha,a>0$). Para $x_0>0$, notamos que $x_0\leq\alpha$ y $a<\alpha$, así que $\alpha-ax_0/\alpha>\alpha-\alpha x_0/\alpha=\alpha-x_0\geq 0$, así que $\alpha-ax_0/\alpha>0$ y luego $\|\mathbf{v}_1\|=\alpha-ax_0/\alpha$.

De manera similar, $\|\mathbf{v}_2\|=\alpha+ax_0/\alpha$.

Ahora calculamos los $\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{n}\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{n}\rangle &= \langle(a-x_0,-y_0),(\beta^2x_0,\alpha^2y_0)\rangle=a\beta^2x_0-\beta^2x_0^2-\alpha^2y_0^2=\\
&= a\beta^2x_0-\alpha^2\beta^2=\alpha\beta^2(ax_0/\alpha-\alpha),
\end{aligned}$$

y de manera similar $\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{n}\rangle=\alpha\beta^2(-ax_0/\alpha-\alpha)$.

Finalmente

$$\cos\alpha_1 = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{\alpha\beta^2(ax_0/\alpha - \alpha)}{(\alpha - ax_0/\alpha)\|\mathbf{n}\|} = -\alpha\beta^2/\|\mathbf{n}\|,$$

y de manera similar $\cos\alpha_2 = -\alpha\beta^2/\|\mathbf{n}\| = \cos\alpha_1$, así que $\alpha_1 = \alpha_2$. □

5. * Sea l una recta en $\mathbb{R}^2$.

   a) Una reflexión por l es una isometría. Esta isometría es una transformación lineal ssi l pasa por el origen.

   Nota: la reflexión por l es la función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto P^*$, tal que $\mathbf{v}^* = -\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}^* = P^* - P_0$, $\mathbf{v} = P - P_0$ y P_0 es la intersección entre l y la recta que pasa por P y perpendicular a l.

   ▷ Según la definición, $P^* = P_0 - \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = P - P_0$ y P_0 es la intersección entre l y la recta que pasa por P y perpendicular a l. Así que $\mathbf{v} \perp l$. Ahora si tenemos otro punto $Q \in \mathbb{R}^2$, con $Q^* = Q_0 - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} = Q - Q_0$, entonces

$$dist(P^*, Q^*) = \|P^* - Q^*\| = \|(P_0 - Q_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{w})\|.$$

   Ahora $P_0, Q_0 \in l, \mathbf{v}, \mathbf{w} \perp l \implies \langle P_0 - Q_0, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle = 0 \implies \|(P_0 - Q_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{w})\|^2 = \|(P_0 - Q_0) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})\|^2 = \|P_0 - Q_0\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \implies \|(P_0 - Q_0) - (\mathbf{v} - \mathbf{w})\| = \|(P_0 - Q_0) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})\| = \|(P_0 + \mathbf{v}) - (Q_0 - \mathbf{w})\| = \|P - Q\| = dist(P^*, Q^*)$, por lo que la reflexión es una isometría (preserva distancias, ver el problema 6).

   Ahora suponemos que l está dada por una ecuación $Ax + By + C = 0$ tal que $\mathbf{n} = (A, B)$ es un vector unitario, i.e. $\|\mathbf{n}\| = 1$. Fijamos un punto $P_1 \in l$. Sea $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$\sigma(P) = P - 2\langle P - P_1, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}.$$

   Vamos a demostrar que $\sigma(P) = P^*$. Para esto tenemos que demostrar que $\sigma(P) = P_0 - \mathbf{v} = P - 2\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ definido como antes.

   Primero verificamos que la definición de σ no está afectada por la elección de P_1. O sea, si escogemos otro $P_2 \in l$ entonces $P - 2\langle P - P_1, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = P - 2\langle P - P_2, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$. Para esto calculamos que la diferencia entre los dos lados de esta ecuación es

$$2[\langle P_1, \mathbf{n}\rangle - \langle P_2, \mathbf{n}\rangle]\mathbf{n} = 2[C - C]\mathbf{n} = 0.$$

   Así que podemos tomar P_0 en lugar de P_1 en la definición de $\sigma \implies \sigma(P) = P - 2\langle P - P_0, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} = P - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}$.
   Ahora $\mathbf{v} \perp l \implies \mathbf{v} = \lambda\mathbf{n}$ para algun $\lambda \in \mathbb{R} \implies \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{n}, \lambda\mathbf{n}\rangle = \lambda \implies \mathbf{v} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle\mathbf{n} \implies \sigma(P) = P - 2\mathbf{v} \implies \sigma(P) = P^*$.

   Ahora demostramos que σ es una transformación lineal ssi l pasa por el origen. Si $0 \in l$ podemos tomar $P_1 = 0$ en la definición de $\sigma \implies \sigma(P) = P - 2\langle P, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}$, lo cual es lineal ya que es la suma de dos transformaciones lineales: la identidad, $P \mapsto P$, y la transformación $P \mapsto -2\langle P, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n}$. Conversamente, si σ es una transformación lineal entonces $\sigma(0) = 0 \implies 0 = 0 - 2\langle 0 - P_1, \mathbf{n}\rangle\mathbf{n} \implies \langle P_1, \mathbf{n}\rangle = 0 \implies 0 \in l$. $\square$

b) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es una reflexión por una recta o la composición de una traslación y rotación por el origen.

$\triangleright$ Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría y sea $P_0 = \phi(0)$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslación $T(P) = P - P_0$. Sea $\phi_0 = T \circ \phi$. Entonces ϕ_0 es una isometría (como composición de isometrías) y $\phi_0(0) = 0$. Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y sea $\phi_0(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v} = (a, b)$. Ahora $1 = \|\mathbf{e}_1\| = dist(\mathbf{e}_1, 0) = dist(\phi_0(\mathbf{e}_1), \phi_0(0)) = dist(\mathbf{v}, 0) = \|\mathbf{v}\| \implies a^2 + b^2 = 1 \implies$ la transformación $\rho(x, y) = (ax + by, -bx + ay)$ es una rotación y $\rho(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1$. Así que $\phi_1 = \rho \circ \phi_0$ es una isometría (como composición de isometrías) tal que $\phi_1(0) = 0$, $\phi_1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$. Ahora sea $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ y sea $\phi_1(\mathbf{e}_2) = \mathbf{w}$. Entonces $1 = \|\mathbf{e}_2\| = dist(\mathbf{e}_2, 0) = dist(\phi_1(\mathbf{e}_2), \phi_1(0)) = dist(\mathbf{w}, 0) = \|\mathbf{w}\|$.
[En Construcción]

c) Toda isometría de $\mathbb{R}^2$ es una reflexión por una recta o la composición de dos tales reflexiones.

6. * Una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva distancias es una isometría (o sea el requisito de ser biyectiva en la definición de isometría está sobrado).

$\triangleright$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función que preserva distancias, i.e. $dist(f(P_1), f(P_2)) = dist(P_1, P_2)$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Primero vemos que f es inyectiva: si $f(P_1) = f(P_2) \implies 0 = dist(f(P_1), f(P_2)) = dist(P_1, P_2) \implies P_1 = P_2$.

Ahora vemos que f es suprayectiva. Dado un $P' \in \mathbb{R}^2$ tenemos que encontrar un P tal que $f(P) = P'$. Sea P_0 un punto cualquera, e.g. $P_0 = (0, 0)$, y $P'_0 = f(P_0)$. Si $P'_0 = P'$ terminamos (tomando $P = P_0$), de otro modo sea $d_0 := dist(P', P'_0) > 0$. Sea P_1 un punto a distancia d_0 de P_0, e.g. $P_1 = P_0 + (d_0, 0)$, y sea $P'_1 = f(P_1)$. Si $P'_1 = P'$ terminamos (tomando $P = P_1$), de otro modo sea $d_1 = dist(P'_1, P') > 0$. Ahora $d_1 = dist(P', P'_1) \leq dist(P', P'_0) + dist(P'_0, P'_1) = d_0 + d_0 = 2d_0$.

Ahora sean C_0, C_1, C'_0, C'_1 los círculos con centros P_0, P_1, P'_0, P'_1 y radios d_0, d_1, d'_0, d'_1 (resp.). Luego $f(C_0 \cap C_1) \subset C'_0 \cap C'_1$ y $P' \in C'_0 \cap C'_1$.

Son dos casos:

(1) $d_1 = 2d_0$ y entonces $C_0 \cap C_1$ es un solo punto, P_3, y $C'_0 \cap C'_1 = \{P'\}$, por lo que $f(P_3) = P'$.

(2) $d_1 < 2d_0$ y entonces $C_0 \cap C_1$ consiste en dos puntos distintos, P_3, P_4 y mismo para $C'_0 \cap C'_1$. Luego $f(P_3), f(P_4)$ son distintos así que son los 2 puntos de intersección $C'_0 \cap C'_1$. Pero $P' \in C'_0 \cap C'_1$ así que $f(P_3) = P'$ ó $f(P_4) = P'$. $\square$