Tarea núm. 13

(Para el viernes 14 nov 2008)

Definiciones

- Un número complejo es una expresión de la forma $z = a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. El conjunto de números complejos se denota opor $\mathbb{C}$.

  La parte real de $z = a + ib$ es $a = Re(z)$, la parte imaginaria es $Im(z) = b$, el valor absoluto es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el conjugado es $\bar{z} = a - ib$.

  A cada número complejo $z = a+ib$ se le asocia el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La suma de números complejos corresponde a la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$. El producto de números complejos se define por la regla $i^2 = -1$. La forma polar de un número complejo $z = a + ib \neq 0$ es $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta$, donde $r > 0$.

- Sea A (por "anillo") uno de los conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{C}$. Sea n un entero no negativo. Un polinomio de grado n con coeficientes en A y variable z es una expresión de la forma $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $a_0, \ldots, a_n \in A$ y $a_n \neq 0$. (Al polinimio 0 se le asigna el grado -1). Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en A se denota por $A[z]$.

  Si $p(z) \in A[z]$, $a \in A$, se define $p(a) \in A$ como el resultado de sustituir a en lugar de la letra z en $p(z)$ y evaluar la expresión que resulta. Una raíz de un $p(z) \in A[z]$ es un elemento $a \in A$ tal que $p(a) = 0$.

  La suma y producto de polinomios se define de la manera obvia. Dados dos polinomios $p(z), q(z) \in A[z]$ con $q(z) \neq 0$, se dice que $q(z)$ divide a $p(z)$ si existe un $m(z) \in A[z]$ tal que $p(z) = q(z)m(z)$.

Algunas proposiciones vistas en clase

- $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$, $z\bar{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $Re(z) = (z + \bar{z})/2$, $Im(z) = (z - \bar{z})/2i$.
- Si $p(z), q(z) \in A[z]$ son polinomios no nulos, entonces $grado(p(z)q(z)) = grado(p(z)) + grado(q(z))$.
- Si $p(z), q(z) \in A[z]$ con $q(z) \neq 0$, entonces existen dos polinomios únicos $m(z), r(z) \in A[z]$, con $grado(r(z)) < grado(q(z))$, tal que $p(z) = m(z)q(z) + r(z)$.
- $a \in A$ es una raíz de un $p(z) \in A[z]$ ssi $z - a$ divide a $p(z)$.
- Todo polinomio en $\mathbb{C}[z]$ tiene una raíz compleja (el "Teorema fundamental del álgebra").

  Corolario: todo polinomio en $\mathbb{C}[z]$ de grado n es un producto de n factores lineales, únicos salvo múltiplicación por escalar.

PROBLEMAS

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$:

   (a) $(1+2i)^3$, (b) $\frac{5}{-3+4i}$, (c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$, (d) $(1+i)^n + (1-i)^n$, (e) $\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

   (En la última fórmula hay que considerar todas las combinaciones de signos).

2. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Expresar la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos en términos de x y y:

   (a) z^4, (b) $\frac{1}{z}$, (c) $\frac{z-1}{z+1}$, (d) $\frac{1}{z^2}$.

3. Expresar las siguientes raíces cuadradas en la forma $a + ib$:

   (a) $\sqrt{i}$, (b) $\sqrt{-i}$, (c) $\sqrt{1+i}$, (d) $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

4. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios en la forma $a + ib$:

   (a) $z^4 - i$, (b) $z^3 + 2i$, (c)* $z^5 - 1$.

5. Calcular el valor absoluto de los siguientes números complejos:

   (a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{17}$, (b) $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$, (c) $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

6. Expresar en términos de $\cos\theta, \operatorname{sen}\theta$:

   (a) $\cos 3\theta$, (b) $\operatorname{sen} 5\theta$, (c) $\operatorname{sen} 7\theta$.

7. Sea $z = \cos(\pi/50) + i\operatorname{sen}(\pi/50)$.
   a) Demuestra que $1 + z^k + z^{2k} + \cdots + z^{99k} = 0$ si k no es un múltiplo de 100.

   b) Encuentra el valor de $1 - z^k + z^{2k} + \cdots - z^{99k}$.

8. * Demuestra: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero ssi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.