Examen Final - soluciones

9 dic, 2009

PARTE A *(60 puntos). "Cierto" o "Falso".*

1. Para todo operador ortogonal T en $\mathbb{R}^n$, $\det(T) = 1$.
   ▷ Falso. $T : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2 \ldots, x_n)$ es ortogonal y $\det(T) = -1$. . □

   Nota: en general, un operador ortogonal tiene $\det T = \pm 1$.

2. Todo operador invertible en $\mathbb{C}^2$ es diagonalizable.
   ▷ Falso. $T(x, y) = (x+y, y)$ tiene solamente el valor propio 1 y el espacio propio asociado es de dim=1. □

3. Si una matriz 2×2 con entradas reales es diagonalizable en $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ entonces es diagonalizable en $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$.
   ▷ Falso. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene dos valores propios complejos distintos, $\pm i$, así que es diagonalizable en $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ pero no en $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$. □

4. Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(A) = 0$, entonces el polinomio característico de A divide a $p(x)$.
   ▷ Falso. $A = I$, $p(x) = x - 1$, $n > 1$. □

   Nota: en general, se sabe que el polinomio mínimo divide a todo polinomio que anula a A, incluso al polinomio característico (que anula a A por el teorema de Cayley-Hamilton). Típicamente, el polinomio mínimo y característico coinciden (si hay un solo bloque de Jordan asociado con cada vlor propio), pero no siempre es así, como vemos aquí.

5. Un operador lineal es diagonalizable ssi su polinomio mínimo coincide con su polinomio característico.
   ▷ Falso, en ambas direcciones. $T = I$, en un espacio vectorial de dimensión $n > 1$, su polinomio característico es $(x - 1)^n$ y su mínimo es $(x - 1)$. En la otra dirección, el operador $T(x, y) = (y, 0)$, en $\mathbb{R}^2$, su polinomio característico y mínimo es x^2. □

6. Para un operador nilpotente, el polinomio mínimo coincide con su polinomio característico.
   ▷ Falso. El operador nulo, en un espacio de dimensión $n > 1$, tiene polinomio característico x^n y polinomio mínimo x. □

7. $99x^2 + 20xy + y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
   ▷ Falso. La matriz simétrica asociada a la forma caudrática tiene determinante $99 \cdot 1 - 10 \cdot 10 < 0$, por lo que tiene un eigen valor negativo (y otro positivo). Si (a, b) es un vector propio asociado al valor propio negativo entonces $99a^2 + 20ab + b^2 < 0$. □

   Nota: no es dificil adivinar directamente un contra ejemplo; digamos $x = -1$, $y = 10$.

8. Existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 7 tal que para todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 7
   $$\int_1^2 p(x)q(x)dx = 3p(4) + \int_5^6 p(x)dx.$$
   ▷ Cierto. Si $V \subset \mathbb{R}[x]$ es el espacio de los polinomios de grado ≤ 7 entonces el lado derecho es un funcional lineal y el lado izquierdo un producto escalar en V. Luego

sabemos que todo funcional lineal en un espacio euclideano está dado por el producto escalar $\langle q, \cdot \rangle$ con un elemento $q \in V$. $\square$

mn Nota: tambien es posible encontrar a $q(x)$ (ejercicio).

9. Existe una matriz ortogonal 5×5 cuya segunda fila es $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
   $\triangleright$ Cierto. Una matriz es ortogonal ssi sus filas forman una base ortonormal. El vector dado es unitario, por lo que se puede completar a una base ortonormal de $\mathbb{R}^5$ (Gramm-Schmidt). $\square$

10. Si T es un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ con un subespacio invariante $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces $U^\perp$ es T^*-invariante.
    $\triangleright$ Cierto. Sea $u' \in U^\perp$. Entonces, para todo $u \in U$, $\langle T^*u', u\rangle = \langle u', Tu\rangle = 0$, ya que $Tu \in U$. Así que $T^*u' \in U^\perp$. $\square$

11. La suma de operadores nilpotentes es nilpotente.
    $\triangleright$ Falso. Sean $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dados por $T_1(x, y) = (y, 0)$, $T_2(x, y) = (0, x)$. Entonces $T_1^2 = T_2^2 = 0$, por lo que T_1, T_2 son nilpotentes, pero $T = T_1 + T_2$ satisface $T(x, y) = (y, x)$, por lo que $T^n = T$ para n impar y $T^n = I$ para n par, así que $T^n \neq 0$ para todo n, por lo que T no es nilpotente. $\square$

12. La suma directa de operadores nilpotentes es nilpotente.
    $\triangleright$ Cierto. Si $N_1, N_2, \ldots$ son operadores nilpotente en $V_1, V_2, \ldots$ de índices $k_1, k_2, \ldots$ (resp.), entonces $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$ es nilpotente de índice $k = \max\{k_1, k_2, \ldots\}$ ya que $N^k = N_1^k \oplus N_2^k \oplus \ldots = 0$. $\square$

13. Todo operador lineal en $\mathbb{R}^7$ admite un subespacio invariante de dimensión mayor que 1 y menor que 7.
    $\triangleright$ Cierto. El operador adjunto tiene un valor propio (ya que su polinomio característico tiene grado impar) con un vector propio asociado que genera un subespacio 1-dimesnional invariante. Su complemento ortogonal es 6-dimensional y es invariante bajo el operador original (ver inciso 10) . $\square$

    Nota: de hecho, existen subespacios invariantes de *todas* las dimensiones entre 1 y 7. Croquis: si todos los valores propios son reales el operador es triangulable y terminamos. Si no, tiene un valor propio real, un valor propio complejo, y su conjugado. Estos producen subespacios invariantes de dimension 1 y 2, y al tomar su suma directa, 3 tambien. Aplicando esto a la adjunta y tomando complemento ortogonal como en la demostración del párafo anterior, obtenemos subespacios invariantes de dimensión 6,5 y 4.

14. La matriz de un operador autoadjunto en $\mathbb{R}^7$ con respecto a cualquier base es simétrica.
    $\triangleright$ Falso. El operador $T(x_1, \ldots, x_7) = (2x_1, x_2, \ldots, x_7)$ es autoadjunto, pero su matriz (a_{ij}) con respecto a la base $\{e_1 + e_2, e_2, \ldots, e_n\}$ no es simétrica, ya que $a_{21} = -1$ y $a_{12} = 0$. $\square$

    Nota: la matriz con respeto a cualquier base *ortonormal* (como la canónica) es simétrica.

15. Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ es un operador autoadjunto y $V_1 \subset \mathbb{R}^7$ es un subespacio T-invariante, entonces existe un subespacio T-invariante $V_2 \subset \mathbb{R}^7$ tal que $\mathbb{R}^7$ es la suma directa de V_1 y V_2.
    $\triangleright$ Cierto. Podemos tomar como V_2 el complemento ortogonal de V_1. $\square$

    Nota: aquí estamos usando una propiedad de los operadores autoadjuntos (y algunos más, como los ortogonales): si un subespacio es invariante su complemento ortogonal es invariante. En general, no es cierto para un operador arbitrario (encuentra contraejemplos).

16. Un operador lineal con polinomio característico $x(x^2-1)$ es diagonalizable.
$\triangleright$ Cierto, ya que no tiene raices múltiples. $\square$

17. Un operador lineal con polinomio mínimo $x(x^2-1)$ es diagonalizable.
$\triangleright$ Cierto, ya que no tiene raices múltiples. $\square$

18. Existe un producto hermitiano en $\mathbb{C}^2$ tal que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ es autoadjunto.
$\triangleright$ Falso. Los valores propios de un operador autoadjunto son reales, por lo que su polinomio característico tiene coeficientes reales. Pero el polinomio característico de la matriz dada es $x^2-(2+i)x+(2i-1)$. $\square$

Nota: un error comun en este inciso es argumentar que este operador no puede ser autoadjunto porque la matriz no es hermítica ($\bar{A}^t \neq A$). Esto es un error porque el criterio "un operador es autoadjunto ssi su matriz es hermítica" es válido solo cuando la matriz se toma con respecto a una base unitaria. Para un producto hermitiano arbitrario en $\mathbb{C}^2$ la base canónica no tiene que ser unitaria, por lo que este criterio no nos sirve aquí.

Luego, la condición que hemos usado arriba ("un operador autoadjunto tiene valores propios reales") es necesaria pero no suficiente. Hay que pedir tambien que el operador sea diagonalizable. Es fácil ver que estas condiciones necesarios (valores propios reales y diagonalizable) son suficientes: se declara una base de vectores propios como ortonormal.

19. Un operador $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ que satisface $T^3=T$ es diagonalizable. (Sugerencia: $x^3-x=x(x-1)(x+1)$.)
$\triangleright$ Cierto. El polinomio mínimo divide a $x^3-x=x(x-1)(x+1)$, por lo que no tiene raices múltiples. $\square$

Nota: el mismo argumento demuestra que en general, si un operador T satisface una ecuación polinomial $p(T)=0$ tal que $p(x)$ no tiene raices multiples, entonces T es diagonalizable.

20. Si $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ satisface $T^{25}=0$ entonces $T^5=0$.
$\triangleright$ Cierto, ya que un operador nilpotente en $\mathbb{R}^5$ tiene índice ≤ 5. $\square$

PARTE B *(20 puntos)*

Sean $a,b\in\mathbb{R}$, y sea A la matriz $n\times n$ con entradas

$$a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i\neq j \end{cases}, \qquad 1\leq i,j\leq n.$$

1. Demuestra: $\lambda=a-b$ es un valor propio de A.
$\triangleright$ Esto significa, por definición de "valor propio", que el kernel de $A-(a-b)I$ es no trivial. Si $v=(x_1,\ldots,x_n)^t$, entonces $[A-(a-b)I]v=b(x_1+\cdots+x_n)(1,\ldots,1)^t$. Así que todo $v\neq 0$ que satisface $x_1+\cdots+x_n=0$ es un vector propio asociado al valor propio $a-b$. Estos vectores forman un espacio de dimensión $n-1$. Para $n>1$ es no trivial. (Para $n=1$ y $b\neq 0$ el inciso es falso). $\square$

Nota: Es posible tambien tomar la determinante de $A-xI$ para calcular el polinomio característico, factorizarlo, y encontrar entre sus raices al valor $a-b$. Pero es mucho más trabajo y nada necesario.

2. Encuentra una base ortonormal para el espacio propio de A correspondiente al valor propio $a-b$.
▷ Sea $U = Ker(A-(a-b)I)$. Como vimos en el inciso anterior, para $b \neq 0$, U es el kernel del funcional lineal $x_1+\cdots+x_n$, por lo que es de dimensión $n-1$. Primero encontramos una base ortogonal y luego lo normalizamos. Sean
$$\begin{array}{lcl} v_1' & = & (1, \; -1, \; 0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0) \\ v_2' & = & (1, \; 1, \; -2, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0) \\ v_3' & = & (1, \; 1, \; 1, \; -3, \; \ldots, \; 0, \; 0) \\ & \vdots & \\ v_{n-1}' & = & (1, \; 1, \; 1, \; 1, \; \ldots, \; 1, \; -(n-1)) \end{array}$$
Es un conjunto ortogonal de $n-1$ vectores en U, por lo que es una base ortogonal. Normalizando, obtenemos la base ortonormal $v_1, \ldots, v_{n-1}$, donde $v_k = v_k'/\sqrt{k(k-1)}$.
Si $b = 0$, $A-(a-b)I = 0$ y podemos tomar como base ortonomal la base canónica de $\mathbb{R}^n$. □

Nota: aquí tambien, como en el inciso anterior, uno podría intentar seguir "la receta", aplicando el proceso de Gram-Schmidt a una base de U escogida de manera arbitraria, digamos $w_k' = e_1 - e_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Es más trabajo claramente, pero aun si escoges este camino y aplicas el proceso de Gram-Schmidt puedes simplificar el trabajo al no insistir a normalizar los vectores durante el proceso. De este modo se obtiene una base ortogonal y no ortonormal, que al final se puede normalizar. La ventaja de no normalizar durante el proceso es que se evitan en las cuentas unas raics cuadradas desagradables. Así, se define inductivamente $w_i'' = w_i' - P_{i-1}(w_i')$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, donde P_k es la proyección ortogonal sobre $sp\{w_1', \ldots, w_k'\} = sp\{w_1'', \ldots, w_k''\}$, y $P_k(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_k'' \rangle}{\langle w_k'', w_k'' \rangle} w_k''$.

3. Encuentra una matriz ortogonal P tal que PAP^{-1} es diagonal.
▷ Las filas de P es una base ortonormal de vectores propios de A. Podemos tomar como las primeras $n-1$ filas los vectores $v_1, \ldots, v_{n-1}$ encontrados en el inciso anterior. Para la última fila, completamos estos $n-1$ vectores a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con $v_n = (1, \ldots, 1)/\sqrt{n}$. Nota que v_n es automáticamente un vector propio, ya que de A es simétrica. □

4. Encuentra los valores de a, b tal que A es positiva definida.
▷ A es positiva definida ssi sus valores propios son positivos. De los incisos anteriores, los valores propios son $a-b$ (con multiplicidad $n-1$, si $b \neq 0$) y $a+(n-1)b$ (con vector propio v_n). Para que ambos valores sean positivos necesitamos entonces que $a > 0$ y $-\frac{a}{n-1} < b < a$ (para $n > 1$). □

PARTE C *(20 puntos)*

Sea $V \subset \mathbb{R}[x]$ el subespacio de polinomio de grado $\leq d$. Sea $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x^i$, $k = 0, 1, 2, \ldots, d$.

1. Demuestra que existe un único producto escalar en V tal que $\{p_0, \ldots, p_d\}$ es una base ortonormal.
▷ Basta ver que $\{p_0, \ldots, p_d\}$ es una base. Pero $p_i - p_{i-1} = x^i$, $i = 1, \ldots, d$, y $p_0 = 1$, por lo que este conjunto genera a la base estandar $1, x, \ldots, x^n$. Como son $n+1 = \dim V$ vectores, tiene que ser una base. □

2. Encuentra el producto escalar $\langle x^i, x^j \rangle$, $0 \leq i, j \leq d$, según el producto escalar del inciso anterior.

▷ Si ambos $i, j \geq 1$, $x^i = p_i - p_{i-1}$, $x^j = p_j - p_{j-1}$, por lo que

$$\begin{aligned}\langle x^i, x^j\rangle &= \langle p_i - p_{i-1}, p_j - p_{j-1}\rangle = \delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j} + \delta_{i-1,j-1} = \\ &= \begin{cases} 2 & i = j, \\ -1 & |i-j| = 1, \\ 0 & |i-j| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Luego, para $i \geq 1$, $\langle x^i, 1\rangle = \langle p_i - p_{i-1}, 1\rangle = -1$ si $i = 1$ y 0 de otro modo. Por fin, $\langle 1, 1\rangle = \langle p_0, p_0\rangle = 1$.

En resumen, la matriz de los productos escalares $\langle x^i, x^j\rangle$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(solo se anota los términos no nulos). □

3. Sean k, l dos enteros en el rango $0 \leq k, l \leq d$. Encuentra la proyección orthogonal (según el producto escalar del primer inciso) de x^l sobre el subespacio generado por $1, x, \ldots, x^k$.
   ▷ Sea $P_k : V \to V$ la proyección ortogonal sobre $V_k = sp\{1, x, \ldots, x^k\} = sp\{p_0, \ldots, p_k\}$. Si $l \leq k$ entonces $x_l \in V_k$ por lo que $P_k(x^l) = x^l$. Para $l > k$, $x^l = p_l - p_{l-1}$, por lo que $P_k(x^l) = \sum_{i=0}^k \langle x^l, p_i\rangle p_i = \sum_{i=0}^k \langle p_l - p_{l-1}, p_i\rangle p_i = -p_k$ si $l = k+1$ y 0 para $l > k+1$.

   En resumen,
$$P_k(x^l) = \begin{cases} x^l & l \leq k, \\ -p_k & l = k+1, \\ 0 & l > k+1. \end{cases}$$
□