Tarea núm. 11

Para el viernes, 30 oct 2009

1. Calcular el polinomio característico y mínimo de las siguientes matrices con entradas reales. En cada caso encontrar los valores propios (reales o complejos) y su multiplicidades en el polinomio característico y mínimo. Decidir cual matriz es diagonalizable (sobre los reales o los complejos) y en caso de ser diagonalizable, digamos la matriz A, encontrar una matriz invertible P (real o compleja) tal que PAP^{-1} es diagonal.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Para cada matriz del problema anterior, considerada como un operador lineal T en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{C}^3$, encontrar su descomposición primaria; es decir, la factorización de su polinomio mínimo, el kernel de cada factor, y para cada kernel una representación matricial del operador inducido por T con respecto a una base del kernel.

3. Sea $T : V \to V$ un operador lineal tal que T es una suma directa $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_k$. Demuestra:

   a) El polinomio característico de T es el producto de los polinomios característicos de $T_1, T_2 \ldots, T_k$.

   b) El polinomio mínimo de T es el mínimo comun múltiplo (mónico) de los polinomios mínimos de $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

4. Sea $\mathbf{k}$ un campo y $\mathbf{k}[x]$ el anillo de los polinomios con una variable x con coeficientes en $\mathbf{k}$.

   a) Dos polinomios $p_1, p_2 \in \mathbf{k}[x]$ son primos relativos (i.e. sin divisor comun de grado > 0) ssi existen $q_1, q_2 \in \mathbf{k}[x]$ tal que $p_1q_1 + p_2q_2 = 1$.

   b) Sea $p \in \mathbf{k}[x]$ un polinomio irreducible (o primo; polinomio no nulo sin divisores de grado > 0.) Si $f, g \in \mathbf{k}[x]$ tal que $p|fg$ entonces $p|f$ o $p|g$.

   Sugerencia: si p no divide a f entocnes f, p son primos relativos. Ahora aplique el inciso anterior.

   c) Demuestra que todo polinomio no nulo $f \in \mathbf{k}[x]$ se factoriza como producto de polinomios irreducibles, y la factorización es única, salvo el orden de los factores y su múltiplicación por constantes no nulos.

   Sugerencia: para la existencia usa inducción sobre el grado de f. Para la unicidad, usa el inciso anterior para demostrar que dadas dos factorizaciones de f, cada factor irreducible en una factorización debe aparecer en la otra.