Tarea núm. 12

Para el viernes, 6 nov 2009

Definiciones.

Sea $T : V \to V$ un operador lineal con valor propio λ. El subespacio $E_\lambda = \{v \in V | Tv = \lambda v\}$ se llama el *espacio propio* de T asociado a λ y su dimensión es la *multiplicidad geométrica* de λ. La *multiplicidad algebráica* de λ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de T.

Problemas

1. Demuestra que la multiplicidad geométrica de un valor propio de un operador lineal no es más grande que su multiplicidad algebráica.

2. Demuestra que un operador lineal en un espacio vectorial complejo es diagonalizable ssi la multiplicidad geométrica de cada uno de sus valores propios es igual a su multiplicidad algebráica.

3. Demuestra que un operador lineal en un espacio vectorioal V con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y espacios propios asociados $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ es diagonalizable ssi $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$.

4. Sean T, S dos operadores lineales en un espacio vectorial V. Si T y S conmutan entonces todo espacio propio de T (asociado a un valor propio de T) es invariante bajo S. Concluye que si T es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, así que $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$, entonces $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$, con cada S_i un operador lineal en E_{λ_i}.

5. Sea S un operador lineal en un espacio vectorial V, sea $V_1 \subset V$ un subespacio S-invariante y sea S_1 el operador asociado en V_1. Demuestra que si S es diagonalizable entonces S_1 es tambien diagonalizable.

6. Sean T, S dos operadores lineales en un espacio vectorial V. Demuestra que si T, S conmutan y son diagonalizables, entonces son *simultaneamente diagonazables*; o sea, existe una base de de V cuyos elementos son vectores propios de ambos operadores.

7. Sea A una matriz compleja $n \times n$ tal que A^2 es diagonalizable. Demuetsra que si A es invertible es diagonalizable y da un contra ejemplo para el caso de A singular (no invertible).