Tarea núm. 8 y 9

Tarea 8: problemas 1-7, para el viernes 2 oct 2009.
Tarea 9: problemas 8-14, para el viernes 9 oct 2009.

Definiciones

1. La *complexificación* de un espacio vectorial real V es el espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}}$, cuyos elementos son pares de vectores de V, denotados por $v_1 + iv_2$, y donde la suma de vectores y multiplicación por escalres (complejos) es obvia de la notación: $(v_1 + iv_2) + (v_1' + iv_2') = (v_1 + v_1') + i(v_2 + iv_2')$, $(a + ib)(v_1 + iv_2) = av_1 - bv_2 + i(av_2 + bv_1)$.

2. La parte real e imaginaria de un vector $v = v_1 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ se define por $\mathrm{Re}(v) = v_1$, $\mathrm{Im}(v) = v_2$. El conjugado es $\bar{v} = v_1 - iv_2$.

3. El espacio V se identifica naturalmente con el subconjunto de vectores reales en $V_{\mathbb{C}}$ (los vectores $v \in V_{\mathbb{C}}$ con $\mathrm{Im}(v) = 0$) mediante la biyección $v_1 \mapsto v_1 + i0$.

4. La complexificación de una transformación lineal entre espacios vectoriales reales $T : V \to V'$ es la transformación lineal $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V'_{\mathbb{C}}$ dada por $T_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = Tv_1 + i(Tv_2)$.

5. La *realificación* de un espacio vectorial complejo U es el espacio vectorial real $U_{\mathbb{R}}$, cuyos elementos son los mismos elementos de U, y donde la suma de vectores y la multiplicación por escalares (reales) son lo mismo como en U. En otras palabras, la transición de U a $U_{\mathbb{R}}$ consiste meramente en restringir la multipliciación por escalares a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (y "olvidar" de multiplicación por el resto de los escalares complejos).

6. La realificación de una transformación lineal entre espacios vectoriales complejos $S : U \to U'$, es la transformación lineal $S_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \to U'_{\mathbb{R}}$ que es la misma que S.

7. El conjugado de un espacio vectorial complejo U es el espacio vectorial $\overline{U}$ cuyos elementos son los mismos que U, la suma de vectores es como en U, pero la multiplicación por escalar está dada por $(\lambda, v) \mapsto \bar{\lambda}v$.

8. El conjugado de una transformación lineal entre espacios vectoriales complejos $S : U \to U'$, es la transformación lineal $\overline{S} : \overline{U} \to \overline{U}'$ que es la misma función que S.

9. Si V es un espacio vectorial real con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se define en $V_{\mathbb{C}}$ primero la complexificación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por la (única) extensión bilineal compleja de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $V \times V$ a $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}}$. La forma hermítica asociada en $V_{\mathbb{C}}$ se define por $\langle v, v' \rangle = \langle \bar{v}, v' \rangle_{\mathbb{C}}$.

10. Una forma simpléctica en un espacio vectorial real es una forma bilineal antisimétrica no degeneada; o sea, una función bilineal $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que (1) $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1)$ para todo $v_1, v_2 \in V$ y (2) $B(v_1, v_2) = 0$ para todo $v_2 \in V$ implica $v_1 = 0$.

Problemas

En los siguientes problemas V es un espacio vectorial real y U un espacio vectorial complejo (ambos de dimensión finita).

1. Toda base de V es una base de $V_{\mathbb{C}}$, así que $\dim(V) = \dim(V_{\mathbb{C}})$.

2. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal entonces $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ es una transformación lineal. Si $B \subset V$ es una base entonces $[T_{\mathbb{C}}]_B = [T]_B$. Concluye que $\det(T_{\mathbb{C}}) = \det(T)$.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de U entonces $\{u_1, \ldots, u_n, iu_1, \ldots, iu_n\}$ es una base de $U_{\mathbb{R}}$. Así que $\dim(U_{\mathbb{R}}) = 2\dim(U)$.

4. Si $S : U \to U$ es una transformación lineal entonces $S_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \to U_{\mathbb{R}}$ es una transformación lineal. Si $M = M_1 + iM_2$ es la matriz de S con respecto a una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de U (M_1 y M_2 son matrices reales) entonces la matriz de $S_{\mathbb{R}}$ con respecto a la base $\{u_1, \ldots, u_n, iu_1, \ldots, iu_n\}$ es
$$\begin{pmatrix} M_1 & -M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}.$$
5. Toda base de U es una base de $\overline{U}$. Si M es la matriz de una transformación lineal $S : U \to U$ con respecto a una base B de U entonces la matriz de $\overline{S}$ con respecto a B es $\overline{M}$ (la matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos de M). Concluye que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
6. V no es un subespacio de $V_{\mathbb{C}}$ sino de $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$. Mismo para iV.
7. Para todo $v, v' \in V_{\mathbb{C}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{v + v'} = \bar{v} + \bar{v}'$, $\overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Concluye que conjugación no es una transformación lineal $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ sino una transformación lineal $V_{\mathbb{C}} \to \overline{V_{\mathbb{C}}}$.
8. Sea $J : U \to U$ la multiplicación por el escalar i y sea $\mathbf{J} = (J_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$. Demuestra que
   a) Los valores propios de $\mathbf{J}$ son $\pm i$ y que $(U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = U' \oplus U''$ donde U' y U'' son los espacios de vectores propios de $\mathbf{J}$ asociados con los valores propios i y $-i$ (resp.).
   b) $U'' = \overline{U'}$
   c) $u \mapsto (u - i\mathbf{J}u)/2$ y $u \mapsto (u + i\mathbf{J}u)/2$ definen isomorfismos lineales (complejos) $U \to U'$ y $\overline{U} \to U''$ (resp.).
9. Sea $S : U \to U$ una transformación lineal y sea $\mathbf{S} = (S_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$. Entonces $U', U'' \subset (U_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ son invariantes bajo $\mathbf{S}$. Bajo la identifiación $U' = U$ y $U'' = \overline{U}$ (ver problema anterior) la restricción de $\mathbf{S}$ a U', U'' es $S, \overline{S}$ (resp.), así que $\mathbf{S} = S \oplus \overline{S}$. Concluye que $\det(S_{\mathbb{R}}) = |\det(S)|^2$.

   Nota: intenta demostrar esta fórmula directamente, i.e. usando problema 4 solamente.
10. Demuestra que la forma hermítica asociada a un producto escalar en V es una forma hermítica en $V_{\mathbb{C}}$.
11. Demuestra que la parte real de una forma hermítica en U es un producto escalar en $U_{\mathbb{R}}$. La parte imaginaria es una forma simpléctica.
12. Si $T : V \to V$ es simétrico (resp. ortogonal), con respecto a una estructura euclideana en V, entonces $T_{\mathbb{C}}$ es hermitiano (resp. unitario) con respecto a la estructura hermitiana asociada en $V_{\mathbb{C}}$.
13. Toda matriz antisimétrica real $n \times n$ es congruente a la suma directa de k copias de la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   y la matriz nula $(n - 2k) \times (n - 2k)$.
14. Concluye del problema anterior lo siguiente: (1) un espacio vectorial real V admite una forma simpléctica ssi $\dim V$ es par. (2) Si $\dim V$ es par todas las formas simplécticas en V son equivalentes; o sea, dadas dos formas simplécticas $B_1, B_2 : V \times V \to \mathbb{R}$, existe un isomorfismo lineal $T : V \to V$ tal que $B_1(v, v') = B_2(Tv, Tv')$ para todo $v, v' \in V$.