

CAPÍTULO VII

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Introducción.—Un segmento rectilíneo es la línea más corta entre dos puntos. Un arco de círculo máximo es la curva más corta que une dos puntos de una superficie esférica. Entre todas las curvas planas cerradas de la misma longitud, la circunferencia encierra el área mayor; entre todas las superficies cerradas de igual área, la esfera encierra el mayor volumen.

Estas propiedades de máximo y mínimo eran conocidas de los griegos, aunque a menudo se enunciaban los resultados sin serio intento de dar la demostración. Se atribuye a Herón de Alejandría (siglo I a. de J.C.), uno de los más significativos descubrimientos de la ciencia griega. Se sabía, desde mucho tiempo antes, que un rayo de luz procedente de un punto P y que incide sobre un espejo plano L , en un punto R , se refleja en dirección a un punto Q , tal que PR y QR forman ángulos iguales con el espejo. Herón encontró que si R' es otro punto del espejo, la distancia total $PR' + R'Q$ es mayor que la distancia $PR + QR$. Este teorema, que demostraremos a continuación, caracteriza la trayectoria real PQR , de la luz, como el camino más corto posible entre P y Q , que toca al espejo, descubrimiento que puede considerarse como el germen de la óptica geométrica.

Es muy natural que los matemáticos se interesen por cuestiones de este tipo. En la vida diaria se presentan constantemente problemas de máximos y mínimos, de lo «óptimo» y lo «peor». Muchas cuestiones de importancia práctica se plantean de este modo; p. ej., ¿qué forma ha de tener una nave para presentar una resistencia mínima al agua? ¿Cuál es el recipiente cilíndrico, construído con una cantidad dada de chapa, que tiene un volumen máximo?

Habiéndose iniciado en el siglo XVII, la teoría general de los valores extremos—máximos y mínimos—se ha convertido en uno de los principios sistemáticos integrantes de la ciencia. Los primeros pasos de Fermat en su cálculo diferencial estuvieron animados por el deseo de estudiar las cuestiones de máximos y mínimos por medio de métodos generales. En el siglo siguiente, se amplió el campo de aplicación de estos métodos mediante la invención del *cálculo de variaciones*. Era cada vez más evidente que las leyes físicas de la Naturaleza encontraban su expresión más adecuada en el principio de mínimo, el cual

proporciona un acceso natural a una solución más o menos completa de problemas particulares. Una de las realizaciones más notables de la matemática contemporánea es la teoría de los valores estacionarios, generalización del concepto de valores extremos, que combina el análisis con la topología. La exposición que haremos de toda esta cuestión será completamente elemental.

I. PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Triángulo de área máxima, dados dos lados.—Se dan dos segmentos a y b , y se pide hallar el triángulo de área máxima que tenga esos segmentos por lados. La solución es sencillamente el triángulo rectángulo de catetos a y b . Pues si consideramos cualquier triángulo (Fig. 176), dos de cuyos lados sean a y b , y h la altura respecto a a como base, el área del triángulo será $A = \frac{1}{2}ah$. Ahora bien: $\frac{1}{2}ah$ será máximo cuando sea máximo h , lo que ocurrirá si h coincide con b ; es decir, para un triángulo rectángulo. Por tanto, el área máxima es $\frac{1}{2}ab$.

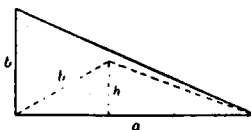


Fig. 176.

2. Teorema de Herón. Propiedad extremal de los rayos luminosos. Sea una recta L y dos puntos P y Q al mismo lado de L ; ¿para qué punto R de L es $PR + RQ$ la trayectoria mínima de P a Q tocando a L ? Éste es el problema de Herón del rayo luminoso. (Si L fuera la ribera de un río y alguien tuviera que ir de P a Q tan rápidamente como fuera posible, teniendo que sacar durante el camino un cubo de agua de L , tendría que resolver precisamente este problema.)

Para hallar la solución, reflejemos P sobre L como si fuera un espejo, obteniendo el punto P' , de tal manera que L es la mediatriz de PP' . La recta $P'Q$ corta a la L en el punto buscado R . Es inmediata la demostración de que $PR + RQ$ es menor que $PR' + R'Q$, para cualquier otro punto R' de L . Puesto que $PR = P'R$ y $PR' = P'R'$, se deduce que $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q$, y que $PR' + R'Q = P'R' + R'Q$. Pero como $P'R' + R'Q$ es mayor que $P'Q$ (puesto que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercero), resulta que $PR' + R'Q$ es mayor que $PR + RQ$, como se quería probar. En lo que sigue, supondremos que ni P ni Q se encuentran sobre L .

De la figura 177 se deduce que son iguales los ángulos 2 y 3, así como los 2 y 1, luego también son iguales 1 y 3. En otras palabras, R es un punto tal que PR y QR forman ángulos iguales con L . De esto

se deduce que un rayo luminoso que se refleje en L (del cual se sabe por experiencia que forma ángulos iguales de incidencia y de reflexión) sigue en realidad la trayectoria más corta que conduce de P a Q pasando por L , como antes se afirmó en la introducción.

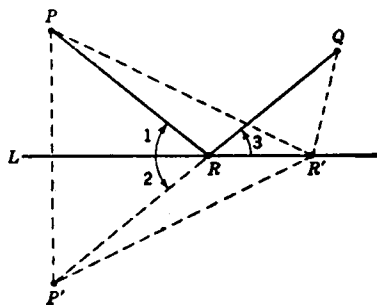


Fig. 177.—Teorema de Herón.

Puede generalizarse el problema para incluir el caso de varias rectas, L, M, \dots Sean, p. ej., dos rectas L y M , y dos puntos P y Q , situados como en la figura 178; el problema consiste en encontrar la trayectoria mínima de P a L , de aquí a M y después a Q . Sea Q' el simétrico de Q , respecto a la recta M , y Q'' el de Q' respecto a L . Trácese las rectas PQ'' , que corta

a L en R , y RQ' , que corta a M en S ; los puntos R y S son los buscados, siendo $PR + RS + SQ$ el camino mínimo de P a Q , que pasa por L y M . La demostración es muy parecida a la del problema anterior y queda al cuidado del lector. Si L y M fueran espejos, un rayo

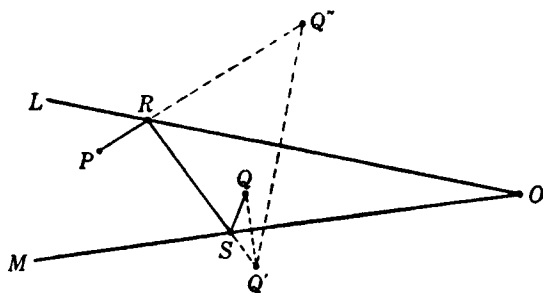


Fig. 178.—Reflexión sobre dos espejos.

luminoso procedente de P , que se reflejara en L y después en M , para seguir hacia Q , incidiría sobre L en R y sobre M en S , de donde resulta otra vez que el rayo luminoso sigue la trayectoria de longitud mínima.

Cabe preguntarse cuál es la trayectoria mínima de P a M , después a L y desde allí hasta Q . Esto daría una trayectoria $PRSQ$ (Fig. 179), determinada de manera análoga a la anterior $PRSQ$. La

longitud de la primera trayectoria puede ser mayor, igual o menor que la de la segunda.

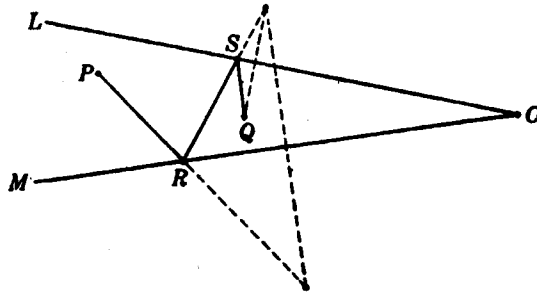


FIG. 179.

***Ejercicio:** Demuéstrase que la primera trayectoria es menor que la segunda si O y R están a un mismo lado de la recta PQ . ¿En qué caso tendrán ambas trayectorias igual longitud?

3. Aplicaciones a problemas sobre triángulos.—Con ayuda del teorema de Herón puede obtenerse fácilmente la solución de los dos problemas siguientes: *a)* Dados el área A y un lado $c = PQ$ de un triángulo, determínese éste de forma que la suma de los otros dos lados a y b sea mínima. Conocer el lado c y el área A de un triángulo equivale a conocer el lado c y la altura correspondiente h , ya que $A = \frac{1}{2}hc$. Con referencia a la figura 180 el problema consiste, por tanto, en determinar un punto R tal que la distancia del mismo a la recta PQ sea igual a la altura dada h , y de manera que la suma $a + b$ sea mínima. De la primera condición se deduce que R debe ser un punto de la paralela a PQ a la distancia h . La solución nos procura el teorema de Herón para el caso especial en que P y Q equidistan de L ; el triángulo pedido, PRQ , es isósceles.

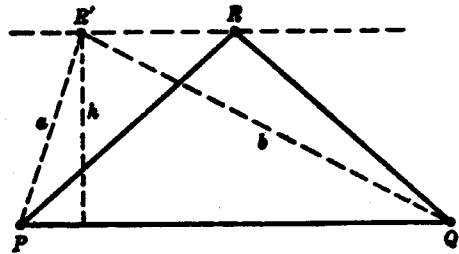


FIG. 180.—Triángulo del perímetro mínimo, dadas su área y su base.

b) De un triángulo se conocen el lado c y la suma $a + b$ de los otros dos lados; de todos los triángulos posibles, hállese el de área máxima. Éste no es otro que el problema inverso del *a)*, y la solución es nuevamente el triángulo isósceles para el cual $a = b$. Según

acabamos de demostrar, en este triángulo es mínimo el valor de $a + b$; es decir, en cualquier otro triángulo de base c y de igual área, es mayor el valor de $a + b$. Además, resulta evidente de *a*) que cualquier triángulo de base c y área mayor que la del triángulo isósceles tiene también mayor la suma de a y b . En consecuencia, cualquier otro triángulo que tenga los mismos valores para $a + b$ y c debe tener un área menor, de forma que el triángulo isósceles es el de área máxima, dados c y $a + b$.

4. Propiedades de las tangentes a la elipse y a la hipérbola. Propiedades extremales de las mismas.—El problema de Herón está relacionado con algunos teoremas geométricos importantes. Hemos demostrado que si R es un punto de L , tal que $PR + RQ$ es mínima, PR y RQ forman ángulos iguales con L . Llamaremos $2a$ a esa distancia total mínima. Designemos por p y q las distancias de un punto cualquiera del plano a P y Q , respectivamente, y consideremos el lugar geométrico de *todos* los puntos del plano, para los cuales, $p + q = 2a$. Este lugar es una elipse, de focos P y Q , y que pasa por el punto R de la recta L . Además, L debe ser tangente a la elipse en R . Si L cortase a la elipse en un punto distinto de R , debería existir un segmento de L

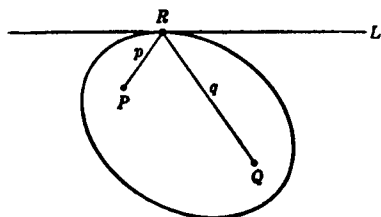


FIG. 181.—Propiedad de la tangente a la elipse.

interior a la elipse, y para cada punto del mismo, $p + q$ sería menor que $2a$, ya que es fácil ver que $p + q$ es menor que $2a$ para los puntos interiores a la elipse, y mayor para todo punto exterior. Puesto que sabemos que la desigualdad $p + q \geq 2a$ no se cumple para ningún otro punto de L , esta última hipótesis es imposible. De ahí que L deba ser tangente a la elipse en R . Pero como sabemos que PR y RQ forman ángulos iguales con L , hemos demostrado incidentalmente el siguiente teorema importante: Cualquier tangente a una elipse forma ángulos iguales con los radios vectores que unen el punto de tangencia a los focos.

El siguiente problema está íntimamente relacionado con la conclusión anterior: Dada una recta L y dos puntos P y Q , situados en lados opuestos de L (Fig. 182), hállese un punto R de L , tal que $|p - q|$, es decir, el valor absoluto de la *diferencia* de las distancias de P y Q a R sea *máximo*. (Supondremos que L no es la mediatriz de PQ , pues entonces, $p - q$ sería igual a cero para cualquier punto

El siguiente problema está íntimamente relacionado con la conclusión anterior: Dada una recta L y dos puntos P y Q , situados en lados opuestos de L (Fig. 182), hállese un punto R de L , tal que $|p - q|$, es decir, el valor absoluto de la *diferencia* de las distancias de P y Q a R sea *máximo*. (Supondremos que L no es la mediatriz de PQ , pues entonces, $p - q$ sería igual a cero para cualquier punto

R de L y el problema carecería de interés.) Para resolverlo, hallemos primero el simétrico de P respecto a L , obteniendo el punto P' , del mismo lado de L que Q . Para cualquier punto R' de L , se tiene: $p = R'P = R'P'$, $q = R'Q$. Puesto que R' , Q y P' pueden considerarse como los vértices de un triángulo, $|p - q| = |R'P' - R'Q|$ nunca será mayor que $P'Q$, pues la diferencia entre dos lados de un triángulo nunca excede al tercer lado. Si R' , P' y Q están sobre la misma recta, $|p - q|$ será igual a $P'Q$, como se deduce de la figura. En consecuencia, el punto R buscado es la intersección de L con la recta que une P con Q . Como en el caso anterior, es fácil ver que los ángulos que forman RP y RQ con L son iguales, ya que los triángulos RPR' y $RP'R'$ son congruentes.

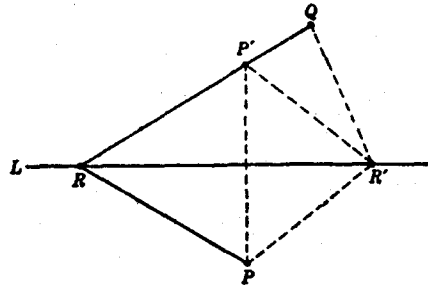


FIG. 182.— $|PR - QR| = \text{máximo}$.

Este problema está relacionado con una propiedad de la tangente a la hipérbola, en igual forma que el anterior lo estaba con la tangente a la elipse. Si la diferencia máxima $|PR - QR|$ tiene el

valor $2a$, cabe considerar el lugar geométrico de todos los puntos del plano para los cuales $p - q$ tiene el valor absoluto $2a$; es decir, la hipérbola de focos P y Q que pasa por el punto R . Es fácil ver que el valor absoluto de $p - q$ es menor que $2a$ en la región situada entre las dos ramas de la hipérbola y mayor que $2a$ en el lado de cada rama donde está situado

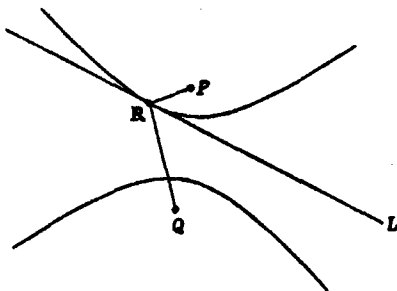


FIG. 183.—Propiedad de la tangente a la hipérbola.

el foco correspondiente. Por un razonamiento esencialmente idéntico al utilizado para la elipse, se deduce que L debe ser tangente a la hipérbola en R . De la situación de P o Q , esto es, de su mayor o menor distancia a L , depende que esta recta sea tangente a una u otra rama de la hipérbola; si P está más cerca, la rama que rodea P tocará a L , y lo mismo para Q (Fig. 183). Si P y Q equidistan de L , entonces ésta no tocará a ninguna de las dos ramas de la hi-

pérbola, sino que será una de las asíntotas de la curva. Este resultado es evidente si se observa que en tal caso la construcción precedente no proporcionará ningún punto R (a distancia finita), ya que la recta $P'Q$ es paralela a L .

Como en los casos anteriores, este razonamiento prueba el teorema bien conocido: la tangente a una hipérbola en cualquier punto de ella es bisectriz del ángulo subtendido en dicho punto por los focos.

Podrá parecer extraño que tengamos que resolver un problema de mínimo cuando P y Q se encuentran del mismo lado de L , mientras que, si están a distinto lado, se transforma en un problema de máximo. Esto es natural, por la siguiente causa: en el primer problema, cada una de las distancias p y q , y, por tanto, su suma, llega a exceder a cualquier límite prefijado, a medida que nos movemos a lo largo de L , en cada una de las dos direcciones posibles. De ahí que sea imposible encontrar un valor máximo para $p + q$, siendo un problema de *mínimo* la única posibilidad. Es enteramente distinto lo que ocurre en el segundo caso, cuando P y Q se encuentran a distinto lado de L . Aquí, para evitar confusiones, debemos distinguir entre el valor de la diferencia $p - q$, su opuesto $q - p$, y el valor absoluto $|p - q|$, siendo este último el que puede ser *máximo*. Se entenderá mejor esto si hacemos que el punto R se mueva a lo largo de L , adoptando distintas posiciones R_1, R_2, R_3, \dots . Existe un punto para el cual la diferencia $p - q$ es cero: la intersección de la mediatriz de PQ con L . Por consiguiente, este punto corresponde a un mínimo del valor absoluto $|p - q|$. Pero, a un lado de este punto p es mayor que q , y en el otro, menor, de donde resulta que $p - q$ es positiva a un lado de ese punto y negativa al otro. En consecuencia, la propia diferencia $p - q$ no es ni máxima ni mínima en el punto para el cual $|p - q| = 0$. Sin embargo, el punto que hace máximo a $|p - q|$ es realmente un valor extremo de $p - q$. Si $p > q$, se tendrá un máximo para $p - q$; si $q > p$ resultará un máximo para $q - p$; o sea, un mínimo para $p - q$. El que exista máximo o mínimo para $p - q$ queda determinado por la posición de los dos puntos dados, P y Q , respecto a la recta L .

Hemos visto que no existe solución para el problema de máximo si los puntos P y Q equidistan de L , pues entonces, como se observa en la figura 182, $P'Q$ es paralela a L . Esto corresponde al hecho de que la cantidad $|p - q|$ tiende a un límite, cuando R tiende a infinito a lo largo de L , en cualquiera de las dos direcciones posibles. Este valor límite es la longitud de la proyección ortogonal s de PQ sobre L (el lector puede demostrarlo como ejercicio). Si P y Q equi-

distan de L , entonces $|p - q|$ será siempre menor que ese límite, no pudiendo existir máximo, puesto que, para todo punto R , se puede encontrar otro más alejado y tal que el valor correspondiente de $|p - q|$ sea mayor, pero todavía inferior a s .

***5. Distancias extremales a una curva dada.**—Determinaremos, en primer lugar, las distancias *mínima* y *máxima* de un punto P a una curva dada C . Para mayor sencillez, supongamos que C es una curva simple cerrada (Fig. 184) con tangente en cada punto. (Aceptamos aquí el concepto intuitivo de tangente a una curva, el cual será analizado en el próximo capítulo.) La respuesta es muy sencilla: un punto R , situado en la curva C , para el cual la distancia PR sea máxima o mínima, debe ser tal que la recta PR sea perpendicular a la tangente a C en R ; en otras palabras, PR debe ser perpendicular a C . La demostración es la siguiente: la circunferencia de centro P , que pasa por R , debe ser tangente a la curva. Pues si R es el punto de distancia mínima, C ha de encontrarse por completo fuera del círculo y, en consecuencia, no puede cortar a su circunferencia en R ; por otra parte, si R es el punto de distancia máxima, C debe ser interior a la circunferencia, por lo que tampoco en este caso puede cortarla en R . (Esto se deduce de un hecho evidente: la distancia de cualquier punto a P es menor que

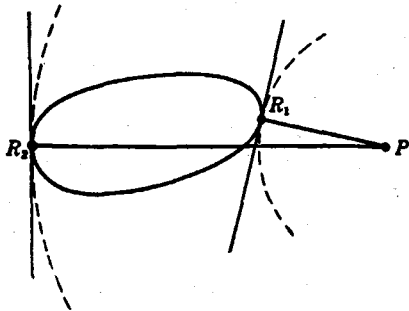


Fig. 184. —Distancias extremales a una curva.

RP si el punto es interior al círculo, y mayor que RP si es exterior.) De todo ello resulta que la circunferencia y la curva C se tocarán y tendrán una tangente común en R . Ahora bien: por ser la recta PR un radio de la circunferencia, será perpendicular a su tangente en R y, en consecuencia, perpendicular a C en R .

Resulta, además, que el diámetro de una curva cerrada C , es decir, su cuerda máxima, debe ser perpendicular a C en ambos extremos. La demostración queda a cargo del lector, como ejercicio. Una afirmación similar puede formularse y demostrarse para tres dimensiones.

Ejercicio: Demuéstrese que los segmentos máximo y mínimo, que unen dos curvas cerradas que no se cortan, son perpendiculares a las mismas en sus puntos extremos.

Pueden generalizarse ahora los problemas del número anterior, referentes a la suma o diferencia de distancias. En lugar de una recta L

consideremos una curva simple cerrada C , con tangente en cada punto, y dos puntos, P y Q , no situados sobre ella. Deseamos caracterizar los puntos de C , para los cuales la suma $p + q$ y la diferencia $p - q$ toman valores extremos, designando por p y q las distancias de un punto cualquiera de C a P y Q , respectivamente. No es posible utilizar aquí las sencillas construcciones de simetría de que nos servimos cuando C era una recta, pero podemos utilizar las propiedades de la elipse y de la hipérbola para resolver estos problemas. Puesto que C es una curva cerrada y no una recta indefinida, ahora tiene sentido plantearse ambos problemas, el de máximo y el de mínimo, pues puede suponerse que $p + q$ y $p - q$ toman dos valores, máximo y mínimo, sobre cualquier arco finito de curva, en particular sobre una curva cerrada (véanse págs. 376 y siguientes).

En el caso de la suma, $p + q$, supongamos que R es el punto de C para el cual $p + q$ es máximo y sea $2a$ el valor de $p + q$ en R . Consideremos la elipse de focos P y Q , lugar geométrico de todos los puntos tales que $p + q = 2a$. Esta elipse ha de ser tangente a C en R (la demostración queda a cargo del lector, como ejercicio). Pero hemos visto ya que las rectas PR y QR forman ángulos iguales con la elipse en R , y como ésta es tangente a C en R , las rectas PR y QR deben formar también ángulos iguales con C en R . Si $p + q$ es mínimo para R , se ve, de forma análoga, que PR y QR forman ángulos iguales con C en R . Tenemos así este teorema: Se da una curva cerrada C y dos puntos P y Q situados del mismo lado de C ; en un punto R de C , en el cual la suma $p + q$ toma su valor máximo o mínimo, las rectas PR y QR forman ángulos iguales con la curva C (es decir, con su tangente) en R .

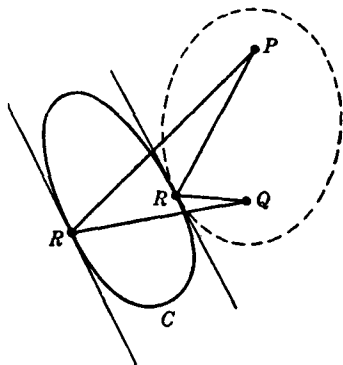


FIG. 185.—Valores máximo y mínimo de $PR + QR$.

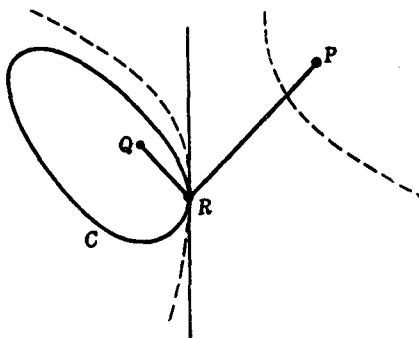


FIG. 186.—Mínimo de $PR - QR$.

Si P es interior a C , y Q exterior, el teorema sigue subsistiendo para el valor máximo de $p + q$, pero ya no se cumple para el mínimo, puesto que la elipse degenera en un segmento de recta.

Por un proceso análogo, utilizando las propiedades de la hipérbola en lugar de las de la elipse, el lector podrá demostrar el siguiente teorema: Dada una curva cerrada C y dos puntos P y Q , separados por C , existe un punto R de C en el cual $p - q$ toma un valor máximo o mínimo, y las rectas correspondientes PR y QR forman ángulos iguales con C . Debemos insistir una vez más en que el problema es distinto para una curva cerrada que para una línea indefinida, puesto que en este último caso se buscaba el máximo del valor absoluto $|p - q|$, mientras que ahora existe un máximo (y también un mínimo) de $p - q$.

*II. UN PRINCIPIO GENERAL ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE VALORES EXTREMOS

1. El principio.—Los problemas precedentes son ejemplos de una cuestión general, para cuya mejor formulación conviene utilizar el lenguaje analítico. En el problema de hallar los valores extremos de $p + q$, representemos por x e y las coordenadas del punto R ; mediante x_1, y_1 , las del punto fijo P , y por x_2, y_2 , las de Q , con lo que

$$p = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad q = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2},$$

y el problema queda reducido al de determinar los valores extremos de la función

$$f(x, y) = p + q.$$

Esta función es continua en todo el plano, pero el punto cuyas coordenadas son x, y ha de estar situado sobre la curva C , que vendrá definida por una ecuación $g(x, y) = 0$; p. ej., $x^2 + y^2 - 1 = 0$, si se trata de la circunferencia unidad. El problema consiste ahora en encontrar los valores extremos de $f(x, y)$, cuando x e y están sujetos además a la condición $g(x, y) = 0$. En lo que sigue, estudiaremos este tipo general de problema.

Para caracterizar las soluciones, consideremos la familia de curvas definidas por la ecuación $f(x, y) = c$, donde c puede tomar cualquier valor, el mismo para todos los puntos de cada curva de la familia. Supongamos que por cada punto del plano pasa una, y sólo una, de las curvas de la familia $f(x, y) = c$; al menos, si nos limitamos a los puntos situados en la proximidad de la curva C . Entonces, al

variar c , la curva $f(x, y) = c$ barrerá una parte del plano, sin pasar dos veces por un mismo punto de esta región. (Las curvas $x^2 - y^2 = c$, $x + y = c$ y $x = c$ son familias de ese tipo.) En particular, una curva

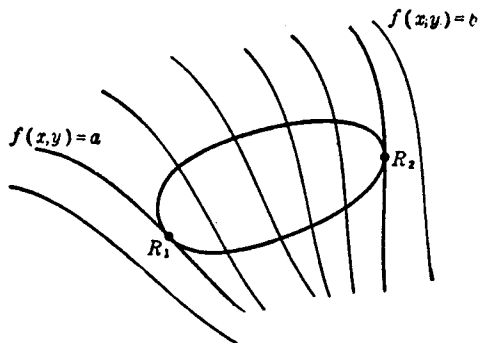


FIG. 187.—Valores extremos de una función sobre una curva.

de la familia pasará por R_1 , donde $f(x, y)$ toma su valor máximo en C , y otra pasará por el punto R_2 , donde $f(x, y)$ toma su valor mínimo. Llamemos a al máximo y b al mínimo. A un lado de la curva $f(x, y) = a$, el valor de $f(x, y)$ será menor que a , y del otro lado, mayor que a . Puesto que $f(x, y) \leq a$ en C , ésta debe encontrarse enteramente a

un lado de la curva $f(x, y) = a$, por lo que debe ser tangente a ella en R_1 . Análogamente, C debe ser tangente a la curva $f(x, y) = b$ en R_2 . Tenemos así el teorema general: *si en un punto R de una curva C , una función $f(x, y)$ tiene un valor extremo a , la curva $f(x, y) = a$ es tangente a C en R .*

2. Ejemplos.—Es fácil ver que los resultados anteriores son casos especiales de este teorema general. Si $p + q$ ha de tomar un valor extremo, la función $f(x, y)$ es $p + q$, y las curvas $f(x, y) = c$ son elipses homofocales, de focos P y Q . Como prevé el teorema general, las elipses que pasan por los puntos de C , donde $f(x, y)$ toma sus valores

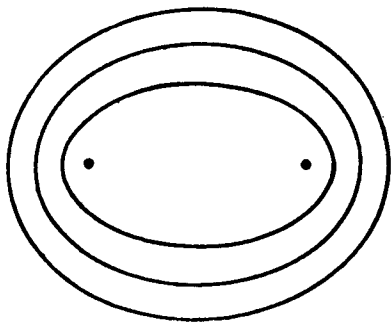


FIG. 188.—Elipses homofocales.

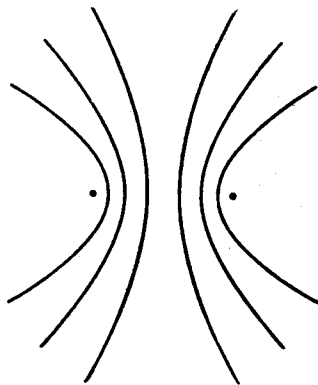


FIG. 189.—Hipérbolas homofocales.

extremos, serán tangentes a C en dichos puntos. Cuando se buscan los valores extremos de $p - q$, la función $f(x, y)$ es $p - q$, y las curvas $f(x, y) = c$ son hipérbolas homofocales, de focos P y Q , y las hipérbolas que pasan por los puntos que dan valores extremos a $f(x, y)$ son tangentes a C .

Otro ejemplo es el siguiente: dado un segmento PQ y una recta L , que no lo corta, ¿desde qué punto de L subtenderá PQ un ángulo máximo?

La función cuyo máximo se busca es el ángulo θ que forman los

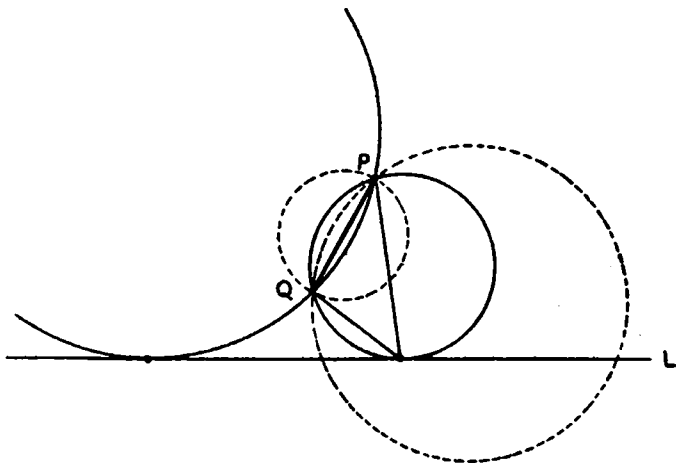


FIG. 190.—Punto de L , desde el que se ve bajo ángulo máximo el segmento PQ .

extremos de PQ con diferentes puntos de L . El ángulo formado por PQ con cualquier punto R del plano es una función $\theta = f(x, y)$ de las coordenadas de R . Por geometría elemental, sabemos que la familia de curvas $\theta = f(x, y) = c$ es el haz de circunferencias que pasan por P y Q , puesto que una cuerda de un círculo subtiende el mismo ángulo para todos los puntos de la circunferencia del mismo lado de la cuerda. Como puede verse en la figura 190, dos de esas circunferencias serán en general tangentes a L , estando sus centros a distinto lado de PQ . Uno de esos puntos de tangencia proporciona el máximo absoluto de θ , mientras que el otro corresponde a un máximo «relativo» (es decir, el valor de θ será, en un cierto entorno de este punto, menor que en el propio punto). El mayor de ambos máximos, el máximo absoluto, está dado por el punto de tangencia que se encuentra en el ángulo agudo formado por la prolongación de PQ y L ; y el menor, por el punto situado en el ángulo obtuso formado

por estas dos rectas. (El punto donde la prolongación de PQ corta a L proporciona el valor mínimo de θ , o sea, cero.)

Para generalizar este problema, podemos reemplazar L por una curva C y tratar de determinar el punto R de C , tal que un segmento dado PQ (que no corta a C) subtienda un ángulo máximo o mínimo. También en este caso la circunferencia que pasa por P , Q y R debe ser tangente a C en R .

III. LOS PUNTOS ESTACIONARIOS Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL

1. **Extremos y puntos estacionarios.**—Hasta aquí no hemos hecho uso de la técnica del cálculo diferencial. En realidad, nuestros métodos elementales son mucho más sencillos y directos que los del cálculo. Por regla general, en el pensamiento científico, es mejor considerar los rasgos peculiares de un problema que fiarse exclusivamente de los métodos generales, aunque los esfuerzos individuales deban guiarse siempre por un principio que aclare el significado de los procedimientos especiales utilizados. Éste es precisamente el papel que desempeña el cálculo diferencial en los problemas de máximos y mínimos. El ansia moderna por la generalización representa sólo un aspecto de los hechos, pues la vitalidad de la matemática depende primordialmente del matiz individual de los problemas y métodos.

En su desarrollo histórico, el cálculo diferencial fué intensamente influido por los problemas particulares de máximos y mínimos. La conexión entre éstos y el cálculo diferencial se produce de la siguiente manera. En el capítulo VIII haremos un estudio detallado de la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$, y de su significado geométrico. En pocas palabras, la derivada $f'(x)$ es la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x, y) . Geométricamente, es evidente que en un máximo o mínimo de una curva continua $y = f(x)$, la tangente a la misma debe ser horizontal; es decir, su pendiente igual a cero. Así se obtiene la condición $f'(x) = 0$, que han de cumplir los valores extremos de $f(x)$.

Para comprender lo que significa la anulación de $f'(x)$, examinemos la curva de la figura 191. Existen cinco puntos A , B , C , D y E en los cuales la tangente a la curva es horizontal; designemos por a , b , c , d y e los valores de $f(x)$ en dichos puntos. El máximo de $f(x)$ en el intervalo representado se encuentra en D , y el mínimo, en A . El punto B representa también un máximo en el sentido de que para todos los puntos *en la proximidad inmediata de B*, $f(x)$ es menor que b , aunque $f(x)$ es mayor que b para los puntos que se encuentran cerca

de D . Por esta razón, se dice que B es un *máximo relativo* de $f(x)$ mientras que D es el *máximo absoluto*. Análogamente, C representa un mínimo relativo, y A , el mínimo absoluto. Finalmente, en E no tiene $f(x)$ ni máximo ni mínimo, aunque $f'(x) = 0$. De ahí se deduce que la anulación de $f'(x)$ es una condición *necesaria*, pero no *suficiente*, para que exista un valor extremo de una función derivable

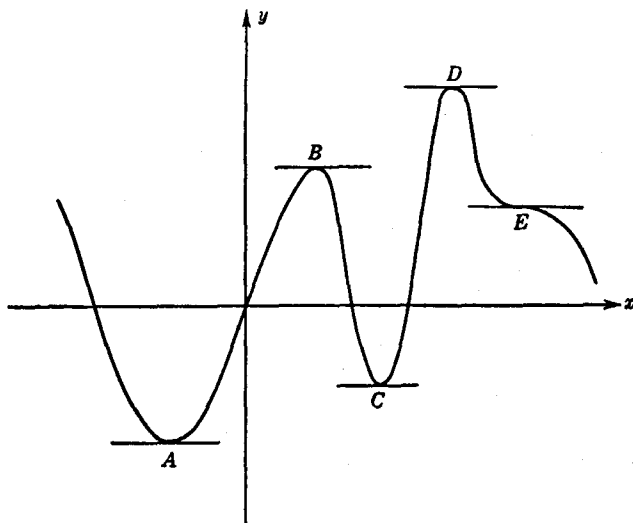


FIG. 191. — Puntos estacionarios de una función.

$f(x)$; en otras palabras, para cualquier valor extremo, relativo o absoluto, debe ser $f'(x) = 0$; pero no en todo punto donde se anula la derivada existe necesariamente un valor extremo de la función. Un punto donde se anula la derivada se llama punto *estacionario*, sea valor extremo o no. Mediante un análisis más profundo, se pueden establecer condiciones más o menos complicadas, en las que se tienen en cuenta las derivadas de orden superior de $f(x)$, que caracterizan por completo los máximos, mínimos y otros puntos estacionarios.

2. Máximos y mínimos de las funciones de varias variables. Puntos de ensilladura.—Existen problemas de máximos y mínimos que no pueden expresarse por medio de una función $f(x)$ de una sola variable. Entre ellos, el más sencillo es el de hallar los extremos de una función $z = f(x, y)$ de dos variables.

Podemos representar $f(x, y)$ por la cota z de una superficie sobre el plano x, y , lo que permite una interpretación, por decirlo así, de geografía de montaña. Un máximo de $f(x, y)$ corresponde a un pico;

un mínimo, al fondo de una depresión o de un lago. En ambos casos, si la superficie no es accidentada, su plano tangente será horizontal. Pero existen otros puntos, además de los picos y de las depresiones, en los cuales el plano tangente es horizontal: son los puntos que representan los pasos de vertiente o puertos, que vamos a examinar con más detalle. Consideremos, como en la figura 192, dos montañas, *A* y *B*, que forman parte de una cordillera y dos puntos, *C* y *D*, a diferentes lados de la misma; supongamos que se desea ir de *C* a *D*. Veamos primero los caminos que conducen de *C* a *D*, obtenidos cortando la superficie por un plano que pasa por ambos puntos; cada uno de estos caminos tendrá un punto más alto. Variando la posición del plano cambia el camino, y existirá uno, *CD*, para el cual la altitud

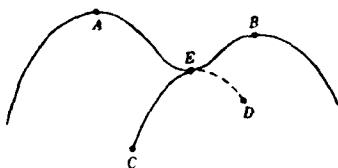


FIG. 192. — Puerto o paso de montaña.

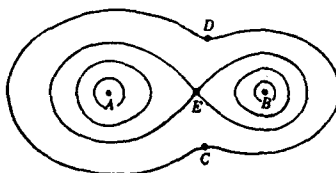


FIG. 193. — Su correspondiente mapa de curvas de nivel.

de su *punto más elevado* es *mínima*. El punto *E* de máxima altitud de ese camino es un paso de montaña o puerto, que en lenguaje matemático llamaremos *punto de ensilladura*. Es evidente que *E* no es ni máximo ni mínimo, puesto que tan próximos a él como queramos, podemos encontrar puntos que son más altos o más bajos que *E*. En lugar de limitarnos a considerar los caminos planos, podemos tener en cuenta otros cualesquiera, prescindiendo de esa restricción. Sin embargo, la caracterización del punto *E* sigue siendo la misma.

Análogamente, si queremos pasar del pico *A* al *B*, cualquier camino que se considere tendrá un punto de mínima altitud; si consideramos otra vez exclusivamente secciones planas, existirá un recorrido *AB* tal que su punto más bajo sea el más elevado de todos, por lo que, para esta trayectoria, el mínimo se encuentra de nuevo en el punto *E* anterior. Este punto de ensilladura *E* tiene la propiedad de ser el mínimo superior o el máximo inferior, es decir, es un *maxi-mínimo* o un *mini-máximo*. El plano tangente en *E* es horizontal; como *E* es el mínimo de *AB*, la tangente *AB* en *E* debe ser horizontal, y, análogamente, puesto que *E* es el máximo de *CD*, la tangente a *CD* en *E* ha de serlo también. En consecuencia, el plano tangente, que está determinado por esas rectas, es horizontal. Encontramos así tres tipos

diferentes de puntos, cuyos planos tangentes son horizontales; máximos, mínimos y puntos de ensilladura, a los cuales corresponden los diferentes tipos de valores estacionarios de $f(x, y)$.

Otro método de representar una función $f(x, y)$ consiste en dibujar curvas de nivel, tales como las que se utilizan en los mapas altimétricos (véase pág. 298). Una *curva de nivel* es una curva del plano x, y , a lo largo de la cual la función $f(x, y)$ tiene un valor constante; es decir, las curvas de nivel coinciden con las curvas de la familia $f(x, y) = c$. Por un punto ordinario del plano pasa una curva de nivel y sólo una, mientras que un máximo o mínimo está rodeado por curvas de nivel cada vez más cerradas, y en un punto de ensilladura se cruzan varias de ellas. En la figura 193 se han dibujado las curvas de nivel correspondientes al esquema de la figura 192, siendo evidente la propiedad del punto E de ser maxi-mínimo: cualquier camino que una A con B y que no pase por E ha de atravesar una región en la cual $f(x, y) < f(E)$, mientras que el camino AEB de la figura 192 tiene un mínimo en E . De la misma manera, se ve que el valor de $f(x, y)$ en E es el menor máximo para todos los caminos que unen C con D .

3. Puntos mínimos y topología.—Existe una íntima relación entre la teoría general de los puntos estacionarios y los conceptos topológicos. Sólo podemos dar aquí una indicación muy breve de esas ideas, refiriéndonos a un ejemplo muy sencillo.

Consideremos un paisaje montañoso en una isla (figura 194) en forma de anillo, con sus dos contornos C y C' . Si representamos la altura sobre el nivel del mar por $u = f(x, y)$, con $f(x, y) = 0$ en C y C' , y $f(x, y) > 0$ en el interior de la isla, debe existir al menos un

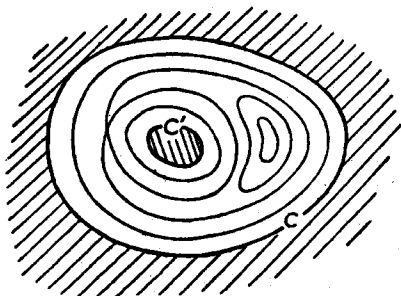


FIG. 194.—Puntos estacionarios en una región doblemente conexa.

paso o puerto en ésta, según aparece en la figura 194, representado por el punto donde se cruzan las líneas de nivel. Intuitivamente es posible ver esto si se intenta ir de C a C' de modo que el camino no pase por ningún punto de altitud mayor que la necesaria. Cada camino de C a C' debe tener un punto de altura máxima, y si elegimos el camino cuyo punto de máxima altitud sea lo más bajo posible, el punto más alto de este recorrido es un punto de ensilladura de $u = f(x, y)$. (Existe una excepción trivial, cuando un plano horizontal es tan-

gente a la cresta montañosa alrededor de todo el anillo.) Para un dominio limitado por p curvas, deben existir, en general, $p - 1$ puntos estacionarios del tipo estudiado. Marston Morse ha descubierto que esas mismas relaciones son válidas para mayor número de dimensiones, donde existe más variedad de posibilidades topológicas y de tipos de puntos estacionarios. Esas relaciones constituyen la base de la moderna teoría de los puntos estacionarios.

4. Distancia de un punto a una superficie.—Para la distancia entre un punto P y una curva cerrada existen (al menos) dos valores estacionarios: un máximo y un mínimo. No surge ningún hecho nuevo si intentamos generalizar este resultado a tres dimensiones, en tanto que consideremos una superficie C topológicamente idéntica a una

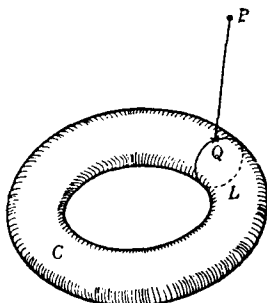


FIG. 195.

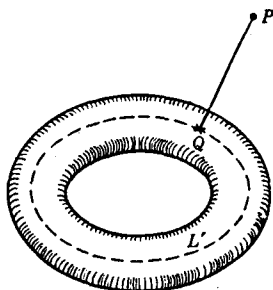


FIG. 196.

esfera; p. ej., un elipsoide. Pero se presenta una situación distinta si la superficie es de género superior; p. ej., un toro. Existe siempre una distancia máxima y otra mínima, de P al toro C , siendo ambos segmentos perpendiculares a C ; pero, además, encontramos valores extremos de diferentes tipos, que son mínimos de máximos o máximos de mínimos. Para ello tracemos en el toro una «meridiana» cerrada, la circunferencia L (Fig. 195), tratando de encontrar el punto Q de L que se encuentre más próximo a P . Después, trasladamos L de modo que la distancia PQ sea: *a*) un mínimo (este Q es simplemente el punto de C que se encuentra más cerca de P); *b*) un máximo (éste nos proporciona otro punto estacionario). También podemos determinar el punto de L que se encuentra más alejado de P , determinando después L de modo que esta distancia máxima sea: *c*) un máximo (que se alcanzará en el punto C más alejado de P); *d*) un mínimo. Obtenemos así cuatro valores estacionarios diferentes de la distancia.

Ejercicio: Repítase el razonamiento anterior para otro tipo L' de curva cerrada sobre C que no pueda reducirse a un punto, como en la figura 196.

IV. EL PROBLEMA DEL TRIÁNGULO DE SCHWARZ

1. **La demostración de Schwarz.**—Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) fué un notable matemático de la Universidad de Berlín y uno de los que más han contribuido a la moderna teoría de funciones y al análisis. No desdeñaba ocuparse de asuntos elementales y una de sus memorias trata del siguiente problema: dado un triángulo acutángulo, inscribirle otro de perímetro mínimo. (Entendemos por triángulo inscrito cualquiera cuyos vértices se encuentran respectivamente en cada uno de los lados del primer triángulo.) Veremos que existe exactamente un triángulo que cumple dicho requisito y que sus vértices coinciden con los pies de las alturas del dado. Le llamaremos *triángulo órtico*.

Schwarz demostró esta propiedad del triángulo órtico de tener el perímetro mínimo mediante el método de reflexión, sirviéndose además del siguiente teorema de geometría elemental (Fig. 197): en cada uno de los vértices P, Q, R los dos lados correspondientes del triángulo órtico forman ángulos iguales con los del primitivo; estos ángulos son iguales al del vértice opuesto del triángulo original; p. ej., los ángulos ARQ y BRP son ambos iguales al C , etc.

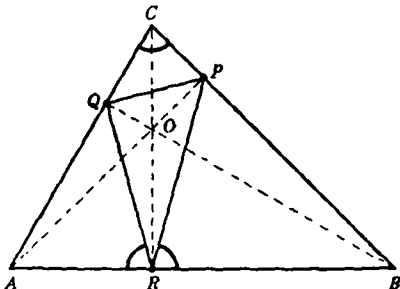


FIG. 197.—Triángulo órtico del ABC ; se indican los ángulos que son iguales.

Para demostrar este teorema preliminar, observemos que $OPBR$ es un cuadrilátero inscriptible, puesto que OPB y ORB son ángulos rectos. En consecuencia, $\widehat{PBO} = \widehat{PRO}$, ya que subtenden el mismo arco \widehat{PO} en la circunferencia circunscrita; pero \widehat{PBO} es complementario de \widehat{C} , por ser CBQ un triángulo rectángulo, y \widehat{PRO} es complementario de \widehat{PRB} . En consecuencia, este último es igual a \widehat{C} . De la misma manera, utilizando el cuadrilátero $QORA$, veríamos que $\widehat{QRA} = \widehat{C}$, etc.

Este resultado nos permite enunciar la siguiente propiedad del triángulo órtico: dado que, p. ej., $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$, la simétrica de RQ respecto a AC es la prolongación de PQ , y viceversa; lo mismo sucede para los otros lados.

Demostraremos ahora la propiedad de mínimo del triángulo órtico. En el triángulo ABC consideremos, además del órtico, cualquier otro triángulo inscrito, UVW . Reflejemos toda la figura primero sobre el lado AC de ABC ; después repitamos la operación con el triángulo resultante sobre su lado AB , después sobre BC , de nuevo, sobre AC y,

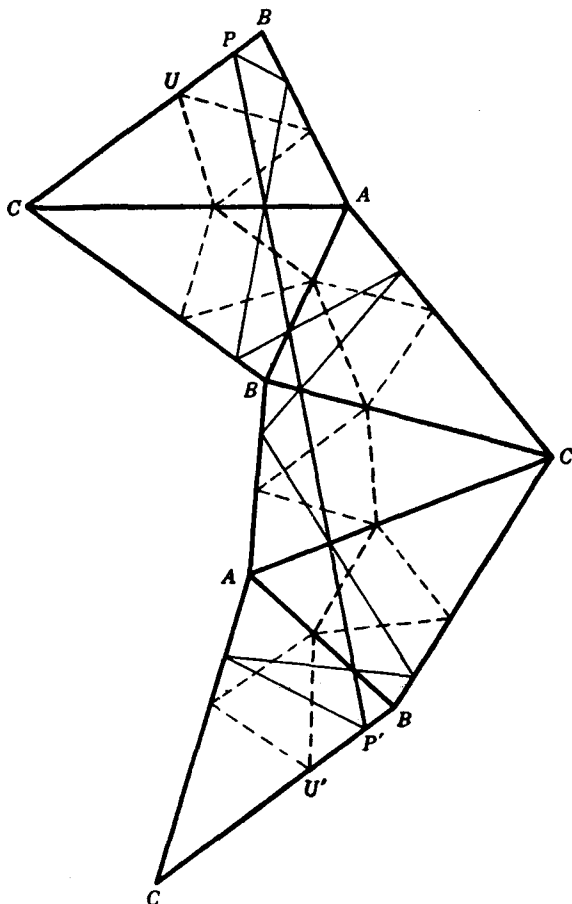


FIG. 198.—Demostración de Schwarz de que el triángulo órtico es el de perímetro mínimo.

finalmente, sobre AB . De esta manera obtenemos en total seis triángulos congruentes. El lado BC del último triángulo es paralelo al primitivo lado BC , pues, en la primera simetría, BC gira en el sentido de las agujas de un reloj un ángulo $2C$; después, en el mismo sen-

tido, un ángulo $2B$; en la tercera simetría no experimenta ningún cambio; en la cuarta, gira un ángulo $2C$ en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y en la quinta, un ángulo $2B$ en igual sentido, de donde resulta que el ángulo total girado es cero.

Debido a esta propiedad del triángulo órtico, el segmento PP' es igual a dos veces el perímetro de dicho triángulo; pues PP' se compone de seis trozos que son, respectivamente, iguales al primero, segundo y tercer lados del triángulo, apareciendo cada uno dos veces. Análogamente, la línea quebrada de U a U' es igual al doble del perímetro del otro triángulo inscrito y no es más corta que el segmento UU' . Puesto que éste es paralelo a PP' , la quebrada de U

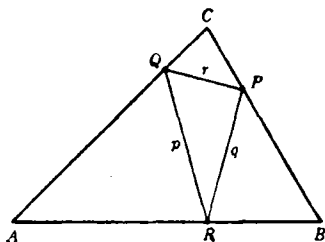


FIG. 199.

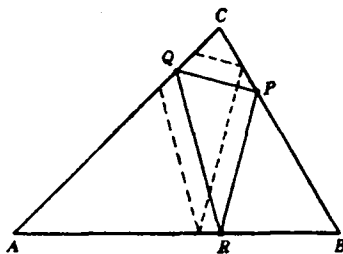


FIG. 200.

a U' no es más corta que PP' ; luego el perímetro del triángulo órtico es el menor posible de todos los triángulos inscritos, según se pretendía demostrar. Así hemos deducido al mismo tiempo que existe un mínimo y que está dado por el triángulo órtico. Después demostraremos que no existe ningún otro triángulo de perímetro igual al órtico.

2. Otra demostración.—Tal vez la solución más sencilla del teorema de Schwarz sea la que se da a continuación, basada en el teorema antes demostrado de que la suma de las distancias de dos puntos dados, P y Q , a una recta L , es mínima para un punto R de L tal que PR y QR forman ángulos iguales con L , siempre que P y Q se hallen al mismo lado de L y ninguno de ellos esté sobre la recta. Supongamos que el triángulo PQR , inscrito en el ABC , es la solución del problema de mínimo enunciado. Entonces R debe ser un punto del lado AB tal que $p + q$ sea mínimo y, por tanto, los ángulos ARQ y BRP deben ser iguales. Análogamente, se tendrá: $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$, $\widehat{BPR} = \widehat{CPQ}$. Así, pues, si existe el triángulo de perímetro mínimo, ha de verificarse además la igualdad de ángulos utilizada en la demostración de Schwarz. Queda por probar que el único triángulo que

posee tal propiedad es el órtico. Además, puesto que en el teorema en que se basa esta demostración se supone que P y Q no están sobre la recta AB , el razonamiento deja de ser válido cuando uno de los puntos P , Q o R es un vértice del triángulo primitivo (en cuyo caso, el triángulo de perímetro mínimo degeneraría en el doble de la altura correspondiente). Para completar la demostración debemos probar que el perímetro del triángulo órtico es menor que el doble de cualquiera de las alturas.

Para resolver el primer punto observemos que si un triángulo inscrito tiene la propiedad antes mencionada, los ángulos en los vértices P , Q y R deben ser iguales a \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , respectivamente. Pues si suponemos, p. ej., $\widehat{ARQ} = \hat{C} + \delta$, como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , el ángulo en Q debe ser igual a $B - \delta$ y el ángulo en P , igual a $A - \delta$,

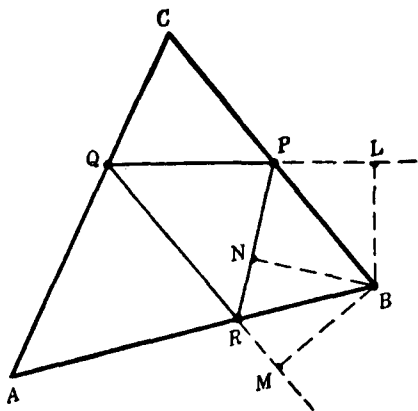


FIG. 201.

para que los ángulos de los triángulos ARQ y BRP den sumas iguales a 180° . Pero la suma de los ángulos del triángulo CPQ es igual a $A - \delta + B - \delta + C = 180^\circ - 2\delta$, y como esta suma ha de ser igual a 180° , necesariamente debe ser $\delta = 0$. Hemos visto ya que el triángulo órtico tiene esta propiedad de la igualdad de ángulos. Cualquier otro triángulo que posea la misma propiedad habrá de tener sus lados pa-

raalelos a los correspondientes del triángulo órtico; en otras palabras, sería semejante a él y estaría orientado de la misma manera. El lector demostrará que en un triángulo dado no puede inscribirse otro triángulo cumpliendo tal requisito (Fig. 200).

Finalmente, demostraremos que el perímetro del triángulo órtico es menor que el doble de cualquiera de las alturas, siempre que los ángulos del triángulo primitivo sean todos agudos. Prolonguemos los lados QP y QR y tracemos las perpendiculares desde B a QP , QR y PR , obteniendo así los puntos L , M y N . Entonces, QL y QM serán, respectivamente, las proyecciones de la altura QB sobre QP y QR . En consecuencia, $QL + QM < 2QB$. Pero $QL + QM$ es igual a p ,

perímetro del triángulo órtico, pues los triángulos MRB y NRB son congruentes, por tener iguales los ángulos MRB y NRB y ser rectos los ángulos M y N . De aquí se deduce que $RM = RN$; en consecuencia, $QM = QR + RN$. De la misma manera vemos que $PN = PL$, por lo que $QL = QP + PN$. Tenemos, por tanto, $QL + QM = QP + QR + PN + NR = QP + QR + PR = p$. Pero como hemos demostrado ya que $2QB > QL + QM$, resulta que p es menor que el doble de la altura QB . Con el mismo razonamiento puede demostrarse que p es menor que el doble de cualquier otra altura, con lo cual queda completamente establecida la propiedad de mínimo del triángulo órtico.

Además, la construcción precedente permite calcular directamente p . Sabemos que los ángulos PQC y RQA son iguales a B , por lo que $\widehat{PQB} = \widehat{RQB} = 90^\circ - \widehat{B}$, o sea: $\cos(\widehat{PQB}) = \sin \widehat{B}$. En consecuencia, por trigonometría elemental, se deduce que $QM = QL = QB \sin B$ y $p = 2QB \sin B$. De igual forma se demuestra que $p = 2PA \sin A = 2RC \sin C$. También por trigonometría sabemos que $RC = a \sin B = b \sin A$, etc., de donde resulta: $p = 2a \sin B \sin C = 2b \sin C \sin A = 2c \sin A \sin B$. Finalmente, puesto que $a = 2r \sin A$, $b = 2r \sin B$, $c = 2r \sin C$, siendo r el radio del círculo circunscrito, obtenemos la expresión simétrica $p = 4r \sin A \sin B \sin C$.

3. Triángulos obtusángulos.—En las dos demostraciones anteriores, se ha supuesto que los ángulos A , B y C eran agudos. Si, p. ej., C es obtuso (Fig. 202), los puntos P y Q se encontrarán fuera del triángulo.

En consecuencia, no puede ya decirse estrictamente que el triángulo órtico esté inscrito en el triángulo, a menos que entendamos por triángulo inscrito aquel cuyos vértices se encuentren sobre los lados o sus prolongaciones. En todo caso, el perímetro del triángulo órtico ya no es mínimo, puesto que

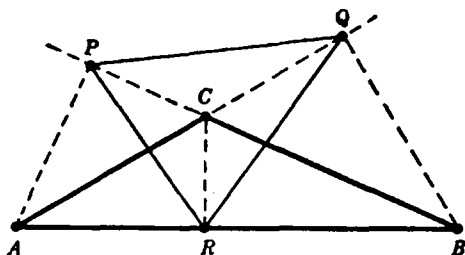


Fig. 202.—Triángulo órtico de un triángulo obtusángulo.

$PR > CR$ y $QR > CR$, de donde se deduce que $p = PR + QR + PQ > 2CR$. Puesto que del razonamiento de la primera parte de la demostración anterior se desprendía que el perímetro mínimo, si no estaba dado por el triángulo órtico, debía ser igual al doble de una de las alturas, concluimos que en los triángulos obtusángulos, el «triángulo inscrito» de perímetro mínimo es la altura menor contada

dos veces, aunque no sea un triángulo propiamente dicho. Además, es posible encontrar un verdadero triángulo cuyo perímetro difiera tan poco como queramos del doble de la altura. Para el caso límite, el triángulo rectángulo, coinciden las dos soluciones: el doble de la altura menor y el triángulo órtico.

No podemos entrar a discutir aquí la interesante cuestión de saber si el triángulo órtico posee propiedades extremales para los triángulos obtusángulos. Nos limitaremos sólo a decir que el triángulo órtico nos proporciona, no un mínimo para la suma de los lados $p + q + r$, sino un valor estacionario de tipo mini-máximo para la expresión $p + q - r$, donde r es el lado del triángulo inscrito opuesto al ángulo obtuso.

4. Triángulos formados por rayos luminosos.—Si el triángulo ABC representa una cámara cuyas paredes pueden reflejar la luz, el triángulo órtico es la única trayectoria luminosa triangular posible. No

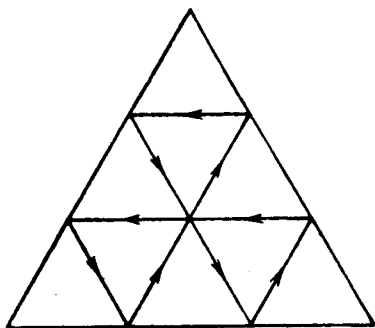


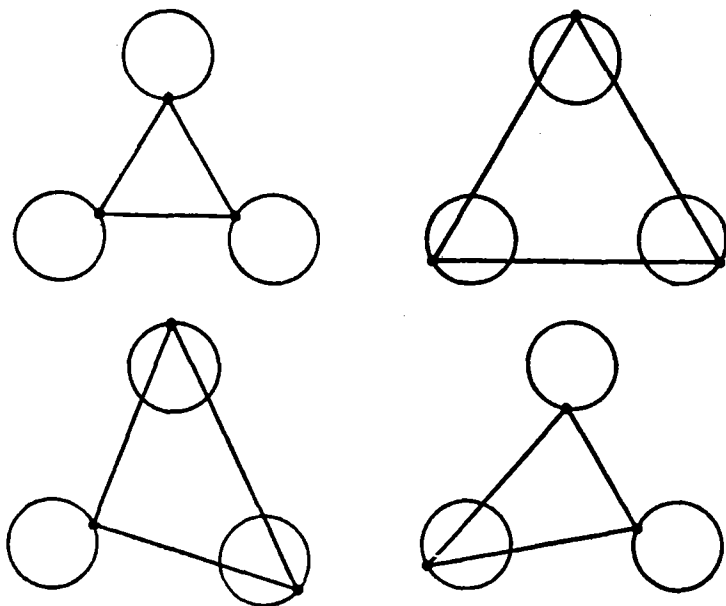
FIG. 203. — Trayectoria luminosa en el interior de un espejo triangular.

se excluyen otras trayectorias poligonales, según muestra la figura 203, pero el triángulo órtico es la única poligonal de tres lados.

Podemos generalizar este problema preguntándonos cuáles son los «triángulos luminosos» posibles en un dominio arbitrario limitado por una o varias curvas continuas; p. ej., deseamos encontrar los triángulos con vértices situados sobre las curvas del contorno y tales que cada dos lados adyacentes formen el mismo ángulo con la curva.

Según hemos visto en la página 342, la igualdad de los ángulos es condición necesaria para que exista tanto un máximo como un mínimo de la longitud total de los dos lados, por lo que, de acuerdo con las circunstancias, podremos encontrar diferentes tipos de triángulos luminosos. Así, p. ej., si consideramos el interior de una curva continua única C , el triángulo inscrito de longitud máxima debe ser un triángulo luminoso. O podemos considerar (como nos lo sugiere Marston Morse) el exterior de tres curvas continuas cerradas. Un triángulo luminoso ABC puede caracterizarse por el hecho de que su longitud tenga un valor estacionario; éste puede ser un mínimo respecto a los tres puntos A , B , C , o respecto a cualquiera de las combinaciones, como A y B , y un máximo respecto al tercer punto C , o puede ser un mínimo respecto a un punto y máximo respecto a los otros dos,

o, finalmente, ser un máximo respecto a los tres puntos. En cualquier caso, está asegurada la existencia de, por lo menos, $2^3 = 8$



Figs. 204-7.—Los cuatro tipos de triángulos luminosos entre tres círculos.

triángulos luminosos, puesto que para cada uno de los tres puntos, independientemente, es posible un máximo o un mínimo.

***5. Observaciones relativas a los problemas de reflexión y al movimiento ergódico.**—Es un problema de especial interés en dinámica y en óptica describir el recorrido o *trayectoria* de una partícula en el espacio, o de un rayo luminoso durante un intervalo ilimitado de tiempo. Si mediante algún artificio físico la partícula o el rayo están restringidos a una porción limitada del espacio, es del mayor interés saber si la trayectoria acabará, en el límite, por llenar todos los puntos del espacio con una distribución aproximadamente uniforme. Una trayectoria de ese tipo se llama *ergódica*. La hipótesis de su existencia es fundamental en los métodos estadísticos de la dinámica moderna y en la teoría atómica. Pero se conocen muy pocos ejemplos pertinentes en los que pueda darse una demostración matemática rigurosa de la *hipótesis ergódica*.

Los ejemplos más sencillos se refieren al movimiento dentro de

una curva plana C , suponiendo que la frontera C se comporta como un espejo perfecto que refleje la partícula (la cual se movería en otro caso sin ninguna restricción) según el mismo ángulo bajo el cual chocó contra la curva; p. ej., una caja rectangular (una mesa de billar ideal de reflexión perfecta y un punto provisto de masa, como una bola) conduce en general a una trayectoria ergódica. La bola ideal, moviéndose indefinidamente, pasará por todo punto, salvo para algunas posiciones iniciales y direcciones singulares. Omitimos la demostración, aunque en principio no es difícil.

De particular interés es el caso de una mesa elíptica, de focos F_1 y F_2 . Puesto que la tangente a una elipse forma ángulos iguales con los radios vectores del punto de tangencia, toda trayectoria que pase por un foco se reflejará en el otro, y así indefinidamente. No es difícil ver que, cualquiera que sea la dirección inicial, después de n reflexiones, la trayectoria tiende, al aumentar n , al eje mayor F_1F_2 . Si el rayo inicial no pasa por un foco, existen dos posibilidades: si pasa entre ambos focos, todos los rayos reflejados pasarán entre éstos y serán tangentes a una cierta hipérbola, de focos F_1 y F_2 ; si el rayo inicial no pasa entre F_1 y F_2 , tampoco lo hará ninguno de los rayos reflejados y éstos serán tangentes a una elipse de focos F_1 y F_2 . Así, pues, el movimiento no será ergódico para la elipse en su totalidad.

***Ejercicios:**

1. Demuéstrase que si el rayo inicial pasa por un foco de la elipse, la n -ésima reflexión del rayo inicial tenderá al eje mayor, al aumentar n .
2. Demuéstrase que si el rayo inicial pasa entre los dos focos, todos los rayos reflejados harán otro tanto y serán tangentes a una hipérbola de focos F_1 y F_2 ; análogamente, si el rayo inicial no pasa por entre los focos, tampoco lo hará ninguno de los reflejados y todos éstos serán tangentes a una elipse, de focos F_1 y F_2 . (Demuéstrase que el rayo, antes y después de reflejarse en R , forma ángulos iguales con las rectas RF_1 y RF_2 , respectivamente, y pruébese a continuación que es posible de esta manera caracterizar las tangentes a un sistema de cónicas homofocales.)

V. EL PROBLEMA DE STEINER

1. **El problema y su solución.**—A principios del siglo XIX, Jacob Steiner, el famoso profesor de Geometría de la Universidad de Berlín, estudió un problema muy sencillo, pero sumamente instructivo. Tres aldeas, A , B , C , han de ser unidas por un sistema de carreteras de longitud total mínima. En términos matemáticos, el problema equivale a que se dan tres puntos A , B , C en el plano y se pide un cuarto punto P tal que la suma $a + b + c$ sea un mínimo, representando esas

letras las distancias de P a A , B y C , respectivamente. La solución del problema es la siguiente: si en el triángulo ABC todos los ángulos son menores de 120° , P es el punto desde el cual cada uno de los tres lados AB , BC , CA subtiende un ángulo de 120° . Sin embargo, si un ángulo de ABC , p. ej., el C , es igual o mayor que 120° , el punto P coincide con el vértice C .

Es fácil obtener esta solución, utilizando los resultados anteriores relativos a valores extremos. Supongamos que P es el punto buscado. Existen las siguientes posibilidades: o P coincide con uno de los vértices

A , B , C , o es distinto de ellos. En el primer caso, es evidente que P debe ser el vértice del mayor ángulo C de ABC , puesto que la suma $CA + CB$ es menor que cualquier otra suma de otros dos lados del triángulo ABC . Así, para completar la demostración, debemos considerar el segundo caso. Sea K una circunferencia de radio c y centro C .

Entonces P debe ser un punto de K , tal que $PA + PB$ sea mínimo. Si A y B son exteriores a K (Fig. 209), de acuerdo con lo dicho en la página 342, PA y PB deben formar ángulos iguales con la circunferencia K , o sea, con el radio PC , que es perpendicular a K . Puesto que el mismo razonamiento se aplica a la posición de P y al círculo de radio a y centro A , resulta

que los tres ángulos formados por PA , PB , PC son iguales, o sea, que cada uno vale 120° como habíamos dicho. En el razonamiento se ha supuesto que A y B son exteriores a K , lo que queda aún por demostrar. Si al menos uno de los puntos A y B , p. ej., A , se encontrara en K o fuera interior, puesto que P , como se ha supuesto, no coincide con A o B , tendríamos $a + b \geq AB$. Pero $AC \leq c$, ya que A no es exterior a K . De donde resulta:

$$a + b + c > AB + AC,$$

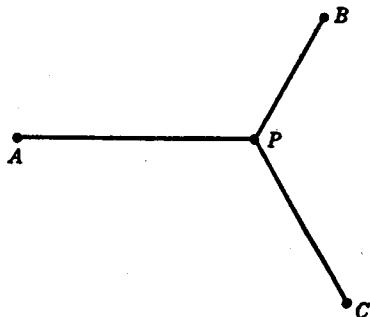


FIG. 208.—Suma mínima de distancias a tres puntos.

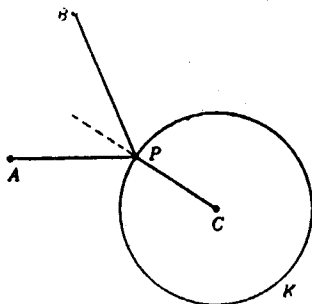


FIG. 209.

lo que significa que obtendríamos la mínima suma de distancias si P coincidiera con A , contra nuestra hipótesis. Esto demuestra que tanto A como B son exteriores al círculo K . El hecho correspondiente se demuestra en forma similar para las otras combinaciones: B, C respecto al círculo de radio a y centro A , y A, C , respecto al círculo de radio b y centro B .

2. Análisis de los casos posibles.—Para verificar cuál de los dos casos posibles respecto a la posición de P sucede realmente debemos examinar la construcción de dicho punto P . Para determinar éste, trazamos las circunferencias K_1 y K_2 , sobre las cuales dos lados, p. ej., AC y BC , subtenden arcos de 120° . Entonces, AC subtendrá también un ángulo de 120° desde cualquier punto del menor de los arcos en que AC divide a K_1 ; pero subtendrá 60° desde cualquier punto

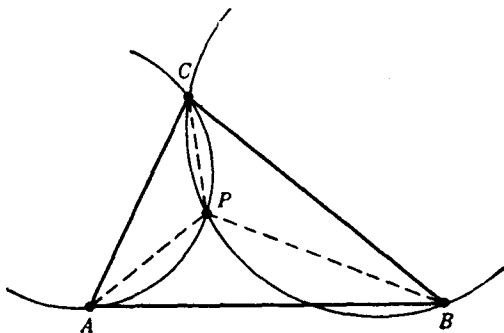


FIG. 210.

del arco mayor. La intersección de los dos arcos menores, siempre que exista, proporciona el punto buscado P , pues no sólo AC y BC subtenderán un arco de 120° en P , sino que lo mismo sucederá con AB , por ser 360° la suma de los tres ángulos.

De la figura 210 resulta evidente que si ninguno de los ángulos del triángulo ABC es mayor que 120° , los dos arcos más cortos se cortarán dentro del triángulo. Por otra parte, si un ángulo C del triángulo ABC es mayor que 120° , los dos arcos más cortos de K_1 y K_2 no se cortan, como se ve en la figura 211. En este caso, no existe un punto P desde el cual los tres lados subtendan ángulos de 120° . Sin embargo, K_1 y K_2 determinan, por su intersección, un punto P' , desde el cual AC y BC subtenden ángulos de 60° cada uno, mientras el lado AB , opuesto al ángulo obtuso, subtende un ángulo de 120° .

Para un triángulo ABC que tenga un ángulo mayor de 120° no

existe, pues, ningún punto desde el cual los tres lados subtiendan ángulos de 120° . De ahí que el punto mínimo P deba coincidir con un vértice, puesto que, como ya se ha demostrado, es la única posi-

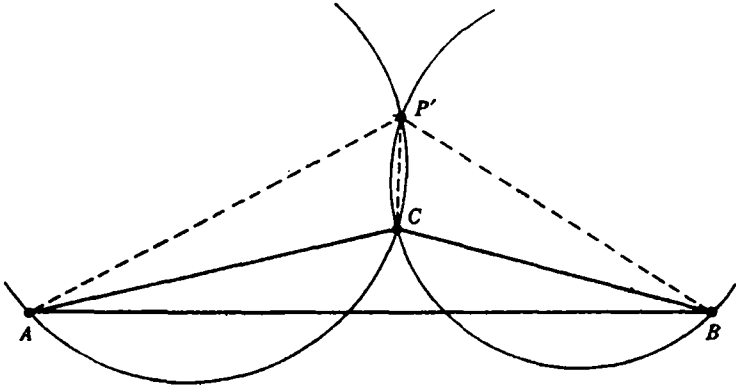


FIG. 211.

bilidad restante, debiendo ser además el vértice del ángulo obtuso. Si, por otra parte, todos los ángulos del triángulo son menores de 120° , hemos visto que se puede determinar un punto desde el cual cada lado subtienda un ángulo de 120° . Pero para completar la demostración debemos probar todavía que $a + b + c$ será realmente menor, en este caso, que si P coincidiera con cualquiera de los vértices, ya que sólo hemos demostrado que P proporciona un mínimo si la menor longitud total no corresponde a uno de los vértices.

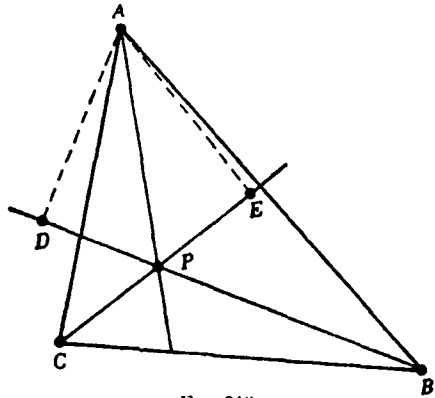


FIG. 212.

En consecuencia, debemos demostrar que $a + b + c$ es menor que la suma de dos lados cualesquiera, p. ej., $AB + AC$. Para conseguirlo, prolonguemos BP y proyectemos A sobre esta recta, con lo que se obtiene un punto D (Fig. 212). Puesto que $\widehat{APD} = 60^\circ$, la longitud de la proyección PD es $\frac{1}{2}a$, y como BD es la proyección de AB sobre BP , se tendrá que $BD < AB$. Ahora bien: $BD = b + \frac{1}{2}a$; o sea,

$b + \frac{1}{2}a < AB$. De igual forma, proyectando A sobre la prolongación de PC , veríamos que $c + \frac{1}{2}a < AC$. Sumando, obtenemos la desigualdad $a + b + c < AB + AC$. Puesto que ya sabemos que el punto mínimo, si no es uno de los vértices, debe ser P , se deduce finalmente que éste es realmente el punto para el cual $a + b + c$ es mínima.

3. Un problema complementario.—Los métodos formales de la matemática nos llevan algunas veces más allá del objetivo original; p. ej., si el ángulo C es mayor de 120° , la construcción geométrica determina, no el punto solución P (que en este caso es el propio punto C), sino otro punto P' desde el cual aparece el lado mayor AB del triángulo ABC bajo un ángulo de 120° , y los dos más pequeños se ven bajo ángulos de 60° cada uno. Ciertamente, P' no resuelve

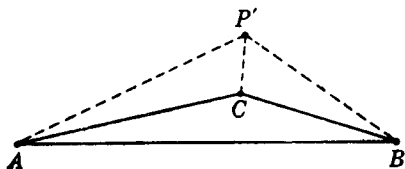


FIG. 213. $-a + b - c = \text{mínimo}$.

nuestro problema de mínimo, pero cabe sospechar que tiene alguna relación con él. La respuesta es que P' resuelve el problema siguiente: hallar el mínimo de la expresión $a + b - c$. La demostración es por completo análoga a la dada para

$a + b + c$, basada en los resultados obtenidos en la página 347, por lo que se deja como ejercicio al lector. Si se combina con el resultado precedente, tenemos el teorema:

Si los ángulos de un triángulo ABC son todos menores que 120° , la suma de las distancias a, b, c de un punto cualquiera a A, B, C , respectivamente, es mínima para aquel punto desde el cual se ve cada lado del triángulo bajo un ángulo de 120° , y $a + b - c$ es mínima para el vértice C ; si un ángulo, p. ej., C , es mayor que 120° , $a + b + c$ es mínima para C , y $a + b - c$ lo es para un punto tal que los dos lados menores del triángulo subtiendan ángulos de 60° , mientras que el mayor subtienda otro de 120° .

Así, pues, de los dos problemas de mínimo, uno puede resolverse siempre por la construcción conocida, y la solución del otro es un vértice. Para $\hat{C} = 120^\circ$, las dos soluciones de cada problema, e incluso las soluciones de ambos, coinciden, puesto que el punto que se obtiene por construcción es precisamente el vértice C .

4. Observaciones y ejercicios.—Si desde un punto P , situado en el interior de un triángulo equilátero UVW , se trazan tres rectas perpendiculares PA, PB, PC , según muestra la figura 214, los puntos

A, B, C y P forman la figura estudiada anteriormente. Esta observación puede servir para resolver el problema de Steiner, comenzando por los puntos A, B, C y determinando a continuación U, V, W .

Ejercicios:

1. Efectúese esta construcción, utilizando la propiedad de que para todo punto de un triángulo equilátero, la suma de los tres segmentos normales a sus lados es constante e igual a la altura.

2. Haciendo uso de la propiedad correspondiente cuando P es exterior al triángulo, discútase el problema complementario. En tres dimensiones puede estudiarse el problema análogo siguiente: dados cuatro puntos A, B, C, D , hállese un quinto punto P tal que $a + b + c + d$ sea mínima.

*Ejercicio: Estúdiense este problema y su complementario mediante los métodos dados en las páginas 341 y siguientes, o utilizando un tetraedro regular.

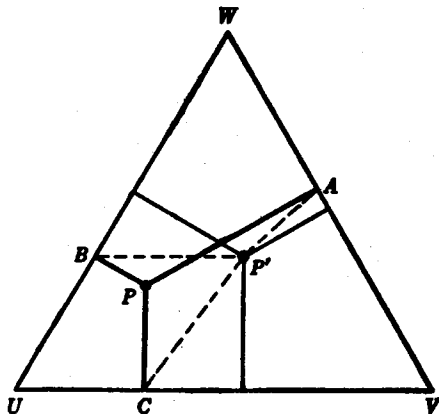


FIG. 214.—Otra demostración de la solución de Steiner.

5. **Generalización al problema de la red de carreteras.**—En el problema de Steiner, se dan tres puntos A, B, C . Es natural generalizarlo al caso de ser n los puntos dados en el plano, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, y pidiéndose entonces el punto P , para el cual la suma de las distancias $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ sea mínima, siendo a_1 la distancia PA_1 . (Para cuatro puntos, dispuestos como en la figura 215, el punto P es el de intersección de las diagonales del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, lo que el lector puede demostrar como ejercicio.) Este problema, del que también se ocupó Steiner, nos conduce a resultados interesantes. Es una de tantas generalizaciones superficiales que aparecen con frecuencia en la literatura matemática. Para encontrar la generalización verdaderamente significativa del problema de Steiner debemos abandonar la búsqueda de un punto único P , y en su lugar trataremos de hallar la «red de carreteras» de longitud total mínima, lo que en lenguaje matemático se expresa así: *Dados n puntos A_1, \dots, A_n determínese un sistema conexo de segmentos rectilíneos*

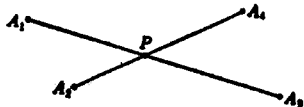
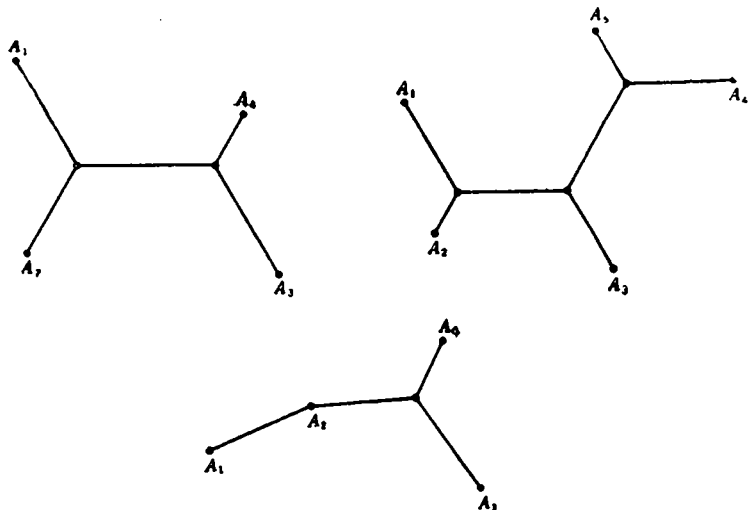


FIG. 215.—Suma mínima de distancias a cuatro puntos.

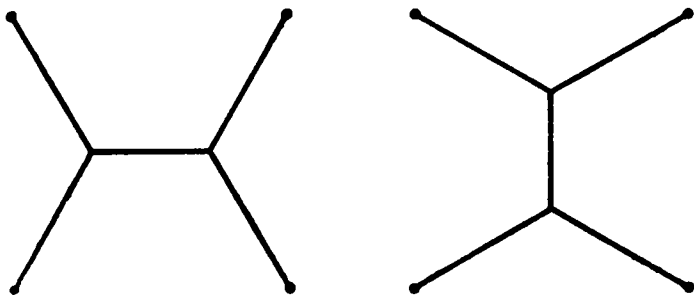
de longitud total mínima, de tal modo que dos puntos cualesquiera queden unidos por una poligonal formada por segmentos del sistema.

La solución depende, por supuesto, de la ordenación de los puntos



Figs. 216-18. — Redes mínimas uniendo más de tres puntos.

dados. El lector podrá estudiar fructíferamente el tema, basándose en la solución del problema de Steiner. Aquí nos limitaremos a esbozar la respuesta en los casos típicos representados en las figuras 216 a 218. En el primero, la solución consta de cinco segmentos con dos



Figs. 219-20. — Dos redes mínimas uniendo cuatro puntos.

intersecciones múltiples, donde tres de los segmentos se cortan formando ángulos de 120° . En el segundo caso, la solución contiene tres intersecciones múltiples. Si los puntos se disponen de otra manera, dichas figuras pueden ser imposibles. Una o varias de las intersec-

ciones múltiples pueden degenerar, apareciendo en su lugar uno o más de los puntos dados, como en el tercer caso.

En el caso de ser n los puntos dados, existirán por lo menos $n-2$ intersecciones múltiples, en cada una de las cuales tres segmentos formarán ángulos de 120° .

La solución del problema no está siempre unívocamente determinada. Para cuatro puntos A, B, C, D , que formen un cuadrado, tenemos dos soluciones equivalentes que aparecen en las figuras 219 y 220. Si los puntos A_1, A_2, \dots, A_n son los vértices de una poligonal simple con ángulos suficientemente obtusos, esta misma será la de longitud mínima.

VI. VALORES EXTREMOS Y DESIGUALDADES

Uno de los rasgos característicos de la matemática superior es el importante papel que las desigualdades desempeñan en ella. En principio, la solución de un problema de máximo conduce siempre a una desigualdad, la cual expresa el hecho de que la variable que se considera es menor o a lo sumo igual al valor máximo que proporciona la solución. En muchos casos, tales desigualdades tienen un interés independiente por sí mismas. Como ejemplo, consideraremos la importante desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

1. Medias aritmética y geométrica de dos cantidades positivas. Comencemos por un sencillo problema de máximo que aparece a menudo en la matemática pura y en la aplicada. En lenguaje geométrico equivale a lo siguiente: entre todos los rectángulos de perímetro dado, hállese el de mayor área. Como era de esperar, la solución es un cuadrado. Para demostrarlo se razona de la manera siguiente: sea $2a$ el perímetro dado del rectángulo. La suma de dos lados adyacentes, $x + y$, queda fijada al dar el perímetro, mientras que el área variable xy deberá hacerse tan grande como sea posible. La «media aritmética» de x e y es sencillamente

$$m = \frac{x + y}{2}$$

Introduzcamos ahora la cantidad

$$d = \frac{x - y}{2},$$

de donde se deduce:

$$x = m + d, \quad y = m - d,$$

y, en consecuencia,

$$xy = (m + d)(m - d) = m^2 - d^2 = \frac{(x + y)^2}{4} - d^2.$$

Puesto que d^2 es mayor que cero, excepto para $d = 0$, se obtiene inmediatamente la desigualdad

$$\sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}, \quad [1]$$

donde el signo de igualdad sólo es válido cuando $d=0$ y $x=y=m$.

Puesto que $x + y$ es fija, se deduce que \sqrt{xy} , y, en consecuencia, el área xy será máxima, cuando $x = y$. La expresión

$$g = \sqrt{xy},$$

en la que deberá tomarse la raíz con signo positivo, se llama «media geométrica» de las cantidades positivas x e y . La desigualdad [1] expresa la relación fundamental entre las medias aritmética y geométrica.

Se obtiene también directamente la desigualdad [1] del hecho de ser necesariamente no negativa la expresión

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy},$$

pues es un cuadrado que sólo puede ser igual a cero para $x = y$.

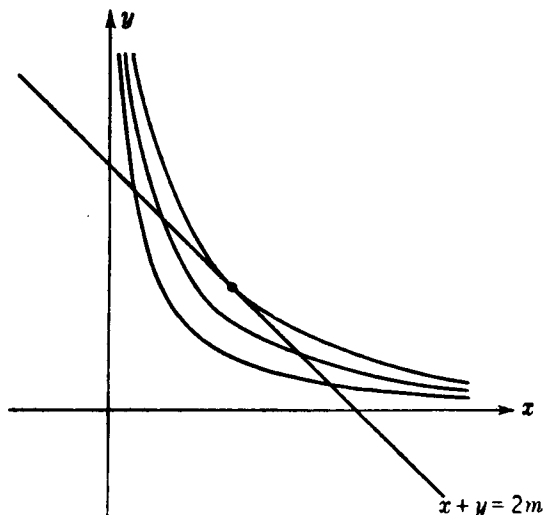


FIG. 221.—Máximo de xy , dada $x + y$.

Puede deducirse una consecuencia geométrica de dicha desigualdad, considerando en el plano la recta fija $x + y = 2m$, junto con la familia de curvas $xy = c$, donde c es constante para cada una de

las curvas (hipérbolas), y varía de una a otra. Como resulta evidente de la figura 221, la curva para la que es máximo el valor de c y tiene un punto común con la recta dada es la hipérbola tangente a la recta en el punto $x = y = m$; para ella, evidentemente, $c = m^2$. En consecuencia,

$$xy < \left(\frac{x + y}{2} \right)^2$$

Debe hacerse constar que cualquier desigualdad del tipo $f(x, y) \leq g(x, y)$ puede leerse en ambas direcciones, por lo que proporciona no sólo una propiedad de máximo, sino también otra de mínimo; p. ej., [1] expresa también la propiedad de que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

2. Generalización para «n» variables.—Puede generalizarse la desigualdad [1] entre las medias aritmética y geométrica para cualquier número n de cantidades positivas, que denotaremos por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Decimos que

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

es la media aritmética, y

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

la media geométrica, entendiendo en este último caso que se trata de la raíz positiva. El teorema general dice que

$$g < m, \quad [2]$$

siendo $g = m$ sólo si todos los x_i son iguales.

Se han dado muchas y muy ingeniosas demostraciones de este resultado general. La más sencilla consiste en reducirla al mismo razonamiento utilizado en la página 371, planteando el siguiente problema de máximo: dividir una cantidad positiva C en n partes positivas, $C = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, de tal modo que el producto $P = x_1 x_2 \dots x_n$ sea máximo. Comencemos por suponer—hipótesis en apariencia obvia, pero que se analizará más adelante—que existe un máximo de P y que éste tiene lugar para el siguiente conjunto de valores:

$$x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n.$$

Todo se reduce a probar que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, pues en tal caso

se tiene: $g = m$. Supongamos que eso no fuera cierto; p. ej., que $a_1 \neq a_2$. Consideremos las n cantidades

$$x_1 = s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n,$$

siendo

$$s = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

En otras palabras, reemplacemos las cantidades a_1 por otro conjunto, en el cual han cambiado sólo las dos primeras, que se han hecho iguales, mientras que la suma total C permanece invariable. Podemos escribir

$$a_1 = s + d, \quad a_2 = s - d,$$

donde

$$d = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

El nuevo producto es

$$P' = s^2 \cdot a_3 \cdots a_n,$$

mientras que el primitivo era

$$P = (s + d) \cdot (s - d) \cdot a_3 \cdots a_n = (s^2 - d^2) \cdot a_3 \cdots a_n,$$

por lo que, evidentemente, a menos que sea $d = 0$, se tendrá

$$P < P',$$

contra la hipótesis según la cual P era máximo. En consecuencia, $d = 0$ y $a_1 = a_2$. De la misma manera podemos demostrar que $a_1 = a_i$, donde a_i representa cualquiera de las cantidades a . Finalmente, se deduce que todas las a_i deberán ser iguales. Puesto que $g = m$ cuando todas las x_i son iguales, y como hemos demostrado que sólo en este caso se obtiene el máximo de g , resulta que, en cualquier otro, será $g < m$, como queríamos demostrar.

3. El método de los cuadrados mínimos.—La media aritmética de n números x_1, x_2, \dots, x_n , que en lo que sigue no precisan ser necesariamente positivos, tiene una importante propiedad de mínimo. Sea u una cantidad desconocida, que queremos determinar con tanta precisión como sea posible, mediante un instrumento de medida. Con este fin, efectuamos cierto número n de lecturas, que pueden dar lugar a resultados ligeramente distintos, x_1, \dots, x_n , debido a diversas causas de error experimental. Surge entonces la cuestión de saber qué valor de u deberá aceptarse como más *plausible*; es costumbre

elegir como valor «plausible» u «óptimo» la media aritmética $m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Para justificar debidamente esta hipótesis, sería necesario entrar en una detallada discusión de la teoría de las probabilidades. Pero, al menos, podemos señalar una propiedad de mínimo de m que hace razonable nuestra elección. Sea u un valor cualquiera posible de la cantidad medida. Las diferencias $u - x_1, \dots, u - x_n$, medirán las desviaciones existentes entre las diferentes lecturas x_i y este valor. Algunas de esas desviaciones serán positivas, mientras otras serán negativas, y parece natural suponer que el valor óptimo de u es tal que la desviación total, en cierto sentido, resulte lo más pequeña posible. Siguiendo a Gauss, se acostumbra tomar, no las desviaciones, sino sus cuadrados $(u - x_i)^2$, como una medida apropiada del error, y elegir como valor óptimo entre todas los posibles valores de u el que hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones:

$$(u - x_1)^2 + (u - x_2)^2 + \dots + (u - x_n)^2.$$

Este valor óptimo de u es precisamente la media aritmética m , hecho que constituye el punto de partida del importante «método de los cuadrados mínimos» de Gauss. Podemos demostrar de una manera muy elegante la afirmación en cursiva. Si escribimos

$$(u - x_i) = (m - x_i) + (u - m),$$

se obtiene:

$$(u - x_i)^2 = (m - x_i)^2 + (u - m)^2 + 2(m - x_i)(u - m).$$

Sumemos ahora todas estas ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, n$. Los últimos términos dan $2(u - m)(nm - x_1 - \dots - x_n)$, que es cero, como se deduce de la definición de m . En consecuencia, queda

$$(u - x_1)^2 + \dots + (u - x_n)^2 = (m - x_1)^2 + \dots + (m - x_n)^2 + n(m - u)^2,$$

lo que demuestra que

$$(u - x_1)^2 + \dots + (u - x_n)^2 > (m - x_1)^2 + \dots + (m - x_n)^2,$$

y que el signo de igualdad sólo se verifica para $u = m$, según queremos probar.

El método general de los cuadrados mínimos parte de este resultado, utilizándolo como norma orientadora en los casos más complicados, cuando se trata de decidir cuál es el valor más plausible que puede deducirse de medidas entre las cuales existen ligeras contradicciones. Supongamos, p. ej., que hemos medido las coordenadas de n

puntos, x_i, y_i , de una línea que teóricamente debía ser recta, y suponemos además que los puntos medidos no se encuentran exactamente sobre una recta. ¿Cómo deberemos trazar la recta que mejor se *ajuste* a los n puntos observados? Los resultados anteriores sugieren el procedimiento siguiente, que, ciertamente, podría reemplazarse por otras variantes igualmente razonables: sea $y = ax + b$ la ecuación de la recta, por lo que el problema consiste en determinar los coeficientes a y b . La distancia en la dirección de las y , desde la recta al punto x_i, y_i , está dada por $y_i - (ax_i + b) = y_i - ax_i - b$, siendo el signo positivo o negativo, según que el punto se encuentre por encima o por debajo de la recta. El cuadrado de esa distancia será, pues, $(y_i - ax_i - b)^2$ y el método consiste sencillamente en determinar a y b de tal manera que la expresión

$$(y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_n - ax_n - b)^2$$

tenga el menor valor posible. Así, pues, en este caso tenemos un problema de mínimo que incluye dos cantidades desconocidas: a y b . Aunque muy sencilla, omitimos la discusión detallada de la solución.

VII. EXISTENCIA DE EXTREMOS. PRINCIPIO DE DIRICHLET

1. Observaciones generales.—En algunos de los problemas anteriores de máximos y mínimos se prueba directamente que la solución proporciona el mejor resultado posible. Un ejemplo notable es la solución de Schwarz del problema del triángulo, en cuyo caso pudimos ver sin dificultad que ningún triángulo inscrito tiene un perímetro menor que el triángulo órtico. Otros ejemplos son los problemas de máximos y mínimos, cuyas soluciones dependen de una desigualdad explícita, tal como la existente entre las medias geométrica y aritmética. Pero en algunos de los problemas tratados hemos seguido un camino distinto. Se comienza por suponer que se ha encontrado una solución; analizando esta hipótesis extraemos conclusiones que pueden eventualmente caracterizar y construir la solución. Así ocurrió, por ejemplo, con la solución del problema de Steiner y con el segundo método de resolución del problema de Schwarz. Ambos métodos son lógicamente diferentes. En cierto sentido, el primero es más perfecto, puesto que proporciona una demostración, más o menos constructiva, de la solución. Como tuvimos ocasión de ver en el caso del problema del triángulo, es probable que el segundo método sea más sencillo; pero no es tan directo y, sobre todo, tiene un vicio de origen en su estructura, pues empieza suponiendo que *existe* una solución del pro-

blema. Proporciona tal solución *sólo* si se admite o se demuestra que ésta existe. Sin esa hipótesis previa, se limita a probar que *si* existe una solución, debe poseer cierto carácter¹.

Debido a la aparente evidencia de la premisa de que existe una solución, los matemáticos, hasta finales del siglo XIX, no prestaron atención a la cuestión lógica inmanente, aceptando como cosa natural la existencia de solución en los problemas de máximos y mínimos. Algunos de los más grandes matemáticos del siglo XIX—Gauss, Dirichlet y Riemann—utilizaron sin discriminación tal hipótesis, tomándola como base para la investigación de difíciles teoremas de física matemática y teoría de funciones, que de otro modo hubieran resultado casi inasequibles. El punto culminante se produjo en 1849, cuando Riemann publicó su tesis doctoral sobre los fundamentos de la teoría de funciones de variable compleja. Aquella memoria, tan concisamente escrita y uno de los trabajos más importantes de la matemática moderna, era tan heterodoxa en su forma de atacar el problema, que mucha gente hubiera preferido ignorarla. Weierstrass era entonces el matemático más notable de la Universidad de Berlín, y el maestro reconocido por todos de la construcción de una teoría de funciones rigurosa. Impresionado por su lectura, pero un tanto escéptico, pronto descubrió una laguna lógica en aquella memoria, que el autor no se había preocupado de llenar. La rigurosa crítica de Weierstrass, si bien no influyó en el ánimo de Riemann, hizo que se ignorara casi por completo su teoría. La carrera meteórica de Riemann terminó súbitamente, pues murió tuberculoso pocos años después. Pero sus ideas encontraron siempre algunos entusiastas discípulos, y cincuenta años después de la publicación de su tesis, Hilbert consiguió abrir el camino para dar una respuesta completa a todas las cuestiones que había dejado sin esclarecer. Todo este desarrollo de la matemática y de la física matemática se convirtió en uno de los más grandes triunfos en la historia del análisis matemático moderno.

En la memoria de Riemann, el punto expuesto al ataque de la crítica es la cuestión de la existencia de mínimo. Riemann basó gran parte de su teoría en lo que él llamaba *principio de Dirichlet*. (Dirichlet había sido profesor de Riemann en Gotinga, y había expuesto esta cuestión en sus clases, pero nunca publicó nada sobre dicho principio.) Supongamos, p. ej., que una parte de un plano o de cualquier superficie se recubre con una lámina de estaño muy fina, y que se establece una corriente eléctrica estacionaria en la lámina metálica, co-

¹ La necesidad lógica de probar la existencia de un extremo se aclara con el siguiente sofisma: 1 es el mayor de los enteros. Representemos por x el máximo entero; si fuera $x > 1$, entonces $x^2 > x$, y, por tanto, no sería x el máximo. En consecuencia, x debe ser igual a 1.

nectándola en dos puntos con los dos polos de una pila eléctrica. No cabe duda de que esta experiencia física conduce a un resultado definido. Pero ¿qué ocurre con el problema matemático correspondiente, que es de la máxima importancia en teoría de funciones y en otros campos? De acuerdo con la teoría de la electricidad, el fenómeno físico se describe como un «problema de valores de contorno de una ecuación en derivadas parciales». Es el problema matemático el que nos interesa; su resolubilidad parece posible, puesto que equivale a un fenómeno físico; pero esta argumentación no prueba nada matemáticamente. Riemann trató la cuestión matemática en dos etapas. Primero, demostró que el problema equivale a un problema de mínimo: cierta cantidad que expresa la energía del flujo eléctrico es mínima en el caso del flujo real en comparación con los otros flujos posibles, dentro de las condiciones prescritas. Enunció, después, como *principio de Dirichlet*, que tal problema de mínimo tiene solución. Riemann no dió el menor paso en busca de una demostración matemática de la segunda afirmación, y éste fué el punto objeto de los ataques de Weierstrass. No sólo no era evidente la existencia de un mínimo, sino que además resultó ser una cuestión sumamente delicada, para cuyo estudio no estaba preparada la matemática de aquella época, y que, finalmente, sólo se resolvió después de muchas décadas de investigación intensa.

2. Ejemplos.—Explicaremos la índole de la dificultad a que se hace mención, mediante dos ejemplos: 1) Sobre una recta L tomemos dos puntos A y B a una distancia d y busquemos la poligonal de

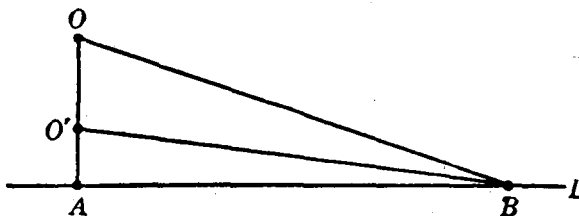


FIG. 222.

longitud mínima que partiendo de A en dirección perpendicular a L , termina en B . Puesto que el segmento rectilíneo AB es la distancia más corta de A a B entre todos los caminos posibles, podemos estar seguros que cualquier otro camino admisible tiene una longitud mayor que d , pues el único que tiene esa misma longitud d es el segmento rectilíneo AB , el cual no cumple la restricción impuesta en cuanto a la dirección en A , y, por consiguiente, no es admisible dentro de las

condiciones del problema. Por otra parte, si se considera el camino admisible AOB (Fig. 222) se encuentra que, al reemplazar O por otro punto O' suficientemente próximo al A , podemos obtener un camino admisible, cuya longitud diferirá tan poco como se quiera de d ; en consecuencia, si existe un camino admisible de *longitud mínima*, ésta no puede ser mayor que d , por lo que debe ser exactamente igual a d . Pero el único camino que tiene tal longitud no es admisible; por tanto, no puede existir un camino de longitud mínima cumpliendo dicha condición, y el problema propuesto no tiene solución.

2) Sea C una circunferencia (Fig. 223) y S un punto a distancia l por encima de su centro; consideremos el conjunto de todas las superficies limitadas por C , que pasan por el punto S y que se encuentran por encima de C , de tal forma que dos puntos distintos no tengan la misma proyección vertical sobre el plano de C . ¿Cuál es, entre todas estas superficies, la de área mínima? Por muy natural que parezca este problema, carece de solución: no existe una superficie que cumpla los requisitos del problema y tenga área mínima. Si no se exige que la superficie pase por S , la solución será evidentemente el disco circular plano limitado por C , y cuya área llamaremos A . Cualquier otra superficie limitada por C , debe tener área mayor que A . Pero podemos encontrar una superficie que cumpla las condiciones del problema y cuya área exceda de A tan poco como queramos. Para esto consideremos una superficie cónica de altura l y de radio tan pequeño en la base que su área sea menor que cualquier valor asignado. Coloquemos este cono sobre el disco de tal modo que su vértice coincida con S y consideremos la superficie total formada por la lateral del cono y la parte del disco que no está cubierta por él. Es evidente que esta superficie, la cual sólo se desvía del disco en las proximidades de su centro, tiene un área que excede de A en menos del valor asignado, y como éste puede elegirse arbitrariamente pequeño, resulta que el mínimo, si existe, no puede ser sino el área A del disco. Pero, entre todas las superficies limitadas por C , sólo el disco tiene esta área, y como no pasa por S , no cumple una de las condiciones del problema. En consecuencia, éste carece de solución.

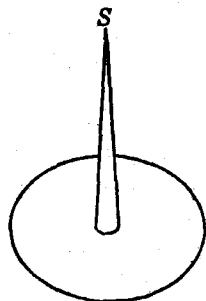


FIG. 223.

Podemos prescindir de otros ejemplos más complicados que dió Weierstrass; los dos considerados bastan para probar que la existencia de un mínimo no es una parte trivial de una demostración

matemática. Expongamos la cuestión de una manera más general y abstracta. Consideremos una clase definida de entes, p. ej., curvas o superficies, a cada una de las cuales se le asigna como función una longitud o un área. Si la clase se compone sólo de un número finito de objetos, entre los números correspondientes debe existir evidentemente un máximo y un mínimo. Pero si la clase se compone de infinitos objetos, no existe necesariamente ni lo uno ni lo otro, ni siquiera en el caso en que estos números estén comprendidos entre límites fijos. En general, dichos números formarán un conjunto infinito de puntos sobre la recta numérica. Supongamos, para mayor sencillez, que todos son positivos. Entonces, el conjunto tendrá un «extremo inferior»; es decir, un punto α a cuya izquierda no se encuentra ningún elemento del conjunto y que es o un elemento del mismo o tal que los elementos del conjunto se aproximan a él tanto como se desee. Si α pertenece al conjunto es su elemento mínimo; en otro caso, el conjunto carece de mínimo. Así, p. ej., el conjunto de los números $1, 1/2, 1/3, \dots$, no contiene elemento mínimo, pues el extremo inferior, 0 , no pertenece al conjunto. Estos ejemplos aclaran de una manera abstracta las dificultades lógicas relacionadas con el problema de existencia. La solución matemática de un problema de mínimo no queda completa hasta haber demostrado, explícita o implícitamente, que el conjunto de valores asociado al problema contiene un elemento menor que todos los restantes.

3. Problemas elementales de extremos.—En los problemas elementales, sólo se requiere un análisis atento de los conceptos fundamentales en que se basan para decidir la cuestión de la existencia de una solución. En el capítulo VI se discutió el concepto general de conjunto compacto, y vimos allí que una función continua, definida para los elementos de un conjunto compacto, siempre alcanza un máximo y un mínimo en algún punto del conjunto. En cada uno de los problemas elementales que hemos estudiado, los valores que se discuten pueden considerarse como los de una función de una o varias variables definida en un dominio, que es un conjunto compacto o puede reducirse a él sin modificación esencial del problema. En tal caso, está asegurada la existencia de máximo o de mínimo; en el problema de Steiner, p. ej., la cantidad considerada era la suma de tres distancias, que depende de forma continua de la posición del punto móvil. Puesto que el dominio de este punto abarca todo el plano, nada se pierde si encerramos la figura en un círculo de gran radio y nos restringimos a que el punto varíe en su interior y sobre la circunferencia. Pues tan pronto como el punto móvil se encuentra

suficientemente alejado de los tres puntos dados, la suma de sus distancias a éstos será mayor que $AB + BC$, que es uno de los valores posibles de la función. En consecuencia, si existe un mínimo para un punto dentro del círculo, éste será también el mínimo para el problema sin aquella restricción. Pero es fácil probar que el dominio compuesto por una circunferencia y su interior es compacto; por tanto, existe un mínimo para el problema de Steiner.

La importancia de suponer que el dominio de variación de la variable independiente es compacto se pone de manifiesto mediante el siguiente ejemplo: dadas dos curvas cerradas, C_1 y C_2 , existen siempre dos puntos, P_1 y P_2 , situados, respectivamente, sobre C_1 y C_2 tales que su distancia es mínima; así como otros dos puntos, Q_1 y Q_2 , cuya

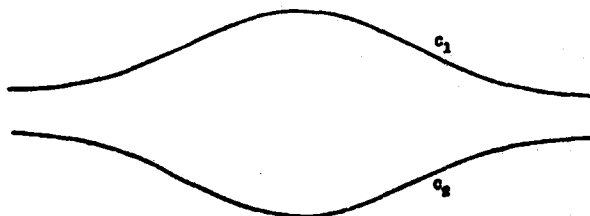


FIG. 224. —Curvas entre las que no hay distancia máxima ni mínima.

distancia es máxima, pues la distancia entre un punto A_1 de C_1 y otro A_2 de C_2 es una función continua en el conjunto compacto formado por las parejas de puntos A_1 y A_2 que se consideran. Sin embargo, si las dos curvas no están limitadas, sino que se extienden hasta el infinito, el problema puede carecer de solución. En el caso expuesto en la figura 224, no existe ni mínimo ni máximo de la distancia entre las dos curvas; el extremo inferior de aquélla es 0, y el superior, infinito, no alcanzándose ninguno de los dos. En algunos casos, existe mínimo pero no máximo. Para el caso de las dos ramas de la hipérbola (Fig. 17) sólo se alcanza la distancia mínima, en A y A' , puesto que evidentemente no existen dos puntos separados por una distancia máxima.

Podemos explicar este diferente comportamiento, restringiendo artificialmente el dominio de las variables. Elijamos un número positivo arbitrario R y restrinjamos la x por la condición $|x| \leq R$. Entonces existe tanto un máximo como un mínimo para los dos últimos problemas. En el primero la limitación del contorno en esta forma asegura la existencia de una distancia máxima y otra mínima, que se alcanzan ambas en la frontera. Si R aumenta, los puntos en que se alcanzan los extremos se encuentran también sobre el contorno. En

consecuencia, al aumentar R , esos puntos se alejan infinitamente. En el segundo caso, la distancia mínima se alcanza en el interior, y por mucho que se aumente R , los dos puntos cuya distancia es mínima siguen siendo los mismos.

4. Dificultades en casos más complicados.—Mientras que la cuestión de existencia no es muy grave en los problemas elementales de una, dos o a lo sumo un número finito de variables independientes, cambia el aspecto por completo cuando se trata del principio de Dirichlet e incluso en casos más simples de tipo análogo. La razón de ello es que o bien el dominio de la variable independiente no es com-

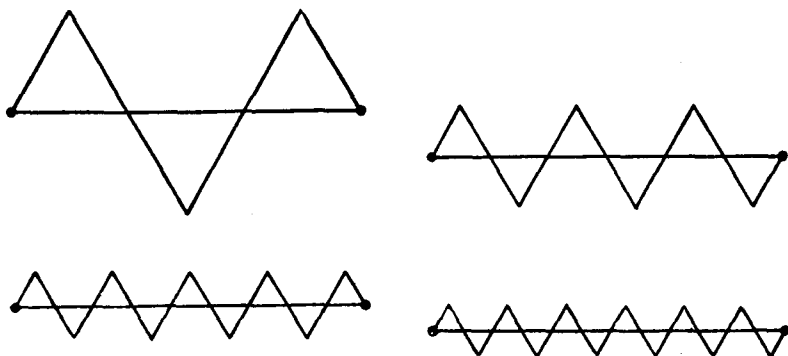


FIG. 225. — Aproximación a la longitud del segmento por polígonos de longitud doble.

pacto, o la propia función no es continua. En el ejemplo tratado en la página 378, teníamos una sucesión de caminos $AO'B$ tal que O' tendía al punto A . Cada camino de la sucesión satisface las condiciones impuestas, pero los caminos $AO'B$ tienden al segmento rectilíneo AB , el cual no pertenece al conjunto de las trayectorias permitidas. El conjunto de los caminos admisibles es, en este aspecto, análogo al intervalo $0 < x \leq 1$, para el cual no es válido el teorema de Weierstrass sobre valores extremos (pág. 324). En el segundo ejemplo nos encontramos en una situación análoga: si disminuye cada vez más el radio de la base de los conos, la sucesión de las correspondientes superficies admisibles tenderá al disco circular, más un segmento rectilíneo vertical que alcanza hasta S . Este ente geométrico, sin embargo, no figura entre las superficies admisibles, y ocurre nuevamente que el conjunto de dichas superficies no es compacto.

Como ejemplo de una dependencia no continua tenemos la longitud de una curva. Dicha longitud no es una función de un número finito de variables, puesto que una curva no puede caracterizarse por

un número finito de «coordenadas», y no es una función continua de la curva. Para comprender bien esto, unamos dos puntos A y B , situados a una distancia d , mediante una poligonal P_n , que junto con el segmento AB forma n triángulos equiláteros. Se deduce claramente de la figura 225 que la longitud total de P_n será exactamente $2d$, cualquiera que sea el valor de n . Consideremos ahora la sucesión de poligonales P_1, P_2, \dots . La altura de cada una de las ondas disminuye a medida que crece su número, y es evidente que la poligonal P_n tiende al segmento AB . La longitud de P_n es siempre $2d$, cualquiera que sea el subíndice n , mientras que la longitud de la curva límite, el segmento rectilíneo, sólo es d . De ahí que la longitud no dependa de la curva de manera continua.

Todos estos ejemplos confirman que las precauciones respecto de la existencia de solución son realmente necesarias en los problemas de mínimo de una estructura más compleja.

VIII. EL PROBLEMA DE LOS ISOPERÍMETROS

Uno de los hechos *evidentes* de la matemática, para el cual sólo los métodos modernos han dado una demostración rigurosa, es el referente a que, de todas las curvas cerradas de igual longitud, la circunferencia es la que encierra un área mayor. Steiner encontró diversas demostraciones ingeniosas de este teorema, de las cuales sólo consideraremos una.

Comencemos por suponer que existe solución. Concedido esto, supongamos que la curva C es la requerida; o sea, tiene la longitud prescrita y encierra el área máxima. Es fácil ver que C debe ser convexa; es decir, todo segmento rectilíneo que una dos puntos cualquiera de ella, debe estar situado enteramente dentro de C o sobre C . En efecto, si C no fuera convexa, como en la figura 226, sería posible trazar un segmento, tal como OP , entre dos puntos O y P de C , situado fuera de C ; el arco $OQ'P$, simétrico de OQP respecto a la recta OP , forma junto con el arco ORP una curva de longitud L , que encierra una superficie mayor que C , puesto que incluye además las áreas adicionales I y II . Esto contradice la hipótesis según la cual C contiene el área máxima entre todas las curvas cerradas de longitud L . Por tanto, C debe ser convexa.

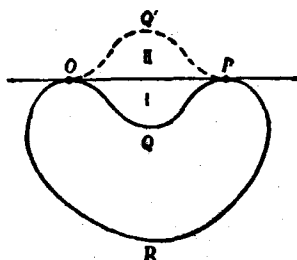


Fig. 226.

Elijamos ahora dos puntos, A , B , que dividan la curva solución C en dos arcos de igual longitud. Entonces, la recta AB debe dividir el área de C en dos partes iguales, pues en otro caso, hallando la simétrica respecto a AB de la mayor de las dos (Fig. 227) se obtendría otra curva de longitud L , que encerraría un área mayor que la de C .

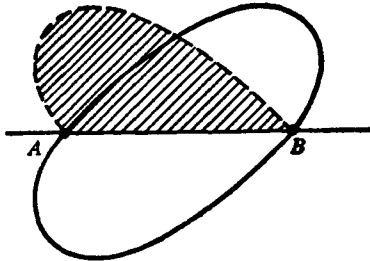


FIG. 227.

Se deduce de ahí que la mitad de la solución C debe resolver el siguiente problema: encontrar un arco de longitud $L/2$, cuyos extremos A y B estén sobre una recta dada y tal que se encierre un área máxima entre dicho arco y la recta. Probaremos ahora que la solución de este nuevo problema es una semicircunferencia, por lo que la curva C que resuelve el primer problema es una circunferencia.

Sea el arco AOB la solución del nuevo problema. Basta demostrar que todo ángulo inscrito AOB (Fig. 228) es recto, con lo que quedará establecido que AOB es una semicircunferencia. Supongamos, por el contrario, que el ángulo AOB no fuera recto. Entonces, sustituimos la figura 228 por la 229, en la cual las áreas rayadas y la longitud del arco AOB no han variado, pero el área triangular ha aumentado al tomar el ángulo AOB igual o muy próximo a 90° . Así, la figura 229

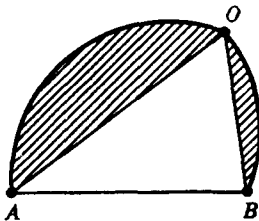


FIG. 228.

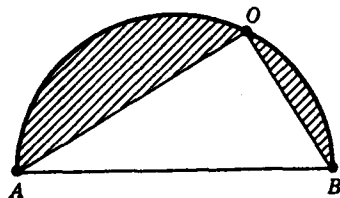


FIG. 229.

proporciona un área mayor que la original (véase pág. 341). Pero habíamos hecho la hipótesis de que la figura 228 resolvía el problema, de forma que la segunda figura no puede dar un área mayor. Esta contradicción prueba que para todo punto O el ángulo AOB debe ser recto, con lo que se completa la demostración.

Esta propiedad isoperimétrica del círculo puede expresarse mediante una desigualdad. Si L es la circunferencia del círculo, su área

será $L^2/4\pi$, por lo que debe existir la *desigualdad isoperimétrica* $A \leq L^2/4\pi$ entre el área A y la longitud L de cualquier curva cerrada, verificándose el signo de igualdad sólo para el círculo.

*Como se deduce de la discusión hecha en las páginas 376-82, la demostración de Steiner tiene sólo un valor condicional: «Si existe una curva de longitud L , de área máxima, ha de ser una circunferencia.» Para demostrar esta premisa hipotética se necesita una nueva argumentación. Probemos primero un teorema elemental, que se refiere a los polígonos cerrados P_n , con un número par de lados, $2n$, el cual dice que entre todos los polígonos de $2n$ lados y del mismo perímetro, el $2n$ -ágono regular encierra la superficie máxima. La demostración coincide en lo fundamental con el razonamiento de Steiner, si bien contiene algunas modificaciones. Aquí no se plantea ninguna dificultad respecto al problema de existencia, puesto que el polígono de $2n$ lados, así como su perímetro y su área, dependen de manera continua de las $4n$ coordenadas de sus vértices, que sin pérdida de generalidad pueden quedar restringidas a un conjunto compacto de puntos en un espacio de $4n$ dimensiones. De acuerdo con ello, en este problema de polígonos podemos empezar suponiendo que cierto polígono P es la solución y, partiendo

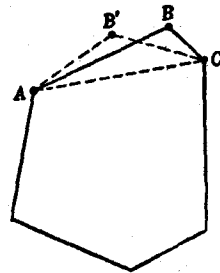


FIG. 230.

de esta base, analizar las propiedades de P . Exactamente como en la demostración de Steiner, se deduce que P debe ser convexo. Demostraremos ahora que los $2n$ lados de P tienen la misma longitud. Supongamos que dos lados adyacentes, AB y BC , tuvieran longitud diferente. Entonces podríamos separar el triángulo ABC de P y reemplazarlo por otro triángulo isósceles $AB'C$, en el cual $AB' + B'C = AB + BC$ y que tiene mayor área (véase pág. 344). Así obtendríamos un polígono P' con el mismo perímetro y área mayor, lo que contradice la hipótesis según la cual P era el polígono de área máxima de $2n$ lados. En consecuencia, todos los lados de P son de igual longitud, quedando por demostrar que es regular, para lo que basta probar que todos los vértices de P están sobre una circunferencia. El razonamiento sigue también paralelo al de Steiner. Previamente, demostraremos que toda diagonal que une dos vértices opuestos (p. ej., el primero con el $n+1$) divide la superficie en dos partes iguales, y a continuación probaremos que todos los vértices de cada una de esas partes están sobre una semicircunferencia. Los detalles, que siguen exactamente la marcha anterior, quedan como ejercicio a cargo del lector.

Puede probarse ahora la existencia, así como la solución del problema, mediante un proceso de límite, en el cual tiende a infinito el número de vértices y el polígono regular óptimo tiende a un círculo.

El razonamiento de Steiner no es completamente adecuado para probar la correspondiente propiedad isoperimétrica de la esfera en tres dimensiones. El mismo Steiner dió una argumentación más complicada y algo distinta, que resulta adecuada lo mismo para tres dimensiones que para dos; pero, dado que no puede adaptarse fácilmente de manera que proporcione la demostración de la existencia, preferimos omitirla. En efecto, la demostración de la propiedad isoperimétrica de la esfera es tarea mucho más difícil que la del círculo. Sólo mucho más tarde H. A. Schwarz dió por primera vez una demostración completa y rigurosa en una memoria bastante abstrusa. La propiedad isoperimétrica tridimensional puede expresarse mediante la desigualdad $36\pi V^2 \leq A^3$ entre el área A y el volumen V de cualquier cuerpo cerrado tridimensional, verificándose el signo de igualdad sólo para la esfera.

***IX. PROBLEMAS DE EXTREMOS CON CONDICIONES DE CONTORNO.
RELACIÓN ENTRE EL PROBLEMA DE STEINER Y
EL DE LOS ISOPERÍMETROS**

Se obtienen resultados interesantes en los problemas de máximos y mínimos, cuando el dominio de la variable está restringido por condiciones de contorno. El teorema de Weierstrass, relativo a que una función continua en un dominio compacto alcanza un valor máximo y otro mínimo, no excluye la posibilidad de que alcance los valores extremos en el contorno del dominio. La función $u = x$ proporciona un ejemplo sencillo, casi trivial. Si x no está acotada y puede tomar cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$, el dominio B de la variable independiente es toda la recta numérica, por lo que la función $u = x$ no alcanza en ningún punto un máximo o un mínimo. Pero si el dominio B está limitado y se reduce, p. ej., a $0 \leq x \leq 1$, existe un máximo, 1, que la función alcanza en su extremo derecho, y un mínimo, 0, que la función alcanza en el extremo izquierdo. Sin embargo, ninguno de estos valores extremos está representado por una cumbre o una depresión en la gráfica de la función; no son extremos relativos respecto a un entorno completo. Cambian en cuanto se extiende el intervalo, puesto que siempre permanecen en los puntos extremos. En cambio, una verdadera «cumbre» o «depresión» de una función tiene siempre un carácter de máximo o mínimo respecto a un entorno completo del punto donde la alcanza y no queda afectada por ligeros cambios en

los límites. Un extremo de este tipo persiste, aun cuando varíe libremente la variable independiente en el dominio B , por lo menos en un entorno suficientemente pequeño. La distinción entre esos extremos relativos y los que alcanza en el contorno queda aclarada por numerosos contextos, aparentemente inconexos. Para las funciones de una variable, naturalmente, la distinción es la que existe entre las funciones monótonas y las que no lo son, lo que no conduce a ninguna observación particularmente interesante; pero existen numerosos ejemplos muy significativos de valores extremos alcanzados en el contorno del dominio de variabilidad, en el caso de las funciones de varias variables.

Esto puede ocurrir, p. ej., en el problema del triángulo de Schwarz; en este caso, el dominio de variabilidad de las tres variables independientes consta de todas las ternas de puntos, una en cada lado del triángulo ABC . La solución del problema entraña dos posibilidades: o se llega al mínimo, cuando cada uno de los tres puntos, P , Q , R , que varían independientemente, se encuentra dentro de los respectivos lados del triángulo, en cuyo caso el mínimo está dado por el triángulo órtico, o el mínimo se obtiene en la posición de contorno, cuando dos de los puntos P , Q , R coinciden con el extremo común de sus respectivos intervalos, en cuyo caso el «triángulo» mínimo inscrito es la altura correspondiente a este vértice contada dos veces. Así, el carácter de la solución es completamente distinto en uno y otro caso.

En el problema de Steiner de las tres ciudades, el dominio de variabilidad del punto P es todo el plano, del cual pueden considerarse como formando parte del contorno los puntos A , B y C . También aquí aparecen dos casos posibles, que proporcionan tipos enteramente distintos de solución. O se alcanza el mínimo en el interior del triángulo ABC , caso de los tres ángulos iguales, o se obtiene en un punto C del contorno. Existe un par de casos análogos para el problema complementario.

Como ejemplo final podemos considerar el problema de los isoperímetros, modificado mediante condiciones restrictivas de contorno. Obtendremos así una sorprendente relación entre este problema y el de Steiner, y al mismo tiempo el ejemplo quizá más sencillo de un nuevo tipo de problema de extremos. En el problema original, la variable independiente, o sea, la curva cerrada de longitud dada, podía desviarse arbitrariamente de la forma circular, y cualquier curva así deformada es admisible, por lo que obtenemos un auténtico mínimo libre o relativo. Examinemos ahora el siguiente problema modificado: las curvas C en consideración deberán contener en su inte-

rior o pasar por tres puntos dados, P, Q, R , estando dada el área A y debiendo hacerse mínima la longitud L . Esto representa una verdadera condición de contorno.

Es evidente que si el área dada A es suficientemente grande, los tres puntos P, Q, R no afectarán en nada al problema. Siempre que el círculo circunscrito al triángulo PQR tenga área menor o igual que A , la solución será simplemente un círculo de área A que incluya a los tres puntos. Pero, ¿qué ocurre si A es menor? Nos contentaremos con enunciar la solución omitiendo la demostración detallada,

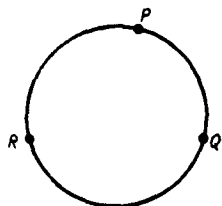


FIG. 231.



FIG. 232.

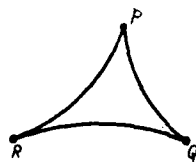


FIG. 233.

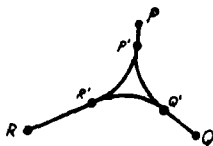


FIG. 234.

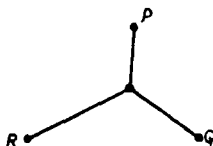


FIG. 235.

Figs. 231-35.—Figuras isoperimétricas que tienden a la solución del problema de Steiner.

aunque no está fuera de nuestras posibilidades. Caractericemos las soluciones mediante una sucesión de valores de A que tienden a cero. Apenas el valor de A es menor que el área del círculo circunscrito, el círculo isoperimétrico primitivo se descompone en tres arcos, todos del mismo radio, que forman un triángulo curvilíneo convexo de vértices P, Q, R (Fig. 232). Este triángulo es la solución y sus dimensiones pueden determinarse por el valor dado de A . Si A continúa disminuyendo, aumentará el radio de esos arcos, tendiendo a ser segmentos rectilíneos, hasta que A es exactamente igual al área del triángulo PQR , en cuyo caso la solución es este mismo triángulo. Si A sigue disminuyendo, la solución constará otra vez de tres arcos circulares, todos del mismo radio y que forman un triángulo de vértices P, Q, R (Fig. 233). Si A continúa disminuyendo, llegará un momento en el que, para un cierto valor de A , dos de los arcos cóncavos

serán mutuamente tangentes en un vértice R . Si A disminuye todavía más, no será ya posible construir un triángulo curvilíneo del tipo anterior. Se presenta un nuevo fenómeno: todavía la solución es un triángulo curvilíneo cóncavo, pero uno de los vértices R' se ha separado del correspondiente vértice R , y la solución es ahora el triángulo PQR' más el segmento RR' contado dos veces (puesto que pasa de R a R' y de R' a R). Este segmento rectilíneo es tangente a los dos arcos, que son a su vez tangentes entre sí en R' . Si A sigue decreciendo, este fenómeno de separación se presentará también en los otros vértices. Eventualmente, se obtiene como solución un triángulo curvilíneo compuesto por tres arcos circulares de igual radio, tangentes entre sí y que forman un triángulo curvilíneo equilátero $P'Q'R'$, además de tres segmentos rectilíneos, contados dos veces cada uno, $P'P$, $Q'Q$, $R'R$ (Fig. 234). Si, finalmente, A se hace cero, el triángulo curvilíneo se reduce a un punto, volviendo a la solución del problema de Steiner. Se ve así que esta última circunstancia es el caso límite del problema modificado de los isoperímetros.

Si P , Q , R forman un triángulo obtuso con un ángulo mayor de 120° , el proceso anterior conduce a la solución del problema de Steiner, pues los arcos circulares tienden hacia el vértice del ángulo obtuso. Mediante procesos de límite de naturaleza análoga pueden obtenerse las soluciones del problema de Steiner generalizado (Figs. 216-218).

X. EL CÁLCULO DE VARIACIONES

1. **Introducción.**—El problema de los isoperímetros es sólo un ejemplo, probablemente el más antiguo de todos, de un tipo muy amplio de problemas, sobre los que llamó la atención Johann Bernoulli en 1696. En *Acta Eruditorum*, el gran periódico científico de la época, propuso el siguiente problema de la braquistocrona: imagínese una partícula obligada a deslizarse sin rozamiento a lo largo de cierta curva, que une un punto, A , con otro situado más abajo, B . Si se permite que la partícula descienda exclusivamente bajo la acción de la gravedad, se pregunta qué curva deberá elegirse para que el tiempo empleado en el descenso sea mínimo. Es fácil ver que la partícula empleará diferentes intervalos de tiempo al variar las trayectorias. De ningún modo proporciona la línea recta la trayectoria de tiempo mínimo, así como tampoco constituye la solución un arco de circunferencia o cualquier otra curva elemental. Bernoulli se enorgulleció de haber encontrado una solución maravillosa, que no quiso publicar inmediatamente para incitar a los grandes matemáticos de la época a

probar su habilidad en este nuevo tipo de cuestiones matemáticas. En particular, desafió a su hermano mayor Jacob, con quien estaba entonces profundamente enemistado y a quien públicamente había calificado de incompetente para resolver el problema. Los matemáticos reconocieron inmediatamente que el problema de la braquistocrona era de un carácter enteramente distinto. Mientras que, hasta entonces, en los problemas estudiados mediante el cálculo diferencial, la cantidad cuyo mínimo se buscaba dependía sólo de una o más variables numéricas, en este problema la cantidad que se consideraba, es decir, el tiempo necesario para el descenso, dependía de *toda la curva*, lo que constituye una diferencia esencial, que ponía el problema fuera del alcance del cálculo diferencial o de cualquier otro método conocido en aquella época.

La novedad del problema (al parecer no se comprendió claramente entonces que el de los isoperímetros es de la misma naturaleza) fas-

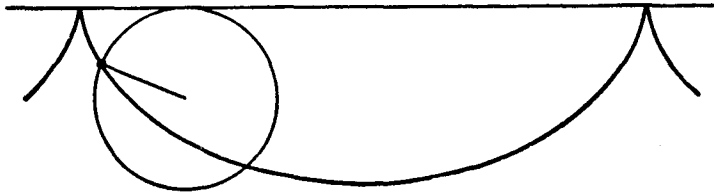


FIG. 236.—La cicloide.

cinó a los matemáticos contemporáneos, tanto más al conocerse que la solución la proporcionaba la cicloide, curva que había sido descubierta poco tiempo antes. (Recordemos la definición de la cicloide: es el lugar de un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una recta, según se ve en la figura 236.) Esta curva había sido relacionada con algunos interesantes problemas de mecánica, especialmente con la construcción de un péndulo ideal. Huygens había descubierto que un punto ideal provisto de masa, que oscile sin rozamiento bajo la acción de la gravedad en una cicloide vertical, tiene un período de oscilación independiente de la amplitud del movimiento. En una trayectoria circular, como la de un péndulo ordinario, esa independencia es sólo aproximada, lo que se tenía por un inconveniente en la utilización del péndulo en los relojes de precisión. Se había honrado a la cicloide llamándola tautocrona; pero entonces se le asignó el nuevo título de braquistocrona.

2. El cálculo de variaciones. El principio de Fermat en óptica. Entre los diferentes métodos de resolver el problema de la braquis-

tozona, que encontraron Bernoulli y otros investigadores, expondre-mos el más original. Los primeros métodos eran de un carácter más o menos especial, adaptados al problema particular en cuestión. Pero no pasó mucho tiempo sin que Euler y Lagrange (1736-1813) desarrollaran métodos más generales para resolver problemas de extremos, en los cuales el elemento independiente no era ya una sola variable numérica o un número finito de tales variables, sino toda una curva o función e incluso un sistema de funciones. Se llamó *cálculo de variaciones* al nuevo método que permitía resolver dichos problemas.

No es posible describir aquí los aspectos técnicos de esta rama de la matemática o profundizar en la discusión de problemas concretos. El cálculo de variaciones tiene numerosas aplicaciones en física y hace ya mucho tiempo que se

observó que los fenómenos naturales se ajustan a menudo a algún principio de máximos y mínimos. Como ya hemos visto, Herón de Alejandría comprendió que podía describirse la reflexión de un rayo luminoso en un espejo plano mediante un principio de mínimo. En el siglo xvii, Fermat dió un

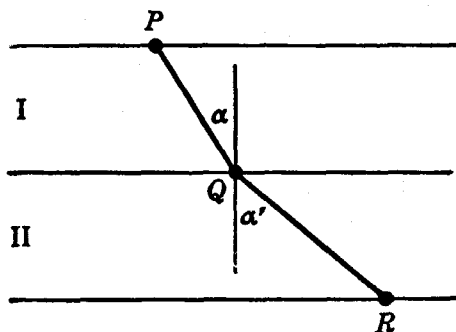


FIG. 237.—Refracción de un rayo luminoso.

paso más en esta dirección, al observar que la ley de la refracción de la luz puede expresarse también mediante un principio de mínimo. Se sabe que la trayectoria de un rayo luminoso, que pasa de un medio homogéneo a otro de la misma naturaleza, se desvía en la superficie de separación de ambos. Así, en la figura 237, un rayo luminoso que parte de P en el medio superior donde la velocidad es v , hacia R , que se encuentra en el medio inferior donde la velocidad es w , seguirá la trayectoria PQR . La ley empírica encontrada por Snell (1591-1626) afirma que la trayectoria consta de dos segmentos rectilíneos, PQ y QR , que forman con la normal dos ángulos, α y α' , determinados por la condición: $\text{sen } \alpha / \text{sen } \alpha' = v/w$. Por medio del cálculo, Fermat demostró que esta trayectoria es tal que el tiempo necesario para que el rayo de luz pase de P a R es mínimo; es decir, menor de lo que sería si siguiera cualquier otra trayectoria. De esta forma, la ley de reflexión de Herón fué complementada 1600 años más tarde mediante otra, de refracción, análoga a la primera e igualmente importante.

Fermat generalizó esta ley de tal modo que incluyera superficies curvas de separación de los diferentes medios, como ocurre en las lentes esféricas. También en este caso se cumple la ley, pues la luz sigue una trayectoria tal que requiere un tiempo mínimo, comparado con el que sería necesario siguiendo otra trayectoria distinta entre los mismos dos puntos. Finalmente, Fermat consideró cualquier sistema óptico en el cual la velocidad de la luz varíe de manera determinada de un punto a otro, como ocurre en la atmósfera. Dividió el medio continuo, pero no homogéneo, en capas paralelas, en cada una de las cuales la velocidad de la luz es aproximadamente constante, e imaginó que este medio quedaba reemplazado por otro, en el cual la velocidad en cada capa es realmente constante. Entonces pudo aplicar nuevamente su principio, pasando de una capa a otra. Haciendo que el espesor de las capas tendiera a cero, obtuvo *el principio general de Fermat de la óptica geométrica*: en un medio no homogéneo, un rayo luminoso que pasa de un punto a otro sigue aquella trayectoria para la cual es mínimo el tiempo respecto al que requiere cualquier otra que una los mismos dos puntos. Este principio ha tenido una importante trascendencia, no sólo desde el punto de vista teórico, sino en la práctica de la óptica geométrica. Aplicando a este principio las técnicas del cálculo de variaciones se obtienen las bases para calcular los sistemas de lentes.

En otras ramas de la física los principios de mínimo han adquirido también una importancia enorme. Se observó que se obtiene el equilibrio estable de un sistema mecánico si se dispone de tal forma que su «energía potencial» sea mínima. Como ejemplo, consideraremos una cadena homogénea y flexible, suspendida por sus extremos y sobre la que actúa libremente la fuerza de la gravedad. La cadena adoptará aquella forma según la cual su energía potencial es mínima. En este caso, la energía potencial está determinada por la altura del centro de gravedad respecto a cierto eje fijo. La curva que adopta la cadena en suspensión se llama catenaria, y tiene cierto parecido con la parábola.

No sólo las leyes del equilibrio, sino también las del movimiento, están dominadas por principios de máximo o mínimo. Fué Euler el primero que tuvo ideas claras acerca de estos principios, aunque algunos temperamentos, inclinados hacia la especulación mística y filosófica, como Maupertius (1698-1759), no pudieron separar las proposiciones matemáticas de ciertas ideas peregrinas acerca de la «intención de Dios de regular los fenómenos físicos mediante un principio general de la más alta perfección». Los principios físicos variacionales de Euler, redescubiertos y ampliados por el matemático irlandés W. R. Hamilton (1805-1865), han demostrado ser poderosísimas herramientas

en mecánica, óptica y electrodinámica, con numerosas aplicaciones a la ingeniería. El desarrollo reciente de la física—relatividad y teoría de los cuantos—está lleno de ejemplos que revelan el poder del cálculo de variaciones.

3. El método de Bernoulli y el problema de la braquistocrona.

El primer método desarrollado por Jacob Bernoulli para tratar el problema de la braquistocrona puede comprenderse sin poseer grandes conocimientos técnicos. Se sabe por mecánica que si un grave cae desde A sin velocidad inicial, siguiendo una curva C , tendrá en cualquier punto P una velocidad proporcional a \sqrt{h} , siendo h la distancia vertical entre A y P ; es decir, $v = c\sqrt{h}$, donde c es una constante. Reemplacemos ahora el problema dado por otro ligeramente distinto. Dividamos el espacio en numerosas y delgadas capas horizontales, cada una de espesor d , y supongamos

por un momento que la velocidad de la partícula en movimiento no varía con continuidad, sino por pequeños saltos, al pasar de una capa a otra; es decir, que en la primera capa, adyacente a A , la velocidad es $c\sqrt{d}$; en la segunda, $c\sqrt{2d}$, y en la n -ésima, $c\sqrt{nd} =$

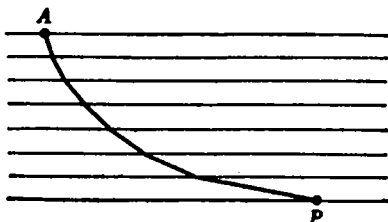


FIG. 238.

$= c\sqrt{h}$, siendo h la distancia vertical de A a P (Fig. 238). Si nos limitamos a este problema, sólo existe en realidad un número finito de variables. Al ser rectilínea la trayectoria en cada capa, no se plantea problema de existencia; la solución debe ser una poligonal, y la única dificultad consiste en determinar sus vértices. De acuerdo con el principio de mínimo de la ley de la refracción simple, en cada par de capas sucesivas el movimiento de P a R pasando por Q debe ser tal que, suponiendo P y R fijos, Q proporciona la curva de tiempo mínimo. Por tanto, puede aplicarse la siguiente «ley de refracción»:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{nd}} = \frac{\text{sen } \alpha'}{\sqrt{(n+1)d}}$$

Por aplicación reiterada de este razonamiento se obtiene la siguiente sucesión de igualdades:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\sqrt{d}} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\sqrt{2d}} = \dots, \quad [1]$$

donde α_n es el ángulo entre la poligonal en la n -ésima capa y la vertical.

Bernoulli supone ahora que el espesor d se hace cada vez más pequeño y tiende a cero, de manera que el polígono que se acaba de obtener como solución del problema aproximado tiende a la solución buscada del problema original. Este paso al límite no afecta a las igualdades [1], por lo que Bernoulli concluye que la solución debe ser una curva C , que goce de la siguiente propiedad: si α es el ángulo formado por la tangente y la vertical en cualquier punto P de C , y h es la distancia vertical de P a la horizontal que pasa por A , $\sin \alpha / \sqrt{h}$ es constante para todos los puntos P de C . Es fácil demostrar que esta propiedad caracteriza a la cicloide.

La «demostración» de Bernoulli es un ejemplo típico de una clase de razonamiento matemático, ingenioso y no exento de valor, pero que, al propio tiempo, carece de rigor. Existen varias suposiciones tácitas en la argumentación cuya justificación sería más complicada y engorrosa que la propia demostración; p. ej., se ha supuesto que existía una solución C y que la solución del problema aproximado tendía a la verdadera. Ciertamente, merece una atenta discusión el valor intrínseco de las consideraciones heurísticas de este tipo, pero esto nos llevaría demasiado lejos.

4. Geodésicas en una esfera. Geodésicas y maxi-mínimos.—En la introducción de este capítulo mencionamos el problema de determi-

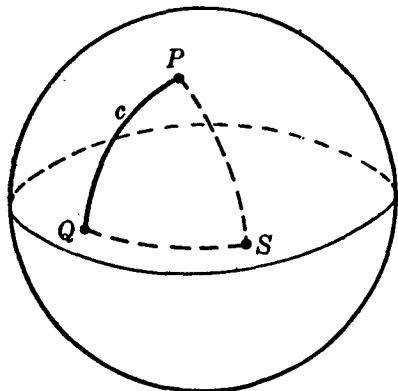


FIG. 239.—Geodésicas en una esfera.

minar el arco mínimo que une dos puntos dados de una superficie. Sobre una esfera, se demuestra en geometría elemental que esas «geodésicas» son arcos de círculos máximos. Sean P y Q dos puntos (no diametralmente opuestos) de una esfera, y c el menor de los arcos del círculo máximo que los une. Se plantea entonces la cuestión de saber qué representa el arco mayor c' de este círculo máximo. Ciertamente, no proporciona ni la longitud máxima ni la mínima entre todas las curvas que unen

P con Q , puesto que pueden trazarse entre ambos puntos curvas de longitud arbitrariamente grande. La respuesta es que c' resuelve un problema de maxi-mínimo. Consideremos un punto S sobre un círculo máximo que separe a P y Q ; se trata de determinar la curva esférica

de longitud mínima que une P con Q pasando por S . Naturalmente, el mínimo viene dado por una curva formada por dos pequeños arcos de círculo máximo, PS y QS . Busquemos ahora una posición del punto S de forma que esta distancia mínima PSQ sea la mayor posible. La solución es la siguiente: S debe ser tal que PSQ sea el arco mayor c' del círculo máximo PQ . Podemos modificar el problema buscando primero la trayectoria de longitud mínima que une P con Q pasando por n puntos prefijados S_1, S_2, \dots, S_n de la esfera y tratar después de determinar los puntos S_1, S_2, \dots, S_n de tal manera que esta distancia mínima sea la mayor posible. La solución viene dada por una trayectoria sobre el círculo máximo que une P con Q , pero que se arrolla tantas veces alrededor de la esfera que pasa exactamente n veces por los puntos diametralmente opuestos a P y Q .

Este ejemplo de problema de maxi-mínimo es típico de una clase muy amplia de cuestiones del cálculo de variaciones que han sido estudiadas con gran éxito mediante métodos desarrollados por Morse y otros autores.

XI. SOLUCIÓN EXPERIMENTAL DE PROBLEMAS DE MÍNIMO. EXPERIMENTOS CON PELÍCULAS

1. Introducción.—Generalmente es muy difícil, y a veces imposible, resolver explícitamente los problemas variacionales mediante fórmulas o construcciones geométricas en función de elementos simples ya conocidos. En lugar de ello, debemos conformarnos muchas veces con demostrar la existencia de una solución bajo determinadas condiciones e investigar después sus propiedades. En múltiples casos, cuando dicha demostración de existencia resulta ser más o menos dificultosa, es interesante estudiar las condiciones matemáticas del problema mediante ciertos artificios físicos o, mejor dicho, considerar el problema matemático como una interpretación de un fenómeno físico. La existencia de este último representará entonces la solución del problema matemático. Naturalmente, esto sólo constituye una justificación plausible sin llegar a ser una demostración matemática, pues queda todavía una cuestión por dilucidar, a saber: si la interpretación matemática del hecho físico es adecuada en sentido estricto, o si proporciona sólo una imagen poco apropiada de la realidad física. Algunas veces tales experimentos, aunque efectuados sólo en la imaginación, son convincentes incluso para los matemáticos. En el siglo XIX, Riemann descubrió muchos de los teoremas fundamentales de la teoría de funciones razonando acerca de sencillos experi-

mentos relacionados con el flujo de la electricidad en láminas metálicas delgadas.

En esta sección vamos a discutir, basándonos en demostraciones experimentales, uno de los problemas más profundos del cálculo de variaciones; el llamado problema de Plateau, debido a que este físico belga (1801-1883) llevó a cabo interesantes experimentos sobre el particular. El problema en sí mismo es mucho más antiguo, remontándose su origen hasta las fases iniciales del cálculo de variaciones. En su forma más simple consiste en encontrar la superficie de área mínima limitada por un contorno cerrado dado en el espacio. Discutiremos también ciertos experimentos relacionados con cuestiones conexas, todo lo cual servirá para iluminar algunos de nuestros resultados anteriores, así como ciertos problemas matemáticos de un nuevo tipo.

2. Experimentos con soluciones jabonosas.—Matemáticamente, el problema de Plateau está relacionado con la solución de una *ecuación en derivadas parciales* o con un sistema de tales ecuaciones. Euler

demonstró que todas las superficies mínimas (no contenidas en un plano) deben tener forma de silla de montar, y que su curvatura media¹ en cada punto ha de ser cero. Durante el último siglo se probó la existencia de solución para numerosos casos especiales, pero dicha existencia sólo ha sido demostrada recientemente en el caso general por J. Douglas y T. Radò.

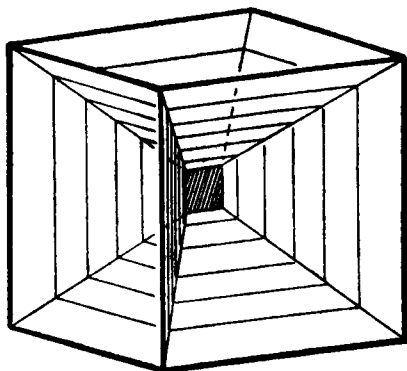


FIG. 240.—Estructura cúbica con una película jabonosa formada por 13 superficies casi planas.

Los experimentos de Plateau proporcionan inmediatamente soluciones para contornos muy generales. Si se sumerge cual-

quier contorno cerrado construido con alambre en un líquido de baja tensión superficial, al extraerlo, el contorno estará cubierto por una película que adopta la forma de una superficie de área mínima. (Se supone que puede despreciarse la gravitación y que lo mismo ocurre

¹ La curvatura media de una superficie en un punto P se define de la siguiente manera: consideremos la normal a la superficie en P y el haz de planos que pasan por ella. Estos planos cortan a la superficie según curvas que, en general, tienen curvatura diferente en P . Si consideramos las curvas de curvatura máxima y mínima, se llama curvatura media de la superficie P a la media aritmética de aquéllas (en general, los dos planos que dan las curvas de curvatura máxima y mínima son perpendiculares).

con otras fuerzas que se oponen a la tendencia de la película a adoptar una posición de equilibrio estable mediante la formación de una superficie de área mínima, que corresponde al menor valor posible de la energía potencial debida a la tensión superficial.) Una buena receta para preparar un líquido adecuado es la siguiente: disuélvase 10 g de oleato sódico puro en 500 g de agua destilada y mézclense 15 unidades (en volumen) de esa solución con 11 de glicerina. Las películas obtenidas con esta solución sobre estructuras de alambre de cobre son relativamente estables. Las estructuras no deberán sobrepasar un diámetro total de 10 a 12 cm.

Con este método es muy fácil «resolver» el problema de Plateau, dando a la estructura de alambre la forma deseada. Se obtienen muy bellos modelos con estructuras de alambre de forma poligonal, formadas por una sucesión de aristas de un poliedro regular. En particular, es interesante sumergir una estructura cúbica completa en el líquido. Resulta primero un sistema de diferentes superficies que se cortan mutuamente, formando ángulos de 120° . (Si se retira cuidadosamente el cubo, existirán 13 superficies aproximadamente planas.) Después podemos perforar y destruir varias de estas superficies hasta que quede una sola limitada por un polígono cerrado. De esta manera pueden formarse bellísimas superficies. El mismo experimento puede hacerse con un tetraedro.

3. Nuevos experimentos sobre el problema de Plateau.—El propósito que se persigue con estos experimentos es mucho más amplio que el de las demostraciones originales de Plateau. En los últimos años se ha estudiado el problema de las superficies mínimas, no sólo con uno sino con un número cualquiera de contornos, siendo además la estructura topológica de la superficie mucho más complicada; p. ej., puede ser una superficie de una sola cara o de un género diferente de cero. Estos problemas más generales proporcionan una asombrosa variedad de fenómenos geométricos que pueden ponerse de manifiesto mediante experimentos con películas de solución jabonosa. A este respecto, es sumamente interesante efectuar los experimentos con estructuras de alambre flexible y estudiar el efecto de las deformaciones del contorno dado sobre la película.

Describiremos varios ejemplos:

1) Si el contorno es una circunferencia obtenemos un disco circular plano. Si deformamos continuamente el contorno, parece que la superficie mínima debería mantener siempre el carácter topológico de un disco, pero no ocurre así. Si se deforma el contorno hasta que adopte la forma indicada en la figura 241, obtenemos una superficie

mínima que ya no es simplemente conexa como el disco, sino que se ha convertido en una cinta de Moebius de una sola cara. Inversamente, podemos iniciar nuestro experimento con esta estructura y una pelí-

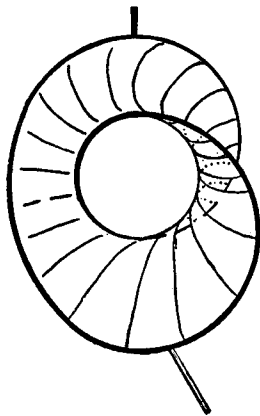


FIG. 241.—Cinta de Moebius de una sola cara.



FIG. 242.—Superficie de dos caras.

cula de solución con la forma de una superficie de Moebius, y deformar la estructura mediante agarraderas soldadas a la misma (figura 241). En este experimento llega un momento en que cambia de

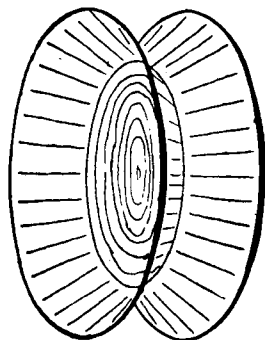


FIG. 243.—Sistema de tres superficies.

repente el carácter topológico de la película, y la superficie adquiere nuevamente el tipo de un disco simplemente conexo (figura 242). Invertiendo la deformación, se obtiene de nuevo una superficie de Moebius. En este experimento alternativo de deformación, la transformación de la superficie simplemente conexa en la cinta de Moebius ocurre en una etapa posterior. Esto prueba que debe existir toda una gama de diferentes formas del contorno, para las cuales la superficie de Moebius y la simplemente conexa son estables; es decir, proporcionan mínimos relativos. Pero

cuando la superficie de Moebius tiene un área mucho menor que la otra, esta última resulta demasiado inestable para que pueda formarse.

2) Podemos producir una superficie mínima de revolución entre dos circunferencias. Después de retirar la estructura de alambre de la solución, encontramos, no una superficie simple, sino tres superficies

que se cortan bajo ángulos de 120° , una de las cuales es un simple disco circular paralelo a los círculos del contorno (Fig. 243). Al destruir esta superficie intermedia, aparece la clásica catenoide [superficie que se obtiene por revolución de la catenaria (pág. 392) alrededor de una recta perpendicular a su eje de simetría]. Si se separan las dos circunferencias del contorno, llega un momento en que es inestable la superficie mínima doblemente conexa (catenoide), y en este momento se convierte en dos discos distintos. Naturalmente, el fenómeno no es reversible.

3) Otro ejemplo interesante lo proporcionan las estructuras de las figuras 244 a 246, sobre las cuales pueden extenderse tres superficies mínimas diferentes. Cada una está limitada por la misma curva sim-

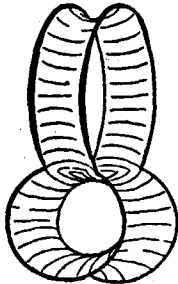


FIG. 244.

Estructura que produce tres superficies distintas, de géneros 0 y 1.

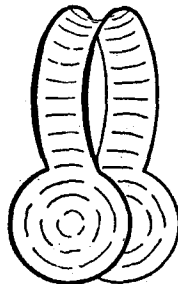


FIG. 245.

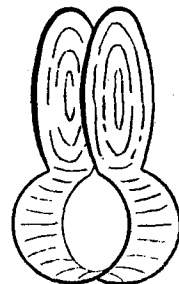


FIG. 246.

ple cerrada; una (Fig. 244) tiene género 1, mientras que las otras dos son simplemente conexas y, en cierto modo, simétricas. Estas dos últimas tienen igual área si el contorno es completamente simétrico. Pero si no es así, una de ellas proporciona el mínimo absoluto del área y la otra sólo da un mínimo relativo, siempre que el mínimo se busque entre las superficies simplemente conexas. La posibilidad de la solución de género 1 depende de que, al admitir superficies de ese tipo, es posible obtener áreas menores que en el caso en que se exija que la superficie sea simplemente conexa. Deformando radicalmente la estructura de alambre, debe llegar un momento en que esto ya no es posible; entonces, se hace cada vez mayor la inestabilidad de la superficie de género 1, transformándose repentina y discontinuamente en la superficie simplemente conexa y estable, representada en las figuras 245 y 246. Si iniciamos el experimento con una de esas superficies simplemente conexas (Fig. 246), podemos deformarla de tal manera que la otra superficie representada en la figura 245, que es también

simplemente conexa, sea mucho más estable. La consecuencia es que, en un cierto momento, se producirá una transición discontinua de la una a la otra. Invirtiendo lentamente la deformación, volvemos a la

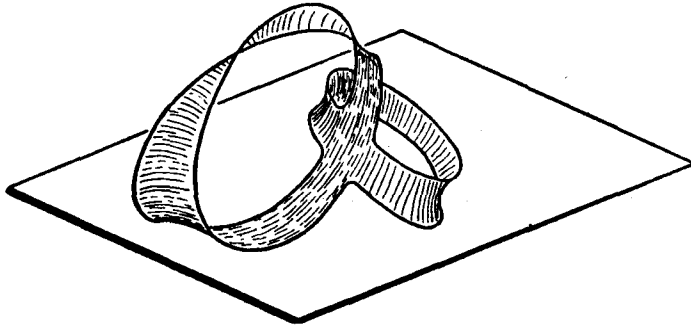


FIG. 247.—Superficie mínima de una sola cara, de estructura topológica superior y contorno único.

posición inicial de la estructura, aunque ahora aparece la otra superficie. Podemos repetir el fenómeno en dirección opuesta, obteniendo alternativamente, mediante transformaciones discontinuas, ambos tipos. Si se procede con cuidado, es posible transformar discontinuamente una de las dos soluciones simplemente conexa en la de género 1. Con este fin, debemos acercar todo lo posible las partes en forma de disco, con lo que la superficie de género 1 adquiere una notable estabilidad. Durante este experimento, ocurre algunas veces que aparecen primero películas intermedias de solución, que es necesario destruir antes que aparezca la superficie de género 1.

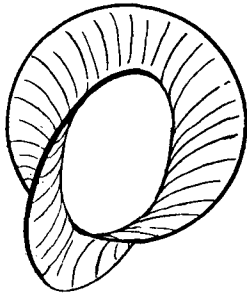


FIG. 248.—Curvas que se cruzan.

Este ejemplo muestra no sólo la posibilidad de la existencia de diferentes soluciones del mismo carácter topológico, sino también de otros tipos distintos en la misma estructura de alambre. Además, se deduce de nuevo la posibilidad de transformaciones discontinuas de una solución en otra, al variar con continuidad las condiciones del problema. Es fácil construir modelos más complicados de la misma clase y estudiar experimentalmente su comportamiento.

Un fenómeno interesante es la aparición de superficies mínimas limitadas por dos o más curvas cerradas que se cruzan. Para dos circunferencias se obtiene la superficie representada en la figura 248. Si,

en este ejemplo, se colocan los círculos de forma que sean perpendiculares entre sí y que la recta de intersección de sus planos sea un diámetro común, aparecerán dos formas simétricamente opuestas de esta superficie, con igual área. Si se varía ligeramente la posición mutua de ambos círculos, la superficie variará continuamente, si bien para cada posición existe sólo una superficie mínima absoluta, siendo la otra un mínimo relativo. Si se altera la posición de ambos círculos de tal modo que se forme el mínimo relativo, llegará un momento en que se transforme discontinuamente en el mínimo absoluto. En este caso ambas superficies mínimas posibles tienen el mismo carácter topológico, como las de las figuras 245 y 246, cada una de las cuales puede transformarse discontinuamente en la otra mediante una leve deformación de la estructura.

4. Soluciones experimentales de otros problemas matemáticos.—Debido a la acción de la tensión superficial, una película líquida sólo está en equilibrio estable cuando su área es mínima. Es ésta una fuente inagotable de experimentos, plenos de significado matemático. Si se permite que alguna parte del contorno de la película se mueva libre-

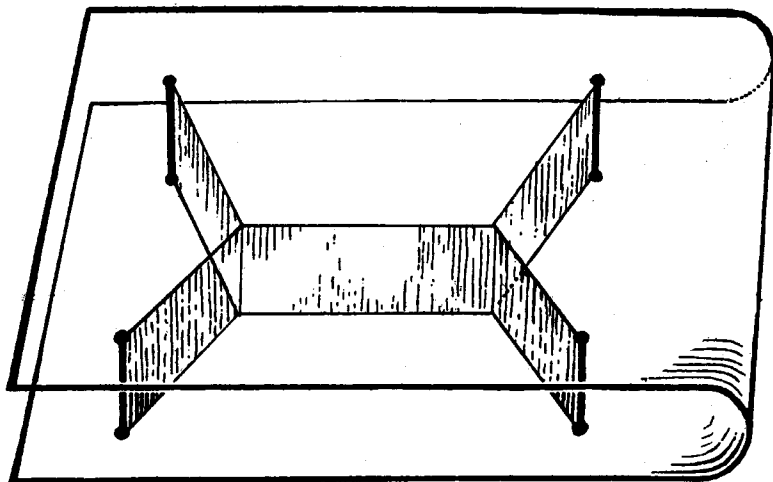


FIG. 249.—Demostración de la conexión mínima entre cuatro puntos.

mente sobre superficies dadas, la película será perpendicular en dicho contorno a la superficie prescrita.

Pòdemos utilizar este fenómeno para obtener curiosas demostraciones del problema de Steiner y sus generalizaciones (véanse páginas 364-71). Dos placas paralelas de vidrio o de algún material plás-

tico transparente están unidas mediante tres o más barras perpendiculares. Si sumergimos este artificio en una solución jabonosa, al extraerlo nuevamente veremos que la película forma un sistema de planos verticales entre las placas que unen las barras citadas. La proyección que aparece sobre las placas de vidrio constituye la solución del problema considerado en la página 369.

Si las placas no son paralelas, o las barras no son perpendiculares a las mismas, o bien se hace uso de placas curvadas, las curvas for-

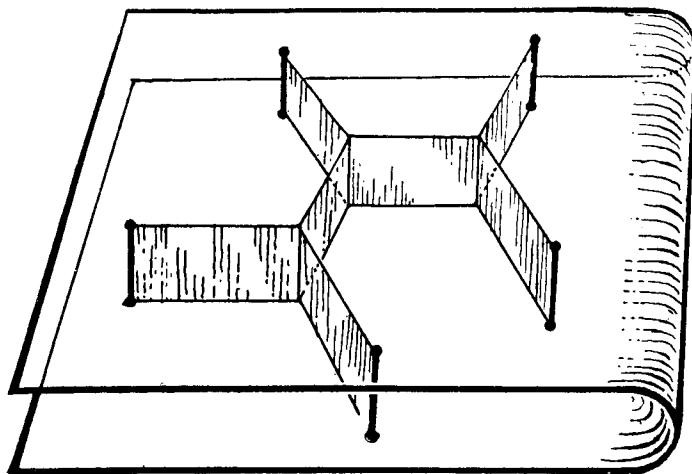


FIG. 250.—Conexión mínima entre cinco puntos.

madas por la película sobre las placas no serán ya rectilíneas, y constituyen ilustraciones de nuevos problemas variacionales.

El aspecto de la intersección de tres hojas de una superficie mínima que se cortan bajo ángulos de 120° puede considerarse como una generalización a más dimensiones de ciertos fenómenos relacionados con el problema de Steiner. Esto resulta evidente si, p. ej., unimos dos puntos del espacio, A y B , mediante tres curvas, y estudiamos el sistema estable correspondiente de películas de solución jabonosa. Como caso más sencillo consideremos que una de las curvas es el segmento rectilíneo AB , y las otras, dos arcos circulares congruentes. El resultado aparece en la figura 251. Si los planos de los arcos forman un ángulo menor de 120° , se obtienen tres superficies que se cortan bajo ángulos de 120° ; si se giran los dos arcos, de tal modo que aumente el ángulo formado, la solución cambia continuamente hasta convertirse en dos segmentos circulares planos.

Unamos ahora A y B mediante tres líneas más complicadas; como ejemplo tomaremos tres quebradas, cada una de ellas compuesta por las tres aristas del mismo cubo que unen dos vértices opuestos diagonalmente. Se obtienen así tres superficies congruentes que se cortan

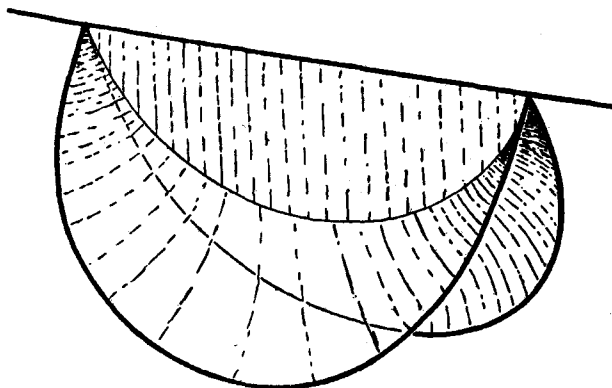


FIG. 251.—Superficies que se cortan bajo ángulos de 120° , tendidas entre tres alambres que unen dos puntos.

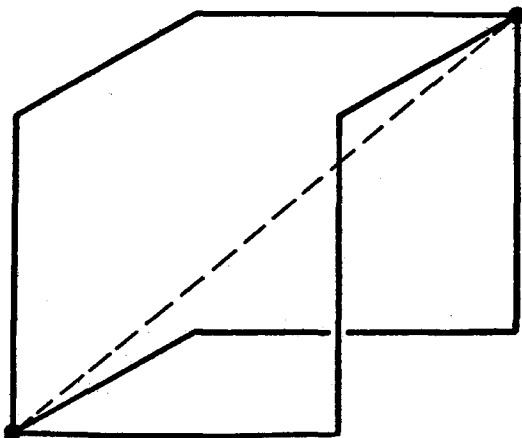


FIG. 252.—Tres quebradas que unen dos puntos.

en la diagonal del cubo. (Se consigue este sistema de superficies a partir del representado en la figura 240, destruyendo las películas adyacentes a tres aristas adecuadamente elegidas.) Si podemos desplazar las quebradas que unen A con B , veremos que la línea de triple intersección se ha convertido en una curva, pero conservándose los ángulos de 120° (Fig. 252).

Todos los casos en que se cortan tres superficies mínimas según curvas determinadas son, fundamentalmente, de naturaleza análoga, y constituyen generalizaciones del problema plano de unir n puntos mediante un sistema mínimo de líneas.

Finalmente, debemos decir algunas palabras sobre las burbujas de jabón. La burbuja esférica de jabón prueba que entre todas las superficies cerradas que incluyen un volumen dado (definido por el aire encerrado en ella), la esfera tiene superficie mínima. Si consideramos burbujas de jabón de volumen dado, que tienden a contraerse hasta adquirir una superficie mínima, pero cuyas transformaciones están restringidas por ciertas condiciones, las superficies resultantes no

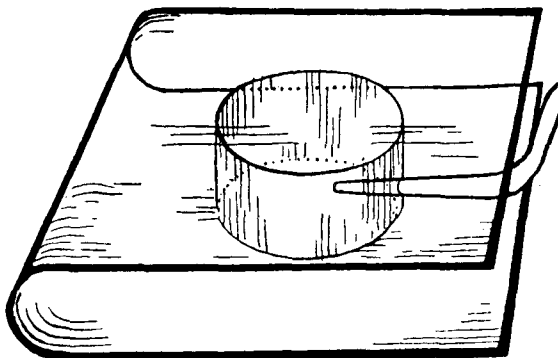


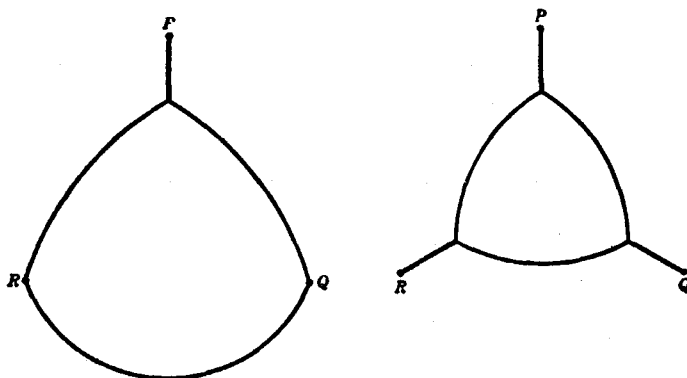
Fig. 253. — Demostración de que el círculo es la figura de perímetro mínimo entre las de igual área.

serán esferas, sino superficies de curvatura media constante, de las cuales la esfera y el cilindro circular constituyen ejemplos particulares.

Por ejemplo, introduzcamos una burbuja de jabón entre dos planos paralelos de cristal, que se han humedecido previamente con la solución jabonosa. Cuando la burbuja toca una de las placas, adopta súbitamente la forma de una semiesfera. En cuanto toca la otra, se transforma instantáneamente en un cilindro circular, demostrando así, de notabilísima manera, la propiedad isoperimétrica del círculo. La clave de este experimento consiste en que la película de solución jabonosa se ajusta verticalmente a la superficie. Formando burbujas de jabón entre dos placas unidas entre sí mediante barras perpendiculares, se puede dar una demostración experimental de los problemas discutidos en las páginas 387-89.

Podemos estudiar el comportamiento de la solución del problema isoperimétrico aumentando o disminuyendo el contenido de aire de

la burbuja mediante un tubo provisto de una punta muy fina. Absorbiendo el aire, no obtenemos, sin embargo, las figuras de la página 388, que consisten en arcos circulares tangentes entre sí. Al disminuir el volumen de aire contenido, los ángulos del triángulo curvilíneo no disminuirán (teóricamente) por debajo de 120° . Resultan las configuraciones indicadas en las figuras 254 y 255, que, a su vez, tienden a los segmentos rectilíneos de la figura 235 al tender el área a cero. La razón matemática de la imposibilidad de formar arcos tangentes con soluciones jabonosas radica en el hecho de que tan pronto como



Figs. 254 y 255.— Figuras isoperimétricas con condiciones de contorno.

la burbuja se separa de los vértices, las líneas que los unen no deben contarse dos veces. Las figuras 256 y 257 ilustran el resultado de estos experimentos.

***Ejercicio:** Estúdiense el correspondiente problema matemático de hallar un triángulo curvilíneo de área dada y tal que su perímetro, más los tres segmentos que unen los vértices a tres puntos dados, tenga longitud mínima.

Una estructura cúbica, en cuyo interior insuflamos una burbuja, proporcionará superficies de curvatura media constante y de base cuadrática, si la burbuja se expande fuera de la estructura. Si se extrae aire de ella mediante una pajita, se obtienen bellísimas estructuras que se transforman en la representada en la figura 258. Los fenómenos de estabilidad y transición entre los diferentes estados de equilibrio son una fuente de experimentos sumamente instructivos desde el punto de vista matemático. Los experimentos aclaran la teoría de los valores estacionarios, puesto que puede conseguirse que

las transiciones sean de tal naturaleza que conduzcan a un equilibrio inestable, lo que constituye un *estado estacionario*.

Por ejemplo, en la configuración cúbica de la figura 240 aparece una simetría, ya que un plano vertical en el centro une las doce superficies que salen de las aristas. De ahí que deban existir por lo menos otras dos posiciones de equilibrio, una con un cuadrado horizontal y la

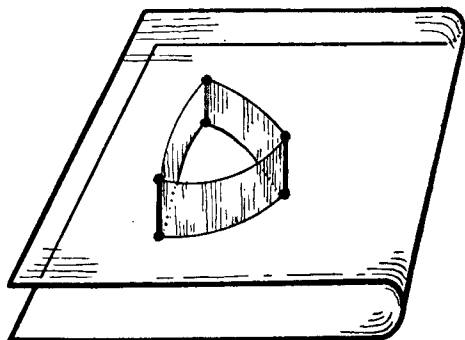


FIG. 256.

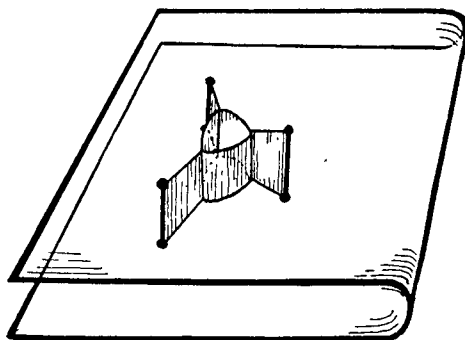


FIG. 257.

otra con un cuadrado vertical. En efecto: soplando aire contra las aristas de este cuadrado mediante un tubo muy fino, se puede reducir la estructura a una posición tal que el cuadrado se reduzca a un punto: el centro del cubo. Esta posición de equilibrio inestable se transforma inmediatamente en otra estable, que se deduce de la primera mediante una rotación de 90° .

Puede efectuarse un experimento similar que demuestra el resultado ya obtenido del problema de Steiner para cuatro puntos que forman un cuadrado (Figs. 219 y 220).

Si deseamos obtener las soluciones de tales problemas como casos límites de los isoperimétricos (p. ej., si queremos conseguir la figura 240 a partir de la 258), debemos extraer parte del aire contenido en la burbuja. Pero la figura 258 es completamente simétrica, y su límite, al tender a cero el contenido de la burbuja, será un sistema simétrico de 12 planos, que se cortan en el centro. Es posible observar

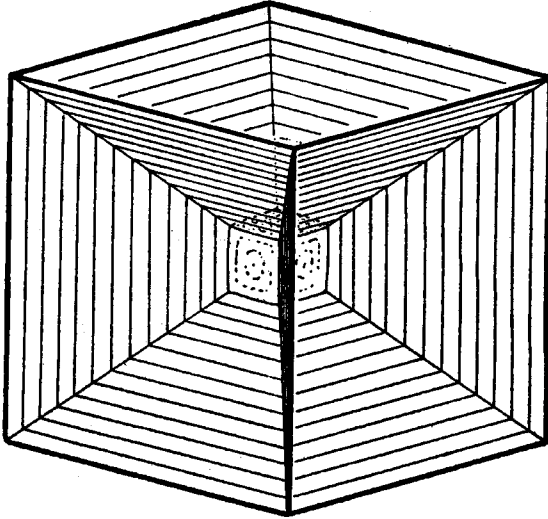


FIG. 258.

realmente este fenómeno, pero la configuración que se obtiene como límite no es estable y se transformará en una de las representadas en la figura 240. Utilizando un líquido algo más viscoso que el descrito anteriormente, puede observarse fácilmente todo el fenómeno. Lo expuesto demuestra que ni siquiera en el terreno de la física la solución de un problema precisa depender continuamente de los datos iniciales; pues en el caso límite correspondiente al volumen cero, la solución de la figura 240 no es límite de la dada por la 258, para el volumen ϵ , cuando ϵ tiende a cero.