Exámen final

8 jun, 2010

1. Demuestra 2 de los siguientes teoremas:
   a) Existe una infinidad de primos de la forma $4k+3$.
   b) El teorema chino de resíduos: dado un sistema de congruencias $x \equiv a_1 \mod n_1, \ldots, x \equiv a_k \mod n_k$, donde $(n_i, n_j) = 1$, para $i \neq j$, su conjunto de soluciones es una única clase de congrunecia módulo $n_1 n_2 \cdots n_k$.
   c) El teorema de Fermat: $x^p \equiv x \mod p$ para todo entero x y primo p.
   d) El teorema fundamental del aritmética.
2. En cada caso, hay que encontrar todos los valores enteros de x que cumplen la condición dada.
   a) $17x \equiv 77 \mod 100$.
   b) $x \equiv 39^{\left(39^{2010}\right)} \mod 100$.
   c) $x \equiv 11 \mod 13$ y $x \equiv 13 \mod 11$.
   d) $2222 \equiv x^{1111} \mod 65$.
3. Sea C el círculo con centro en $(3,4)$ y radio 5. Encuentra ecuaciones para las tangentes a C que pasan por los puntos de intersección de C con la recta $x+y=6$.
4. Encuentra una transformada de Mobius que manda el círculo del inciso anterior al $\{$eje de $y\} \cup \{\infty\}$.
5. Demuestra: 4 puntos distintos en $\mathbb{C}$ son cocíclicos (sobre el mismo círculo) o colineales (sobre la misma recta) ssi su razón cruzada está en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.