Material para examen parcial 1

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas y conocer ejemplos concretos de todos los siguientes términos:

La representación de un entero en una base, divisor, número primo/compuesto, máximo común divisor, primos relativos, resíduo y congruencia módulo n, clase de congruencia y recíproco módulo n.

Teoremas:

Hay que saber las demostraciones de los siguientes teoremas.

1. "El Teorema Fundamental de la Aritmética": todo entero > 1 se puede expresar como producto de primos de manera única (salvo el orden de los factores).
2. Existe una infinidad de primos.
3. Un entero a tiene un recíproco módulo $n > 1$ si y solo si $(a, n) = 1$.
4. $a|bc$, $(a, b) = 1 \Longrightarrow a|c$. ("El Lemma de Euclides").
5. El algoritmo de Euclides (para encontrar el maximo divisor comun de dos emteros).

Problemas:

Hay que saber las soluciones a todos los problemas de la tarea (menos los opcionales). Aquí están algunos problemas adicionales.

1. Cierto o Falso. Para cada uno de los incisos siguientes, decide si el inciso es cierto o falso. En caso de "cierto" hay que dar una demostración. En caso de "falso" hay que dar un contra-ejemplo.
   a) Si dos enteros son congruentes módulo 6 entonces son congruentes módulo 3.
   b) 3 no tiene un recíproco módulo 2010.
   c) Existe un número cuyo resíduo módulo 7 es 3 y su resíduo módulo 8 es 4.
   d) Existe un número cuyo resíduo módulo n es $n - 1$ para todo n en el rango $2 \leq n \leq 2010$.
   e) Un entero es un múltiplo de 4 si la suma de los dígitos en su representación en base 9 es un múltiplo de 4.
   f) Un entero es un múltiplo de 12 si es un múltiplo de 4 y es un múltiplo de 3.
   g) Un entero es un múltiplo de 54 si es un múltiplo de 9 y es un múltiplo de 6.
   h) El resíduo de un entero positivo es 1 módulo 8 si y solo si los últimos 3 dígitos en su representación en base 2 son 001.
   i) Un entero $< 1,000,000$ es primo si no tiene un divisor primo < 1000.
2. Para escribir un número en base 10 se requieren 10 dígitos. Para escribirlo en base 2 se requieren k dígitos. Encuentra el máximo y mínimo valor de k.

3. Mi mamá me llama cada 7 días y mi papá cada 8 días. ¿Cada cuándo me llaman los dos al mismo día?
4. Si hoy es lunes, ¿qué día de la semana será en 1000 diás? ¿en 10^{100} dias?
5. Usa el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de 2010 y 3010.
6. Demuestra por inducción que en la sucesión de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, en donde cada término, empezando con el tercero, es la suma de los dos anteriores, cada par de términos sucesivos son primos relativos.
7. Demuestra que el u'ltimo dígito en la representación de un entero no negativo a en una base $b > 1$ es el resíduo de a módulo b. En particular, $b|a$ si y solo si el último dígito es 0. Encuentra una interpretación similar a los último 2 dígitos de de la representación de a en la base b.
8. Se define el "factorial"de un entero $n \geq 0$ por $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ si $n > 0$ y $0! = 1$. Luego se denota el número $\frac{(a+b)!}{a!b!}$ por $\binom{a+b}{a}$. Por ejemplo, $5! = 120$ y $\binom{5}{3} = 10$.

   Demuestra:

   (a) Si $a, b \geq 0$ entonces $a!b!|(a+b)!$. Así que $\binom{a+b}{a}$ es un número entero.

   (b) Si p es primo entonces $p|\binom{p}{a}$ para todo a en el rango $0 < a < p$.

   (c) $\binom{n}{a} = \binom{n-1}{a} + \binom{n-1}{a-1}$ para todo $1 < a \leq n$.
9. En cada inciso, encontrar todos los valores enteros de x que satisfacen la condición dada.

   a) $2x + 3 \equiv 4 \mod 5$.

   b) $x^2 = 2y^2$ para algun entero y.

   c) $xy + 72z = 1$ para algunos enteros $y, z \in \mathbb{Z}$.

   d) $x > 0$ y $7^x \equiv 1 \mod 10$.

   e) $x^3 \equiv 2 \mod 5$.

   f) $2x \equiv 3 \mod 5$ y $7x \equiv 11 \mod 13$.