Tarea núm. 3

Para el jueves 11 feb 2010

Algunas definiciones y resultados (la mayoría vistos en clase):

- **Definición**. Un entero $d \neq 0$ *divide* a otro entero a (o es un *divisor* de a, o a es un *múltiplo* de d) si existe un entero m tal que $a = md$. Notación: $d|a$.
- **Definición**. El *máximo comun divisor* de dos enteros m, n se denota por (m, n); son *primos relativos* si $(m, n) = 1$.
- **Definición**. Un entero positivo p es *primo* si (1) $p > 1$ (2) sus únicos divisores positivos son 1 y p.
- **Proposición:** dados $n, d \in \mathbb{Z}$, donde $d > 1$, existen únicos enteros m, r tal que $n = md+r$ y $0 \leq r < d$. Notación: $r \equiv n \mod d$ (r es el resíduo de n módulo d).
- **Definición**. Dos enteros a, b son *congruentes modulo d*, donde d es un entero > 1, si tienen el mismo resíduo modulo d. Notación: $a \equiv b \mod d$.
- **Proposición:** $a \equiv b \mod d$ si y solo si $d|a - b$.
- **Definición**. La *clase de congruencia* (o *clase de resíduos*) modulo d de un entero a es el conjunto $[a] = \{b \in \mathbb{Z} | a \equiv b \mod d\}$. El conjunto de las clases de congruencia mod d se denota por $\mathbb{Z}_d$.

Problemas

1. Del libro de Courant y Robbins (cap. 1):
   a) Ejercicios 1') hasta 6') de las págs. 40-41.
   b) Ejercicios 1,2,3 de la pág. 44.

2. Encuentra el número de divisores positivos de $-6, 0, 32$. Retos: 100 y 100!.

3. Demuestra:
   a) Para todo entero no negativo k, $10^k \equiv 1 \mod 3$ y mod 9.
   b) Si la representación decimal de un entero no negativo N es $c_1c_2c_3 \ldots c_n$ (cada c_i es una cifra entre 0 y 9), entonces $N \equiv c_1 + c_2 + \cdots + c_n \mod 3$ y mod 9.

4. Encuentra los últimos 3 dígitos de 999^{999}. Reto: los últimos 4 dígitos.

5. Demuestra: (a) Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$. (b) Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.