§ 2. Las coordenadas del punto en el plano

4. El plano de coordenadas

Para determinar las coordenadas de un punto en el plano trazaremos en este último dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. Uno de los ejes se llama *eje de las abscisas* o eje x (o bien Ox) y el otro, *eje de las ordenadas* o eje y (o bien Oy).

La dirección de los ejes se elige frecuentemente de tal modo que el semieje positivo Ox coincida con el semieje positivo Oy, al hacerlo girar un ángulo de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj (fig. 5). El punto de intersección de los ejes se considera como el origen de cada uno de los ejes numéricos Ox y Oy. Este punto se llama *origen de coordenadas* y se designa con la letra O. Generalmente, las unidades de medida en los ejes se toman iguales.

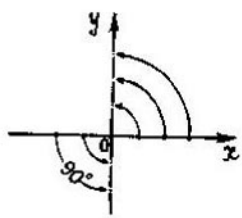


Fig. 5

Tomemos en el plano un punto cualquiera M y bajemos desde él perpendiculares a los ejes Ox y Oy (fig. 6). Los puntos de intersección M_1 y M_2 de estas perpendiculares con los ejes se llaman proyecciones del punto M sobre los ejes de coordenadas.

El punto M_1 está en el eje numérico Ox, por lo cual, le corresponde un número determinado x: su coordenada en este eje. Del mismo modo, al punto M_2 le corresponde un número determinado y: su coordenada en el eje Oy.

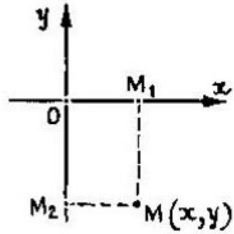


Fig. 6

Así que a cada punto M situado en el plano le corresponden dos números x e y, llamados *coordenadas rectangulares cartesianas* del punto M. El número x se llama *abscisa* del punto M y el número y, su *ordenada*.

Recíprocamente, a cada par de números x e y puede corresponder un punto del plano, para el cual x es la abscisa e y, la ordenada.

Ahora hemos establecido una correspondencia biunívoca [1] entre los puntos del plano y los pares de números x e y, que siguen un orden determinado (primero x, después y).

De este modo, *las coordenadas rectangulares cartesianas* de un punto en el plano son las coordenadas de las proyecciones de este punto en los ejes de coordenadas.

Generalmente, las coordenadas del punto M se escriben así: $M(x, y)$. En primer lugar se anota la abscisa y en segundo lugar la ordenada. A veces, en lugar de decir "el punto con las coordenadas (3, —8)", se dice, "el punto (3, —8)".

Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro *cuadrantes*. Se considera primero el cuadrante comprendido entre el semieje positivo Ox y el semieje positivo Oy. Los cuadrantes restantes se numeran siguiendo el orden contrario a las agujas del reloj (fig. 7).

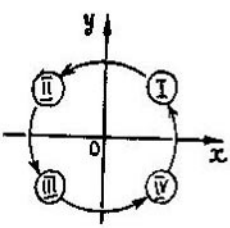


Fig. 7

Resuelva ahora algunos ejercicios.

[1] Correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y un par de números, es aquella correspondencia según la cual a cada punto se le asocia un par de números determinados y a cada par de números se le asocia un punto determinadó (comp. con la pág. 11).

Ejercicios

Primero, le proponemos resolver algunos problemas sencillos.

1. Descifrar la palabra que está escrita.

(6, 2), (9, 2), (12, 1), (12, 0), (11, —2), (9, —2), (4, —2), (2, —1), (1, 1), (—1, 1), (—2, 0), (—2, —2), (2,1), (5, 2), (12, 2), (9, 1), (10, —2), (10, 0), (4, 1), (2, 2), (—2, 2), (—2, 1), (—2, —1), (0, 0), (2, 0), (2, —2), (4, 0), (4, —1), (12, —1), (12, —2), (11,0), (7, 2), (9, 0), (4, 2).

2. Diga, sin dibujar, en qué cuadrante está situado el punto $A(1, -3)$.

3. ¿En qué cuadrantes puede estar situado el punto, si su abscisa es positiva?

4. ¿Qué signos tienen las coordenadas de los puntos situados en el segundo cuadrante? ¿En el tercer cuadrante? ¿En el cuarto cuadrante?

5. En el eje Ox se ha tomado un punto con la coordenada —5. ¿Cuáles son sus coordenadas en el plano?

Respuesta. La abscisa del punto es igual a —5 y la ordenada es igual a cero.

Y ahora algunos problemas más complicados:

6. Dibuje los puntos $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ y $D(0, 0)$. Si Ud. los dibujó correctamente, obtuvo los vértices de un cuadrado. ¿Cuál es la longitud del lado de

este cuadrado? ¿Cuál es su área[1]? Encontrar las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrado. ¿Podría Ud. demostrar que $ABCD$ es un cuadrado? Halle otros cuatros puntos (indique sus coordenadas) que sean los vértices de un cuadrado.

7. Dibuje un hexágono regular $ABCDEF$ (fig. 8). Tome el punto A como origen de coordenadas, el eje de las abscisas en la dirección de A hacia B y por unidad de medida el segmento AB. Halle las coordenadas de todos los vértices de este hexágono. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

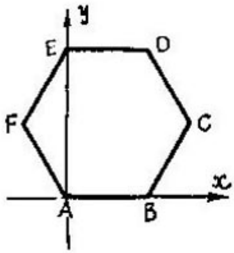


Fig. 8

8. En el plano se dan los puntos $A(0, 0)$, $B(x_1, y_1)$ y $D(x_2, y_2)$ (fig. 9). ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto C para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo?

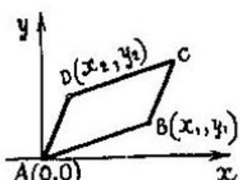


Fig. 9

5. *Relaciones que ligan a las coordenadas*

La posición de un punto en el plano queda totalmente determinada cuando se conocen sus dos coordenadas. ¿Y qué se puede decir de la posición del punto si solamente se conoce una de sus coordenadas? Por ejemplo: ¿Dónde se encuentran todos los puntos cuya abscisa es igual a 3? ¿Dónde están situados todos los puntos de coordenada, igual a 3 (no se sabe cual de las dos)?

[1] Por unidad de medición del área eligiremos la del cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de medida de los ejes.

Al dar sólo una de las dos coordenadas en un plano (o en una superficie) se determina por lo general, una línea. Este hecho, por cierto, sirvió de base del argumento de la novela de Julio Verne "Los hijos dél capitán Grant". Los héroes del libro sólo conocían una de las coordenadas del lugar del naufragio (la latitud), por esto, para explorar todos los puntos posibles, ellos tuvieron que dar la vuelta al mundo por todo un paralelo; o sea, por una línea cuyos puntos tienen una latitud igual a 37°11′.

Frecuentemente, las relaciones entre las coordenadas determinan no sólo un punto, sino un *conjunto* de puntos. Por ejemplo, si se marcan todos los puntos que tienen la abscisa igual a la ordenada, es decir, los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación

$$x = y,$$

se obtiene una línea recta que, como fácilmente se demuestra, es la bisectriz de los ángulos del primer y del tercer caudrante (fig. 10).

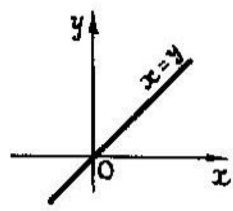


Fig. 10

En algunos casos, en vez de decir "un conjunto de puntos", se dice "el lugar geométrico de los puntos". Por ejemplo, el lugar gèométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la relación

$$x = y,$$

como ya dijimos, es la bisectriz de los ángulos del primer y tercer cuadrante.

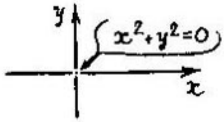


Fig. 11

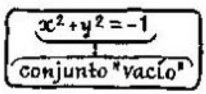


Fig. 12

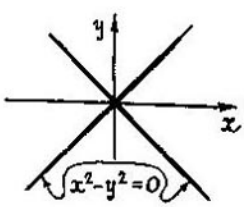


Fig. 13

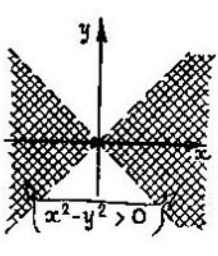


Fig. 14

No se debe creer que cada relación entre las coordenadas determina forzosamente una línea en el plano. Por ejemplo Ud. puede fácilmente convencerse que la relación $x^2+y^2=0$ determina un solo punto, el origen de coordenadas (fig. 11). Las coordenadas de ningún punto del plano satisfacen a la relación $x^2+y^2=-1$, la cual determina un conjunto "vacío" de puntos (fig. 12).

La relación

$$x^2-y^2=0$$

determina un par de rectas en el plano, perpendiculares entre sí (fig. 13). La relación $x^2-y^2>0$ determina toda una región (fig. 14). Demuestre estas afirmaciones.

Ejercicios.

1. Explique qué conjuntos de puntos se determinan por las relaciones:

a) $x=|y|$; $y=|x|$; $|x|=|y|$;

b) $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$;

c) $|x|+x=|y|+y$;

d) $x=[y]$[1]; $y=[x]$; $[x=[y]$;

e) $x-[x]=y-[y]$;

f) $x-[x]>y-[y]$.

La respuesta al ejercicio 1f, está dada en la página 95 fig. 55

---

[1] El símbolo $[x]$ representa la parte entera del número x, es decir, el mayor número entero que no excede a x. Por ejemplo,

$$\left[3\frac{2}{7}\right]=3;\ [5]=5;\ \left[-2\frac{1}{3}\right]=-3;$$
$$[-7]=-7.$$

2. Un camino rectilíneo separa un prado de un campo labrado. Un peatón recorre el camino a una velocidad de 5 km/h, el prado a una velocidad de 4 km/h y el campo labrado a una velocidad de 3 km/h. En el momento inicial el peatón está parado en el camino. Dibuje la región formada por los puntos recorridos por el peatón después de una hora de recorrido.

Respuesta. Véase la pág. 95, fig. 56.

3. Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro cuadrantes. Por los cuadrantes I y III (incluyendo los ejes de coordenadas) el movimiento es posible a una velocidad a; y por los cuadrantes II y IV, (excluyendo los ejes de coordenadas) a una velocidad b. Dibuje el conjunto de puntos que pueden ser logrados en un tiempo dado desde el origen de coordenadas, si:

a) la velocidad a es dos veces mayor que b;

b) las velocidades están relacionadas por la expresión

$$a = b \cdot \sqrt{2}\,.$$

6. Distancia entre dos puntos

Ud. sabe ahora hablar sobre los puntos con el lenguaje de los números. Por ejemplo, ahora no necesitamos explicar: tome un punto que se encuentra a tres unidades a la derecha del eje y y a cinco unidades más abajo del eje x. Sencillamente basta decir: tome el punto (3, —5).

Antes ya expresamos que esto constituía una ventaja considerable. Así, pues, se puede enviar por telégrafo un dibujo formado por puntos, darlo a la máquina computadora, la cual no sabe nada de dibujos, pero comprende muy bien los números.

En el párrafo 5 dimos algunos conjuntos de puntos en el plano mediante relaciones entre los números. Ahora probaremos traducir sucesivamente al lenguaje de los números otros conceptos geométricos y otros hechos.

Comenzaremos con un sencillo y habitual problema: encontrar la distancia entre dos puntos del plano.

Como siempre, consideraremos que los puntos están dados por sus coordenadas, el problema consiste ahora en encontrar un procedimiento para calcular la distancia entre dos puntos, conociendo sus coordenadas. Por supuesto, para hallar este procedimiento se permite recurrir al dibujo, pero en el procedimiento mismo no se puede hacer ninguna referencia al dibujo, sino sólo indicar las operaciones que se deben realizar con los números dados (las coordenadas de los puntos), y el orden en que éstas se deben efectuar para obtener el número buscado, o sea, la distancia entre los puntos.

De este modo, se puede resolver un problema propuesto incluso cuando es difícil recutrir al dibujo (por ejemplo, si las coordenadas son muy grandes). Además, es evidente que la solución analítica (numérica) siempre será más exacta que la medición directa en el dibujo.

Es mejor resolver el problema propuesto, primero para el caso en que uno de los puntos dados se encuentre en el origen de coordenadas. Empiece por algunos ejercicios numéricos: calcule la distancia entre el origen de coordenadas y cada uno de los puntos (12,5), (—3, 15) (—4, —7), aplicando el teorema de Pitágoras.

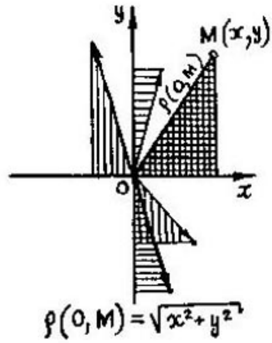


Fig. 15

Repitiendo estos razonamientos para el caso general obtendrá Ud. la fórmula general para calcular la distancia $\rho(O, M)$ entre cualquier punto $M(x, y)$ y el origen de coordenadas O (0, 0) (fig. 15):

$$\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Evidentemente, la regla expresada por esta fórmula satisface a las condiciones dadas. En particular, ésta puede ser empleada para los cálculos efectuados en las máquinas, las cuales son capaces de sumar, multiplicar y extraer raíz cuadrada de los números.

Resolvamos ahora un problema general.

Problema. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos dados en el plano; encontrar la distancia ρ (A, B); entre ellos.

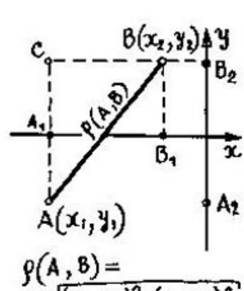


Fig. 16

Resolución. Designemos por A_1, B_1, A_2, B_2 (fig. 16) las proyecciones de los puntos A y B sobre los ejes de coordenadas.

Designemos con la letra C el punto de intersección de las rectas AA_1 y BB_2. Según el teorema de

Pitágoras, del triángulo rectángulo ABC, obtendremos: [1]

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C). \quad (*)$$

Pero, la longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento A_2B_2, los puntos A_2 y B_2 se encuentran en el eje Oy y tienen respectivamente en este eje las coordenadas y_1 e y_2. Según la fórmula obtenida en el párrafo 3, la distancia entre estos puntos es igual a $|y_1 - y_2|$.

Razonando análogamente, obtenemos que la longitud del segmento BC es igual a $|x_1 - x_2|$. Reemplazando en la fórmula (*) los valores de AC y BC encontrados, obtenemos

$$\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

De este modo, la distancia $\rho(A, B)$ entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se calcula por la fórmula:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Obsérvese que todos nuestros razonamientos no sólo son válidos para una ubicación de los puntos como en la fig. 16, sino también para cualquier otra.

Haga Ud. otro dibujo (por ejemplo, tome el punto A en el primer cuadrante y B, en el segundo) y cerciórese de que todos los razonamientos se pueden repetir palabra por palabra sin variar inclusive la designación de los puntos.

Señalamos además que la fórmula del apartado 3, referente a la distancia entre dos puntos en

---

[1] Designamos por $\rho^2(A, B)$ el cuadrado de la distancia $\rho(A, B)$.

la recta (véase la pág. 16), se puede escribirla en forma análoga: [1]

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

Ejercicios

1. Se dan tres puntos en el plano: $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ y $C(1, -2)$. Demostrar que estos tres puntos están en una misma recta (son colineales).

Indicación. Demuestre que uno de los lados del triángulo ABC es igual a la suma de los otros dos.

2. Aplique la fórmula de la distancia entre dos puntos para la demostración del teorema ya conocido por Ud.: en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

---

[1] Aquí aplicamos la fórmula:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(se tiene en cuenta el valor aritmético de la raíz). Una aplicación negligente de esta regla puede dar lugar a conclusiones falsas (a veces erróneamente se considera que $\sqrt{x^2} = x$). En calidad de ejemplo exponemos una serie de deducciones que contienen yerros de ese tipo. ¡Descúbralos!

$$1-3=4-6 \Rightarrow 1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2} \Rightarrow 1=2.$$

(el signo $\Rightarrow$ reemplaza a la expresión «se deduce»).

Indicación. Tome por origen de coordenadas uno de los vértices del paralelogramo y emplee los resultados obtenidos en el problema 8 del apartado 4. Ud. verá que la demostración del teorema se reduce a la comprobación de una simple identidad algebraica. ¿Cuál es?

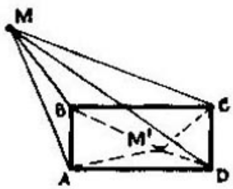


Fig. 17

3. Demuestre, por medio del método de coordenadas, el siguiente teorema: si $ABCD$ es un rectángulo, para todo punto M se cumple la igualdad $AM^2+CM^2=BM^2+$ $+DM^2$ (fig. 17). ¿Cómo será más conveniente colocar los ejes de coordenadas?

7. *Determinación de las figuras*

En el apartado 5 dimos algunos ejemplos de relaciones entre las coordenadas que determinan algunas figuras en el plano. Estudiemos algo más sobre la determinación de figuras geométricas mediante relaciones numéricas.

Consideramos cada figura como el conjunto de los puntos que la forman. Determinar figura significa indicar el procedimiento por el cual se podría saber, si tal o cual punto pertenece o no a la figura estudiada.

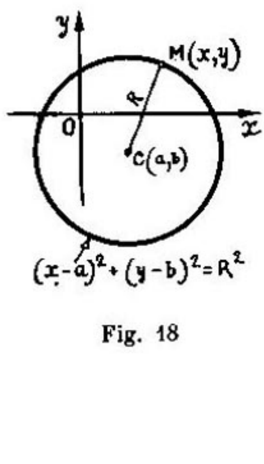


Fig. 18

Por ejemplo, para encontrar tal procedimiento respecto a la circunferencia, empleamos la definición de ésta como el conjunto de puntos, cuya distancia a cierto punto C (centro de la circunferencia) es igual al número R (radio). En este caso, para que el punto $M(x, y)$ (fig. 18) pertenezca a la circunferencia con centro $C(a, b)$, es necesario y suficiente que $\rho(M, C)$ sea igual a R.

Recordemos, que la distancia entre dos puntos se determina por la fórmula:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por consiguiente, la condición para que el punto $M(x, y)$ pertenezca a la circunferencia con centro en el punto $C(a, b)$ y radio R, se expresa mediante la relación:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

que se puede escribir en la siguiente forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

De este modo, para comprobar si algún punto pertenece a la circunferencia, es necesario comprobar si se cumple o no, para este punto la relación (*). Para esto es necesario reemplazar en la expresión (*) las coordenadas x e y del punto estudiado. Si se obtiene una identidad, el punto pertenece a la circunferencia; en caso contrario, no le pertenecerá. De este modo conociendo la ecuación (*) podemos decir si un punto cualquiera del plano pertenece o no a la circunferencia. Por lo anterior, la ecuación (*) se llama *ecuación de la circunferencia* con centro en el punto $C(a, b)$ y radio R.

Ejercicios.

1. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-2, 3)$ y radio 5. ¿Pasa esta circunferencia por el punto $(2, -1)$?

3 -01153

2. Demuestre que la ecuación

$$x^2+2x+y^2=0$$

determina en el plano una circunferencia. Busque su centro y su radio.

Indicación. Ponga la ecuación en la forma

$$(x^2+2x+1)+y^2=1, \text{ ó } (x+1)^2+y^2=1.$$

3. ¿Qué conjunto de puntos determina la relación $x^2+y^2 \leqslant 4x+4y$?

Solución. Escribamos esta desigualdad:

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4 \leqslant 8,$$

o bien,

$$(x-2)^2+(y-2)^2 \leqslant 8.$$

Ahora queda claro que esta relación expresa que la distancia de un punto del conjunto buscado al punto (2, 2) es menor o igual a $\sqrt{8}$. Evidentemente, los puntos que verifican esta condición se encuentran en el círculo con centro en el punto (2,2) y radio $\sqrt{8}$. Como en la relación está incluída la igualdad, al conjunto buscado pertenece también la frontera del círculo, o sea, la circunferencia.

Ya vimos que una circunferencia en el plano puede ser dada por medio de una ecuación. De esta misma manera se pueden determinar otras líneas cuyas ecuaciones, por supuesto, tendrán otra forma.

Anteriormente observamos que la ecuación $x^2-y^2=0$ representa un par de rectas (véase la pag. 26, fig. 13). Detengámonos en esto más minuciosamente. Si $x^2-y^2=0$, entonces $x^2=y^2$ y, por consiguiente, $|x|=|y|$. Recíprocamente, si $|x|=|y|$, entonces $x^2-y^2=0$; por lo tanto, estas relaciones son equivalentes; pero, el valor absoluto de la abscisa representa la distancia del punto al eje Oy y el valor absoluto de la ordenada, la distancia del mismo al eje Ox. Esto significa que los puntos, para los cuales se cumple $|x|=|y|$, están a igual distancia de los ejes de coordenadas, o sea, yacen en las dos bisectrices de los ángulos formados por estos ejes. Recíprocamente, es evidente que las coordenadas de un punto cualquiera en cada una de estas bisectrices satisfacen a la relación $x^2=y^2$. Por esto, la ecuación $x^2-y^2=0$ se denomina ecuación del conjunto de estas dos bisectrices.

Por supuesto, Ud. conoce también otros ejemplos de determinación de líneas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $y=x^2$ es satisfecha sólo por todos los puntos de una parábola con vértice en el origen de coordenadas (fig. 19). La ecuación $y=x^2$ es *la ecuación de esta parábola*.

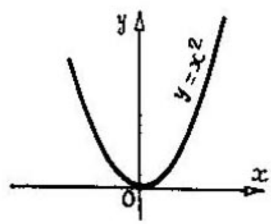


Fig. 19

Todos los puntos de una recta sólo satisfacen a una ecuación de la forma $ax+by+c=0$. La ecuación $ax+by+c=0$ es *la ecuación de la recta*.

En general, se llama *ecuación de una línea* aquella que se transforma en identidad, cada vez que se reemplazan x e y por las coordenadas de un punto cualquiera de la línea, y que no se verifica cuando se reemplazan por las coordenadas de un punto no perteneciente a la misma.

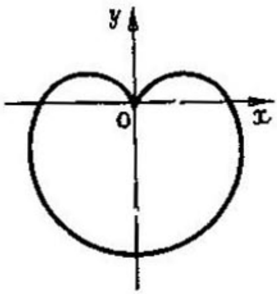
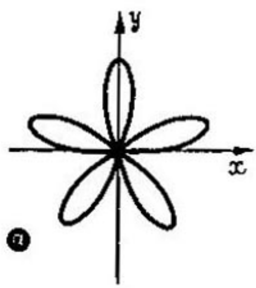


Fig. 20



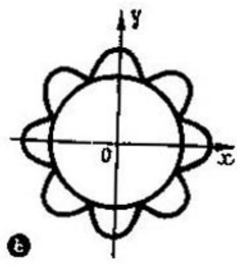


Fig. 21

Por ejemplo, aún no sabiendo, cual es la línea que representa la ecuación

$$(x^2+y^2+y)^2=x^2+y^2, \qquad (*)$$

podemos afirmar que esta línea pasa por el origen de coordenadas, ya que el punto (0, 0) satisfacen a esta ecuación; sin embargo, el punto (1, 1) no pertenece a esta curva, puesto que $(1^2+1^2+1)^2 \neq \neq 1^2+1^2$.

Si a Ud. le interesa saber cual es la curva representada por esta ecuación, vea la fig. 20. Esta curva se llama *cardioide*, porque tiene la forma de un corazón.

De este modo, si una máquina computadora pudiera sentir simpatía hacia una persona, probablemente le entregaría el dibujo de un corazón, mediante una ecuación, posiblemente, le regalaría un "buqué" matemático, es decir, las ecuaciones de las curvas representadas en la fig. 21; en efecto, como Ud. ve estas curvas parecen unas flores. Más adelante, cuando Ud. estudie otras coordenadas, denominadas polares, escribiremos las ecuaciones de estas "flores matemáticas".

8. *Comenzamos a resolver problemas*

Traduciendo los conceptos geométricos al lenguaje de las coordenadas, obtenemos la posibilidad de estudiar problemas algebraicos en lugar de problemas geométricos. Resulta que, después de esta transformación, la mayoría de los problemas relacionados con rectas y circunferencias se reducen a ecuaciones de primer y segundo grado; para la resolución de este tipo de ecuaciones existen simples fórmulas generales.

Es necesario señalar que cuando se descubrió el método de coordenadas, en el siglo XVII, el arte de la resolución de ecuaciones algebraicas alcanzó su más alto nivel. Por ejemplo, en este período los matemáticos aprendieron a resolver cualquier ecuación de tercer o cuarto grado. Por esto, al descubrir el método de coordenadas, el científico francés R. Descartes, considerando los problemas geométricos de su época, dijo: "yo he resuelto todos los problemas".

He aquí algunos ejemplos sencillos de reducción de problemas geométricos a problemas algebraicos.

Problema. Sea ABC un triángulo dado, determinar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Resolución. Tomemos como origen de coordenadas el punto A y el eje de las abscisas en la dirección de A hacia B; entonces el punto B, tendrá las coordenadas (c, O), en que c es la longitud del segmento AB. Supongamos que el punto C tiene las coordenadas (q, h) y el centro de la circunferencia buscada, las coordenadas (a, b). Designemos por R el radio de esta circunferencia. Anotemos mediante coordenadas que los puntos $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ y $C(q, h)$ se encuentran en la circunferencia buscada:

$$a^2+b^2=R^2,$$
$$(c-a)^2+b^2=R^2,$$
$$(q-a)^2+(h-b)^2=R^2.$$

Cada una de estas condiciones expresa que la distancia desde los puntos $A(0,\ 0)$, $B(c,\ 0)$ y $C(q,\ h)$ al centro de la circunferencia es igual al radio. Es fácil obtener así mismo estas condiciones, escribiendo la ecuación de la circunferencia buscada (una circunferencia con centro en el punto $(a,\ b)$ y con radio R):

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2,$$

y reemplazando después en esta ecuación x e y por las coordenadas de los puntos A, B y C situados en esta circunferencia.

Fácilmente se resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con lo cual se obtiene:

$$a=\frac{c}{2}, \qquad b=\frac{q^2+h^2-cq}{2h},$$
$$R=\frac{\sqrt{(q^2+h^2)\left[(q-c)^2+h^2\right]}}{2h}.$$

Puesto que se encontraron las coordenadas del centro [1], el problema queda resuelto.

Señalemos que, simultáneamente, hemos obtenido la fórmula para hallar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Esta fórmula se puede simplificar si se

[1] Observe que para resolver este problema no se recurrió al dibujo.

tiene en cuenta que

$$\sqrt{q^2+h^2}=\rho(A, C),$$
$$\sqrt{(q-c)^2+h^2}=\rho(B, C),$$

donde el valor h es igual a la altura del triángulo ABC, bajada desde el vértice C. Indicando por a y b las longitudes respectivas de los lados BC y AC del triángulo, la fórmula para calcular el radio toma una forma sencilla y elegante:

$$R=\frac{ab}{2h}.$$

Además, se puede observar que $hc=2S$, donde S es el área del triángulo ABC y, entonces, nuestra fórmula puede escribirse así:

$$R=\frac{abc}{4S}$$

Ahora le queremos mostrar a Ud. un problema que es interesante, puesto que su solución geométrica es bastante complicada; en cambio, si se traduce al lenguaje de las coordenadas su solución es muy sencilla.

Problema. Sean A y B dos puntos dados en el plano; encontrar el lugar geométrico de los puntos M, cuyas distancias al punto A son el doble que sus distancias al punto B.

Resolución. Tomemos en el plano un sistema de coordenadas tal que el origen de coordenadas coincida con el punto A y el semieje positivo de las abscisas lleve la dirección de AB. Tomemos el segmento AB por unidad de medida. Entonces el punto A tendrá las coordenadas (0, 0) y el punto B, las coordenadas (1, 0). Designemos por (x, y) las coordenadas del punto M. La condición $\rho(A, M)=2\rho(B, M)$ se expresa así:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Hemos obtenido la ecuación del lugar geométrico buscado. Para comprender cual es el conjunto determinado por esta ecuación, transformaremos ésta de tal modo que tome una forma conocida por Ud. Elevando ambos miembros al cuadrado, abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la igualdad

$$3x^2-8x+4+3y^2=0.$$

Esta puede escribirse así:

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9}$$

o bien:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Ud. ya sabe que ésta es la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (4/3, 0) y radio igual a 2/3. Esto significa que el lugar geométrico buscado es una circunferencia (o una parte de ella). [1]

---

[1] Para demostrar que todos los puntos de la circunferencia pertenecen a nuestro lugar geométrico es suficiente comprobar que de la validez de cada una de las siguientes igualdades se deduce la validez de la anterior; de modo que si finalmente $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, se tiene, $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Esto signi-

En nuestra solución no tiene importancia que la distancia $\rho(A,M)$ sea exactamente el doble de la distancia $\rho(B, M)$, ya que realmente el problema se ha resuelto en una forma más general. Precisamente, se ha demostrado que circunferencia, fig. 22, es *el lugar geométrico de los puntos M para los cuales la razón de sus distancias a los puntos dados A y B es constante*:

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = k \qquad (*)$$

(donde k es un número positivo dado distinto a la unidad).[1]

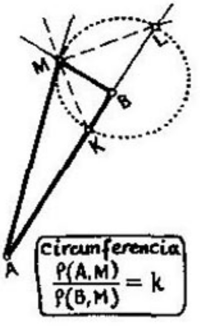


Fig. 22

Para convencerse de la validez del método de coordenadas pruebe resolver geométricamente el último problema.

Indicación Trace desde el punto M las bisectrices de los ángulos interior y exterior del triángulo AMB. Sean K y L los puntos de intersección de estas bisectrices con la recta AB. Demuestre que la posición de estos puntos es independiente de la elección del punto M en el lugar geométrico buscado. Demuestre que el ángulo KML es igual a 90°.

Es necesario señalar que los griegos ya sabían resolver problemas de este tipo. La solución geométrica de este problema estaba incluída en el tratado "Acerca de los círculos", del matemático

---

fica, precisamente, que cada punto de la circunferencia obtenida pertenece a nuestro lugar geométrico.

[1] Hemos excluído el caso $k=1$; por supuesto, ya sabe Ud. que en este caso el lugar geométrico (*) es una recta (el punto M es equidistante de A y B). Demuéstrelo analíticamente.

griego Apolonio (siglo II antes de nuestra era).

Resuelva el siguiente problema:

Problema. Encontrar el lugar geométrico de los puntos M para los cuales la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados A y B sea igual al valor dado c. ¿Para qué valores de c tiene solución el problema?

9. Otros sistemas de coordenadas

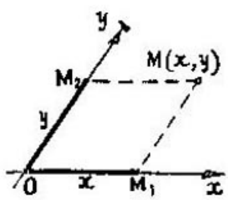


Fig. 23

Además del sistema de coordenadas cartesiano ortogonal se emplean en el plano otros sistemas de coordenadas. En la fig. 23 está representado un sistema de coordenadas cartesiano oblicuo. En la fig. se ve claramente, como se determinan las coordenadas de un punto en tal sistema. En algunos casos es absolutamente indispensable tomar diferentes unidades de medida para los ejes de coordenadas.

Existen coordenadas que se diferencian mucho más de las cartesianas. Por ejemplo, las coordenadas polares, mencionadas anteriormente.

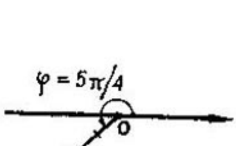


Fig. 24

Las coordenadas polares de un punto se definen en el plano de la siguiente forma: se toma en el plano un eje numérico (fig. 24). El origen de coordenadas de este eje (el punto O) se llama *polo* y el eje mismo, *eje polar*. Para determinar la situación de un punto M, es suficiente indicar dos números: ρ, *el radio vector* (la distancia del punto al polo) y φ, *el ángulo polar* [1] (el ángulo de rotación desde el eje polar hasta el rayo OM). En nuestra fig. el radio vector es igual a $\rho=3{,}5$ y el ángulo polar φ es igual a $225°$ ó [2] $\frac{5\pi}{4}$.

---

[1] φ, es la letra griega que se lee «fi».

[2] Para medir los ángulos φ en el sistema de coordenadas polares, además de las medidas en grados, emplearemos los *radianes*. En este caso, la unidad para la medición de los ángulos es

De este modo, en el sistema de coordenadas polares la posición de un punto en el plano queda determinada por dos números que indican la dirección en que se encuentra el punto y la distancia hasta el mismo. Este procedimiento de indicación de un lugar es muy simple y se emplea frecuentemente. Por ejemplo, para explicar el camino a una persona extraviada en el bosque se le dice: «desde el pino quemado (el polo) doble hacia el este (la dirección), recorra unos dos kilómetros (la distancia) y encontrará una caseta (el punto)».

Quien se ocupe de asuntos turísticos fácilmente comprenderá que la marcha por el azimut está basada en el mismo principio que las coordenadas polares.

Mediante las coordenadas polares se pueden además determinar en el plano, diferentes conjuntos de puntos. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el polo (fig. 25, *a*) es muy sencilla. Si el radio de la circunferencia es igual a R, el radio polar de un punto cualquiera de la circunferencia (sólo de los puntos de la circunferencia considerada) también es igual a R; por consiguiente, la ecuación de esta circunferencia tiene la forma

$$\rho = R,$$

donde, R es una magnitud constante (abreviadamente se escribe así: R=const.).

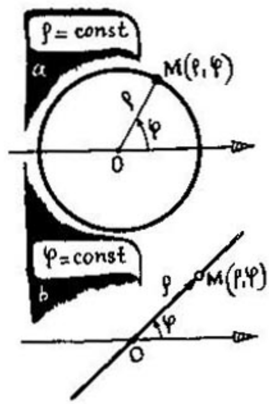


Fig. 25

1 *radián*. Este es un ángulo central que abarca un arco de circunferencia de longitud igual al radio de la circunferencia. El ángulo completo de 360° comprende toda la circunferencia (de radio 1) y tiene la medida radial 2π; el ángulo de 180°, la medida π; el ángulo recto, la medida $\frac{\pi}{2}$; el ángulo de 45°, la medida $\frac{\pi}{4}$; etc. Un radián corresponde a $\frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°17'45''$. Resulta que, en muchos problemas (sobre los cuales se tratará en las ediciones futuras), la medición en radianes es considerablemente más cómoda que la medición en grados.

¿Qué conjunto se obtiene, si se considera la ecuación

$$\varphi=\alpha,$$

donde, α es una constante cualquiera (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$)? La respuesta es clara: los puntos para los cuales φ es constante, e igual a α, se encuentran en el rayo que parte del polo, formando con el eje polar un ángulo α (fig. 25, *b*). Por ejemplo, si $\alpha=\frac{1}{2}$, este rayo forma con el eje un ángulo, de 28° aproximadamente,[1] si $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, el rayo está dirigido verticalmente hacia abajo, es decir, el ángulo entre la dirección positiva y el rayo es igual a 270°.

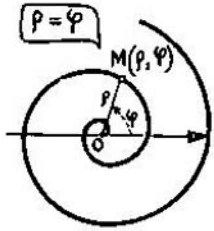


Fig. 26

Examinemos dos ejemplos más. La ecuación

$$\rho=\varphi$$

representa una espiral (fig. 26). En efecto, para $\varphi=0$, tenemos, $\rho=0$ (el polo) y junto con el crecimiento de φ crece también ρ, de modo que el punto gira alrededor del polo (en sentido contrario a las agujas del reloj), alejándose del mismo.

La ecuación

$$\rho=\frac{1}{\varphi}$$

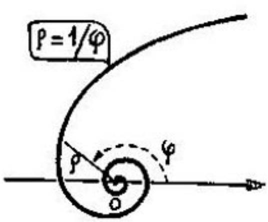


Fig. 27

representa otra espiral (fig. 27). En este caso, para un valor de φ próximo a 0, el valor de ρ es muy grande; en cambio, cuando φ crece, el valor de ρ decrece siendo muy pequeño para valores muy grandes de φ. Por esto, cuando φ crece indefinidamente, la espiral se «enrolla» alrededor del punto 0.

---

[1] Recordemos que número que corresponde a la coordenada φ es necesario considerarlo como una medida del ángulo en radianes (Véase la nota 1 en la pág. 41). El ángulo de $\frac{1}{2}$ radián es aproximadamente 28°, él de $\frac{3\pi}{2}$ es exactamente 270.

Ahora le será todavía más difícil comprender las ecuaciones de las curvas en un sistema polar, principalmente porque no ha estudiado trigonometría. Si Ud. sabe algo de trigonometría, trate de encontrar que conjuntos están dados por las siguientes relaciones:

$$\rho = \operatorname{sen} \varphi, \quad \rho (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) + 1 = 0$$ [1].

En algunos casos el sistema de coordenadas polares es más cómodo que el cartesiano. Así, por ejemplo, vea lo simple que es la ecuación de la cardioide en coordenadas polares (Véase el apartado 7, fig. 20, pág. 36):

$$\rho = 1 - \operatorname{sen} \varphi.$$

Si Ud. sabe algo de trigonometría le será más fácil representar esta curva, cuando ella está dada por esta ecuación, que cuando está dada por su ecuación en coordenadas cartesianas. Y aquellas hermosas «flores» que se representan en la fig. 21 (véase la pág. 36) se expresan por las siguientes sencillas ecuaciones:

$$\rho = \operatorname{sen} 5\varphi \text{ (fig. 21, } a)$$

$$(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0 \text{ (fig. 21, } b).$$

No hemos dicho nada sobre la correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y las coordenadas polares. Esto es debido a que no existe tal correspondencia biunívoca. En efecto, si le agrega al ángulo φ un múltiplo entero cualquiera de 2π (es decir, un múltiplo entero de 360°), la dirección del rayo, evidentemente, no varía. Dicho de otra forma, los puntos con las coordenadas polares ρ, φ y ρ, $\varphi + 2k\pi$, donde $\rho > 0$ y k es un número entero cualquiera, coinciden (fig. 28). Deseamos dar otro ejemplo en el que tampoco existe correspondencia biunívoca.

Fig. 28

En la introducción dijimos que se pueden determinar las coordenadas en las líneas y en el § 1 estudiamos las coordenadas en la línea más simple, en la

---

[1] Como por ρ comprendemos la distancia desde el punto hasta el origen de coordenadas, la curva sólo estará determinada para aquellos valores de φ, para los cuales se cumple $\rho \geqslant 0$.

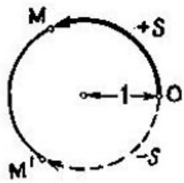


Fig. 29

recta. Ahora mostraremos, como se pueden introducir unas coordenadas en otra línea, en la circunferencia. Para esto, igual que en el § 1, elijamos en la circunferencia un punto como origen de coordenadas (el punto O en la fig. 29). Como ordinariamente, la dirección positiva del movimiento en la circunferencia se considerará en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. La unidad de medida en la circunferencia también se puede elegir de modo natural: elijamos por unidad el radio de esta circunferencia. En este caso, la coordenada del punto M en la circunferencia será la longitud del arco OM, considerada con signo positivo, si la rotación desde O hasta M es en dirección positiva; en caso contrario, con signo negativo.

Inmediatamente salta a la vista la gran diferencia entre estas coordenadas y las coordenadas de los puntos en la recta, ya que ahora no hay correspondencia biunívoca entre los números (las coordenadas) y los puntos. Es evidente que a cada número le corresponde un punto determinado de la circunferencia; sin embargo, dado el numero a, para encontrar el punto de la circunferencia que le corresponde (es decir, el punto con la coordenada a) es necesario trazar en la circunferencia un arco de longitud de a radios, en la dirección positiva, si a es positivo y en la dirección negativa, si a es negativo. En este caso, por ejemplo, el punto de coordenada 2π, coincide con el origen de coordenadas. En nuestro ejemplo, el punto O se obtiene cuando la coordenada es igual a cero y cuando la coordenada es igual a 2π. De esta forma, en la otra dirección la correspondencia no es unívoca, ya que a un mismo punto le corresponden varios números diferentes. Fácilmente se observa que a cada punto de la circunferencia le corresponde un conjunto infinito de números [1].

---

[1] Ud. podrá observar que las coordenadas introducidas de un punto en la circunferencia coinciden con los ángulos φ del sistema de coordenadas