SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRIA ANALITICA

Plana y del Espacio

JOSEPH H. KINDLE, Ph. D.

Professor of Mathematics
University of Cincinnati

TRADUCCION Y ADAPTACION

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ
Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Prólogo

Este libro de problemas está concebido como complemento de los textos de geometría analítica que se estudian en los institutos y escuelas técnicas de grado medio. En él se exponen las materias aproximadamente en el mismo orden que figura en la mayor parte de dichos textos. Consta de 345 problemas tipo, cuidadosamente resueltos, y 910 problemas propuestos como ejercicio para el alumno a distinto grado de dificultad. Los problemas, por otra parte, se han dispuesto de forma que se pueda seguir con facilidad el desarrollo natural de cada materia. Como un curso de geometría analítica se base, fundamentalmente, en la resolución de problemas, y dado que una de las principales causas del bajo rendimiento que en ocasiones se alcanza en los cursos de matemáticas es no disponer de métodos ordenados de resolución de aquéllos, estamos convencidos de que este libro, bien empleado, constituirá una gran ayuda para el alumno. También se ha pensado en aquellos otros que quieran repasar la teoría y los problemas fundamentales de la geometría analítica.

Para la mejor utilización del libro se debe tener presente lo que realmente es, considerando que no se trata de un texto propiamente dicho y que, por tanto, no debe emplearse como medio para evitar el estudio de las cuestiones teóricas de la asignatura. Cada uno de los capítulos contiene un breve resumen, a modo de formulario, de las definiciones necesarias, principios y teoremas, seguido de una serie de problemas, resueltos unos y otros propuestos, a distintos niveles de dificultad.

No se puede decir de forma rotunda que estudiar matemáticas sea, esencialmente, hacer problemas, pero hay que tener en cuenta que con una lectura más o menos rutinaria del libro de texto, la retención en la memoria de un pequeño número de expresiones y con un estudio superficial de los problemas resueltos de este libro, no se adquirirá más que una vaga noción de la materia. Por tanto, para que la utilización de este libro sea verdaderamente eficaz es necesario que el alumno intente resolver por sí mismo todos los problemas en un papel y se fije bien en el porqué de cada uno de los pasos de que consta su solución, y en la forma en que éstos se expresan. En todos y cada uno de los problemas resueltos hay algo que aprender; con estas normas, el alumno encontrará muy pocas dificultades para resolver los problemas aquí propuestos, así como los que figuren en su propio libro de texto.

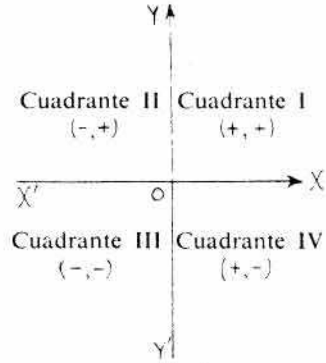
J. H. K.

Tabla de materias

CAPITULO I

Coordenadas rectangulares

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES. El sistema de coordenadas rectangulares divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto O. La horizontal $X'OX$ se denomina eje x, la vertical $Y'OY$, eje y, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas. El punto O se llama origen del sistema.

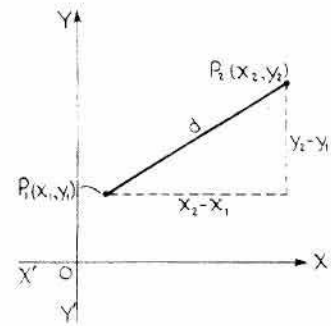


La distancia de un punto al eje y se llama *abscisa* del mismo. La distancia de un punto al eje x es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas* del punto en cuestión y se representan por el símbolo (x,y). Las abscisas son positivas cuando el punto está situado a la derecha del eje y, y negativas en caso contrario. Las ordenadas son positivas cuando el punto está por encima del eje x, y negativas en caso contrario.

Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. La distancia d entre dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

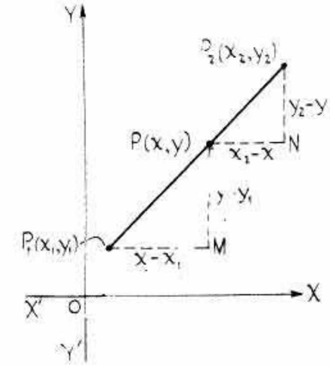
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Por ejemplo, la distancia entre los puntos (4, —1) y (7, 3) es

$$d = \sqrt{(7 - 4)^2 + (3 + 1)^2}$$
$$= 5 \text{ unidades.}$$

PUNTO DE DIVISION es el que divide a un segmento en una relación dada. Consideremos los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y la recta que determinan. Sea $P(x,y)$ un tercer punto que divida al segmento en la relación $\dfrac{P_1P}{PP_2} = r$. Como P_1P y PP_2 son del mismo sentido, dicha relación es positiva. Si el punto de división $P(x,y)$ estuviera situado en la prolongación del segmento, a uno u otro lado del mismo, la relación $\dfrac{P_1P}{PP_2} = r$ sería negativa, ya que P_1P y PP_2 tendrían sentidos opuestos.

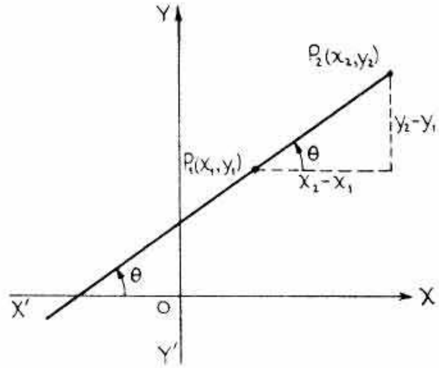


Teniendo en cuenta los triángulos semejantes de la figura, $\dfrac{P_1M}{PN} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = r.$

Despejando x, $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$. Análogamente, $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$.

Si $P(x,y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2, $r = 1$ y $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA. La *inclinación* de una recta L (que no sea paralela al eje x) es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje x positivo y se mide, desde el eje x a la recta L, en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Mientras no se advierta otra cosa, consideraremos que el sentido positivo de L es hacia arriba. Si L fuera paralela al eje x, su inclinación sería cero.



La *pendiente* de una recta es la tangente del ángulo de inclinación. En estas condiciones, $m = \operatorname{tg} \theta$, siendo θ el ángulo de inclinación y m la pendiente.

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

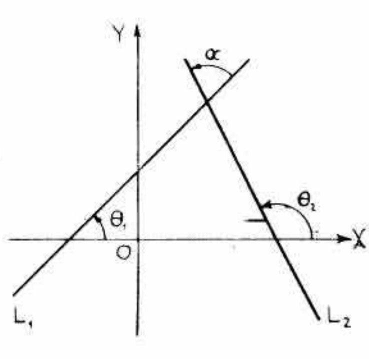
cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos P_1 y P_2.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES. Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.

Si dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo contrario. Esto es, llamando m_1 a la pendiente de L_1 y m_2 a la de L_2 se tiene $m_1 = -1/m_2$, o bien, $m_1 m_2 = -1$.

ANGULO DE DOS RECTAS. El ángulo α, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, desde la recta L_1 de pendiente m_1 a la L_2 de pendiente m_2 es

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.$$

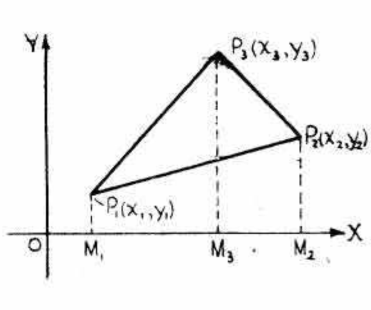


Demostración: $\theta_2 = \alpha + \theta_1$, o $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.$$

AREA DE UN POLIGONO EN FUNCION DE LAS COORDENADAS DE SUS VERTICES. Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo. El área A en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión



$$A = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3).$$

Demostración: Area del triángulo = área del trapecio $M_1P_1P_3M_3$ + área del trapecio $M_3P_3P_2M_2$ — área del trapecio $M_1P_1P_2M_2$. Por tanto,

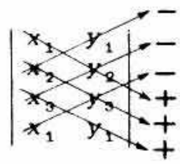
$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2). \end{aligned}$$

Este resultado se puede expresar de otra manera, más fácil de recordar, teniendo en cuenta la notación de determinante:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de expresar el área de un triángulo, muy útil cuando se trate de hallar áreas de polígonos de más de tres lados, es la siguiente:

$$A = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1). \qquad A = \tfrac{1}{2}$$



Obsérvese que se ha repetido la primera fila en la cuarta.

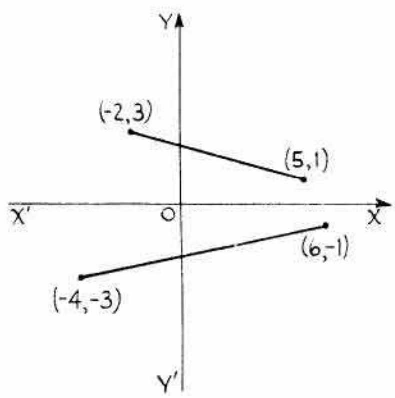
PROBLEMAS RESUELTOS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

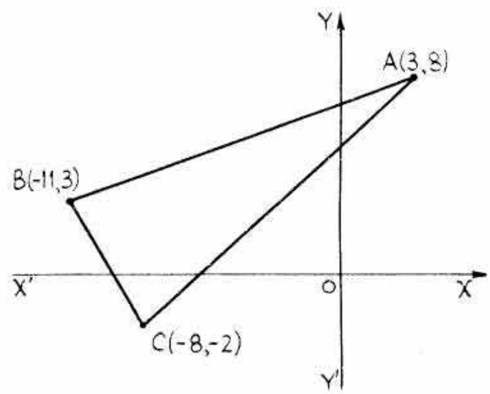
1. Hallar la distancia entre *a*) (—2, 3) y (5, 1), *b*) (6, —1) y (—4, —3).

a) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

b) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$



Problema 1



Problema 2

2. Demostrar que los puntos $A(3, 8)$, $B(-11, 3)$, $C(-8, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

$AB = \sqrt{(3 + 11)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{221}$

$BC = \sqrt{(-11 + 8)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(3 + 8)^2 + (8 + 2)^2} = \sqrt{221}$. Como $AB = AC$, el triángulo es isósceles.

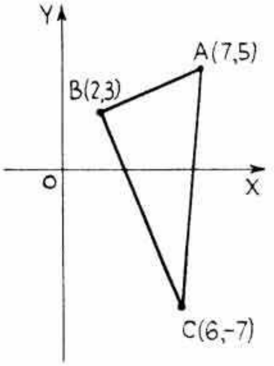
3. *a*) Demostrar que los puntos $A(7, 5)$, $B(2, 3)$, $C(6, -7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
b) Hallar el área del triángulo rectángulo.

a) $AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$ $\quad BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{116}$

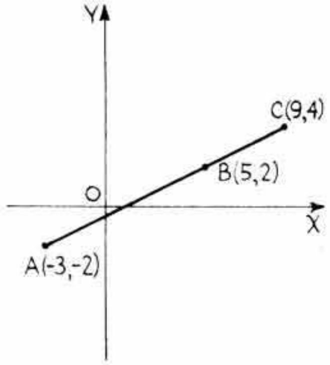
$$AC = \sqrt{(7-6)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{145}$$

Como $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, o sea, $29 + 116 = 145$, ABC es un triángulo rectángulo.

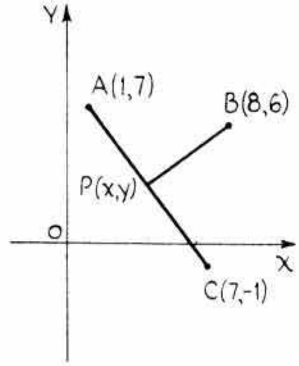
b) Area $= \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}\sqrt{29}\sqrt{116} = 29$ unidades de superficie.



Problema 3



Problema 4



Problema 5

4. Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(9, 4)$.

$AB = \sqrt{(5+3)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{5}$ $\quad BC = \sqrt{(9-5)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$

$$AC = \sqrt{(9+3)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{5}$$

Como $AB + BC = AC$, o sea, $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$, los puntos son colineales.

5. Determinar un punto que equidiste de los puntos $A(1, 7)$, $B(8, 6)$, $C(7, -1)$.

Sea $P(x, y)$ el punto buscado. Ha de ser, $PA = PB = PC$.

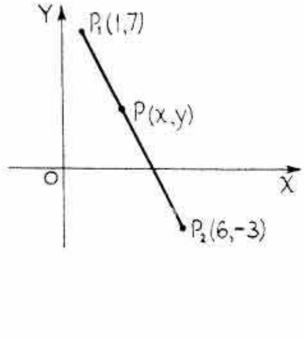
Como $PA = PB$, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2}$.
Elevando al cuadrado y simplificando, $7x - y - 25 = 0$. (1)

Como $PA = PC$, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2}$.
Elevando al cuadrado y simplificando, $3x - 4y = 0$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) resulta $x = 4$, $y = 3$. Por tanto, el punto buscado tiene de coordenadas $(4, 3)$.

PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RELACION DADA.

6. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(1, 7)$ y $P_2(6, -3)$ en la relación $r = 2/3$.



Como la relación es positiva, P_1P y PP_2 han de ser del mismo sentido y, por tanto, el punto $P(x, y)$ estará situado entre los puntos dados extremos del segmento.

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{3}$$

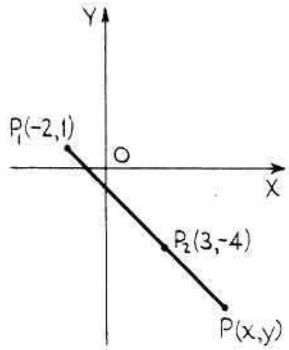
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{1 + \frac{2}{3}(6)}{1 + \frac{2}{3}} = 3 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{7 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = 3$$

El punto buscado es (3, 3).

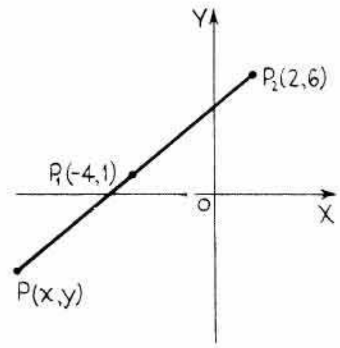
7. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-2, 1)$ y $P_2(3, -4)$ en la relación $r = -8/3$.

Como la relación es negativa, P_1P y PP_2 han de ser de sentido opuesto, con lo que el punto $P(x, y)$ será exterior al segmento P_1P_2. $\quad r = \dfrac{P_1P}{PP_2} = -\dfrac{8}{3}$.

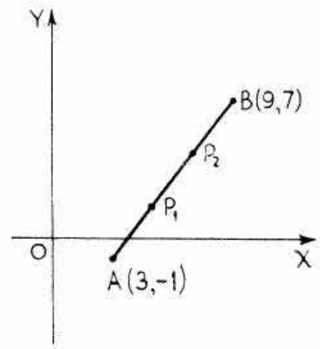
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2 + \left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = 6 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = -7$$



Problema 7



Problema 8



Problema 9

8. El extremo de un diámetro de una circunferencia de centro $P_1(-4, 1)$ es $P_2(2, 6)$. Hallar las coordenadas $P(x, y)$ del otro extremo.

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = -\frac{1}{2}$$

Como P_1P y PP_2 son de sentido opuesto, la relación r es negativa.

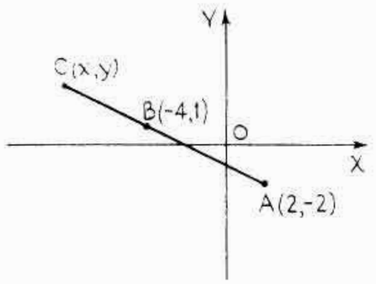
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -10 \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(6)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4$$

9. Hallar dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que dividan al segmento que une $A(3, -1)$ con $B(9, 7)$ en tres partes iguales.

Para hallar $P_1(x_1, y_1)$: $\quad r_1 = \dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{1}{2}, \quad x_1 = \dfrac{3 + \frac{1}{2}(9)}{1 + \frac{1}{2}} = 5, \quad y_1 = \dfrac{-1 + \frac{1}{2}(7)}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{5}{3}.$

Para hallar $P_2(x_2, y_2)$: $\quad r_2 = \dfrac{AP_2}{P_2B} = \dfrac{2}{1}, \quad x_2 = \dfrac{3 + 2(9)}{1 + 2} = 7, \quad y_2 = \dfrac{-1 + 2(7)}{1 + 2} = \dfrac{13}{3}.$

10. Hallar las coordenadas del extremo $C(x, y)$ del segmento que une este punto con $A(2, -2)$ sabiendo que el punto $B(-4, 1)$ está situado a una distancia de A igual a las tres quintas partes de la longitud total del segmento.

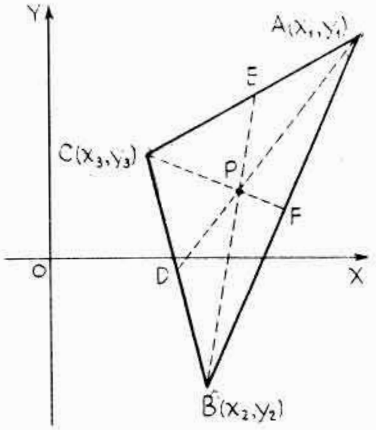


$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2} \qquad r = \frac{AC}{CB} = -\frac{5}{2}$$

Como AC y CB son de sentido opuesto, la relación r es negativa.

$$x = \frac{2 + \left(-\frac{5}{2}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)} = -8 \qquad y = \frac{-2 + \left(-\frac{5}{2}\right)(1)}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right)} = 3$$

11. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto $P(x, y)$ llamado baricentro, situado de los vértices a 2/3 de la distancia de cada uno de ellos al punto medio del lado opuesto. Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo cuyos vértices tienen de coordenadas $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.



Consideremos la mediana APD, siendo D el punto medio de BC.

Las coordenadas de D son $\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}$.

Como $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{2}{3}$, resulta $r = \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{2}{1} = 2$.

$$x = \frac{x_1 + 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

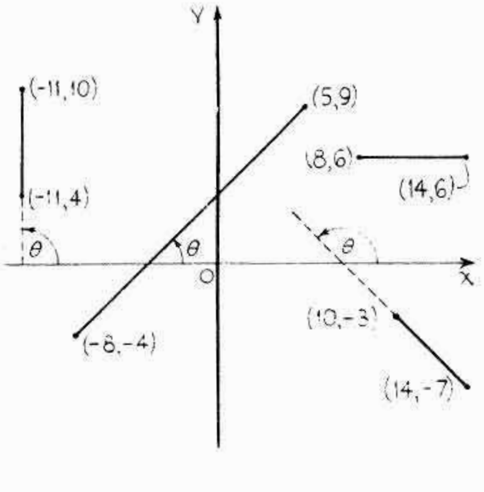
Las coordenadas del baricentro de un triángulo son, pues, $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

Al mismo resultado se habría llegado considerando las medianas BPE o CPF, siendo en todo caso $r = \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BP}{PE} = \dfrac{CP}{PF} = \dfrac{2}{1} = 2$.

INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA

12. Hallar la pendiente m y el ángulo de inclinación θ de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

a) $(-8, -4), (5, 9)$. *c*) $(-11, 4), (-11, 10)$.
b) $(10, -3), (14, -7)$. *d*) $(8, 6), (14, 6)$.



$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) $m = \dfrac{9 + 4}{5 + 8} = 1 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45^\circ$

b) $m = \dfrac{-7 + 3}{14 - 10} = -1 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} -1 = 135^\circ$

c) $m = \dfrac{10 - 4}{-11 + 11} = \dfrac{6}{0} = \infty \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \infty = 90^\circ$

d) $m = \dfrac{6 - 6}{14 - 8} = \dfrac{0}{6} = 0 \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1} 0 = 0^\circ$

13. Demostrar que los puntos $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(6, 1)$ son colineales.

Pendiente de $AB = \dfrac{2-4}{3+3} = -\dfrac{1}{3}$. Pendiente de $AC = \dfrac{1-4}{6+3} = -\dfrac{1}{3}$.

Como la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

14. Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos $A(8, 6)$, $B(4, 8)$ y $C(2, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

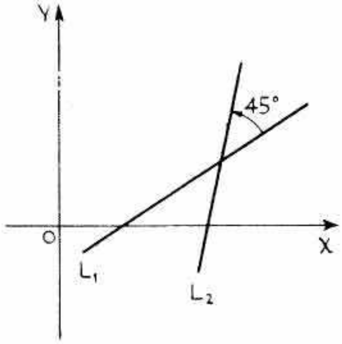
Pendiente de $AB = \dfrac{8-6}{4-8} = -\dfrac{1}{2}$. Pendiente de $BC = \dfrac{4-8}{2-4} = 2$.

Como la pendiente de AB es el recíproco con signo contrario de la pendiente de BC, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

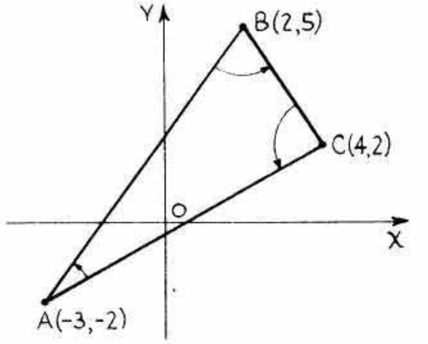
ANGULO DE DOS RECTAS

15. Sabiendo que el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 es de 45°, y que la pendiente m_1 de L_1 es 2/3, hallar la pendiente m_2 de L_2.

$\operatorname{tg} 45° = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, es decir, $1 = \dfrac{m_2 - \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{2}{3} m_2}$. De esta ecuación, $m_2 = 5$.



Problema 15



Problema 16

16. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-3, -2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 2)$.

$m_{AB} = \dfrac{5+2}{2+3} = \dfrac{7}{5}$ $\qquad m_{BC} = \dfrac{2-5}{4-2} = -\dfrac{3}{2}$ $\qquad m_{CA} = \dfrac{2+2}{4+3} = \dfrac{4}{7}$

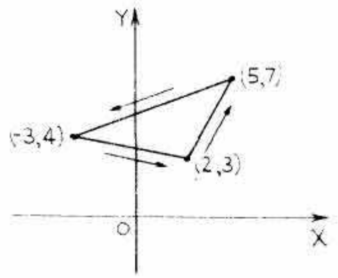
$$\operatorname{tg} A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{1 + m_{AB} m_{CA}} = \frac{\dfrac{7}{5} - \dfrac{4}{7}}{1 + \dfrac{7}{5}\left(\dfrac{4}{7}\right)} = \frac{29}{63}. \qquad A = 24° \, 43{,}1'.$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC} m_{AB}} = \frac{-\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{5}}{1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{7}{5}\right)} = \frac{29}{11}. \qquad B = 69° \, 13{,}6'.$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA} m_{BC}} = \frac{\dfrac{4}{7} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{1 + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \frac{29}{2}. \quad C = 86°3{,}3'.$$ Comprobación: $A + B + C = 180°$.

AREA DE UN POLIGONO DE VERTICES CONOCIDOS.

17. Hallar el área A del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (2, 3), (5, 7), (—3, 4).



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[2\cdot 7 + 5\cdot 4 + (-3)(3) - 2\cdot 4 - (-3)(7) - 5\cdot 3]$$

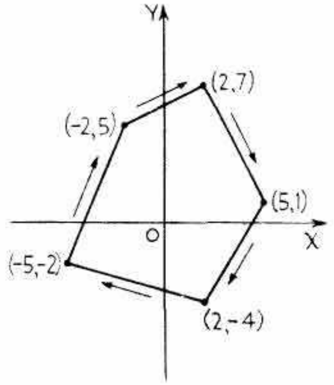
$$= \tfrac{1}{2}(14 + 20 - 9 - 8 + 21 - 15) = 11{,}5$$ unidades de superficie.

18. Hallar el área A del pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas (—5, —2), (—2, 5), (2, 7), (5, 1), (2, —4).

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \\ 2 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[(-5)(5) + (-2)(7) + 2\cdot 1 + 5(-4) + 2(-2) - (-5)(-4) - 2\cdot 1 - 5\cdot 7 - 2\cdot 5 - (-2)(-2)]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-132) = -66.$$



Solución: 66 unidades de superficie. Si se toman los vértices recorriendo el polígono en el sentido contrario al de las agujas del reloj, el área se considera positiva, y en caso contrario negativa.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representar los puntos de coordenadas: (2, 3), (4, 0), (—3, 1), ($\sqrt{2}$, —1), (—2, 0), (—2, $\sqrt{3}$), (0, 1), (—2, $\sqrt{8}$), ($\sqrt{7}$, 0), (0, 0), (4,5, —2), ($\sqrt{10}$, — $\sqrt{2}$), (0, $\sqrt{3}$), (2,3, —6).

2. Representar los triángulos de vértices: *a*) (0, 0), (—1, 5), (4, 2);
b) ($\sqrt{2}$, 0), (4, 5), (—3, 2);
c) (2 + $\sqrt{2}$, —3), ($\sqrt{3}$, 3), (—2, 1 + $\sqrt{8}$).

3. Representar los polígonos de vértices: *a*) (—3, 2), (1, 5), (5, 3), (1, —2);
b) (—5, 0), (—3, —4), (3, —3), (7, 2), (1, 6).

4. Hallar la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:
a) (4, 1), (3, —2); *c*) (0, 3), (—4, 1); *e*) (2, —6), (2, —2);
b) (—7, 4), (1, —11); *d*) (—1, —5), (2, —3); *f*) (—3, 1), (3, —1).
Sol. *a*) $\sqrt{10}$, *b*) 17, *c*) $2\sqrt{5}$, *d*) $\sqrt{13}$, *e*) 4, *f*) $2\sqrt{10}$.

5. Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:
a) (—2, 5), (4, 3), (7, —2); *c*) (2, —5), (—3, 4), (0, —3);
b) (0, 4), (—4, 1), (3, —3); *d*) (—1, —2), (4, 2), (—3, 5).
Sol. *a*) 23,56, *b*) 20,67, *c*) 20,74, *d*) 21,30.

6. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles:
a) (2, —2), (—3, —1), (1, 6); *c*) (2, 4), (5, 1), (6, 5);
b) (—2, 2), (6, 6), (2, —2); *d*) (6, 7), (—8, —1), (—2, —7).

7. Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectángulos. Hallar sus áreas.

a) (0, 9), (—4, —1), (3, 2); *c*) (3, —2), (—2, 3), (0, 4);
b) (10, 5), (3, 2), (6, —5); *d*) (—2, 8), (—6, 1), (0, 4).
Sol. Areas: *a*) 29, *b*) 29, *c*) 7,5, *d*) 15 unidades de superficie.

8. Demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo:

a) (—1, —2), (0, 1), (—3, 2), (—4, —1);
b) (—1, —5), (2, 1), (1, 5), (—2, —1);
c) (2, 4), (6, 2), (8, 6), (4, 8).

9. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos:

a) (3, 3), (6, 2), (8, —2); *b*) (4, 3), (2, 7), (—3, —8); *c*) (2, 3), (4, —1), (5, 2).
Sol. *a*) (3, —2), *b*) (—5, 1), *c*) (3, 1).

10. Demostrar, mediante la fórmula de la distancia, que los puntos siguientes son colineales:

a) (0, 4), (3, —2), (—2, 8); *c*) (1, 2), (—3, 10), (4, —4);
b) (—2, 3), (—6, 1), (—10, —1); *d*) (1, 3), (—2, —3), (3, 7).

11. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera $P(x, y)$ a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos vértices. Supóngase que las coordenadas de los vértices son (0, 0), (0, b), (a, b) y (a, 0).

12. Hallar el punto de abscisa 3 que diste 10 unidades del punto (—3, 6).
Sol. (3, —2), (3, 14).

13. Hallar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento que determinan $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \frac{P_1P}{PP_2}$.

a) $P_1(4, -3)$, $P_2(1, 4)$, $r = \frac{2}{1}$. *d*) $P_1(0, 3)$, $P_2(7, 4)$, $r = -\frac{2}{7}$.

b) $P_1(5, 3)$, $P_2(-3, -3)$, $r = \frac{1}{3}$. *e*) $P_1(-5, 2)$, $P_2(1, 4)$, $r = -\frac{5}{3}$.

c) $P_1(-2, 3)$, $P_2(3, -2)$, $r = \frac{2}{5}$. *f*) $P_1(2, -5)$, $P_2(6, 3)$, $r = \frac{3}{4}$.

Sol. *a*) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(3, \frac{3}{2}\right)$, *c*) $\left(-\frac{4}{7}, \frac{11}{7}\right)$, *d*) $\left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$, *e*) (10, 7), *f*) $\left(\frac{26}{7}, -\frac{11}{7}\right)$.

14. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son:

a) (5, 7), (1, —3), (—5, 1); *c*) (3, 6), (—5, 2), (7, —6); *e*) (—3, 1), (2, 4), (6, —2).
b) (2, —1), (6, 7), (—4, —3); *d*) (7, 4), (3, —6), (—5, 2);

Sol. *a*) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, *b*) $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$, *c*) $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, *d*) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, *e*) $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

15 Sabiendo que el punto (9, 2) divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = 3/7$, hallar las coordenadas de P_2.
Sol. (16, —12).

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (—2, 1), (5, 2) y (2, —3).
Sol. (1, 6), (9, —2), (—5, —4).

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son (3, 2), (—1, —2) y (5, —4).
Sol. (—3, 4), (9, 0), (1, —8).

18. Demostrar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, -6)$ y $D(-5, -4)$ forman otro cuadrilátero cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

19. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de dos lados de los triángulos del Problema 14 son paralelas al tercer lado e iguales a su mitad.

20. Dado el cuadrilátero $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$ y $D(2, -8)$, demostrar que:

a) La recta que une los puntos medios de AD y BC pasa por el punto medio del segmento que une los puntos medios de AB y CD.
b) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero forman un paralelogramo.

21. El segmento que une $A(-2, -1)$ con $B(3, 3)$ se prolonga hasta C. Sabiendo que $BC = 3AB$, hallar las coordenadas de C. *Sol.* $(18, 15)$.

22. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices. Ind.: Supóngase que las coordenadas del vértice del ángulo recto son $(0, 0)$ y las de los otros vértices $(a, 0)$ y $(0, b)$.

23. Demostrar que en los triángulos isósceles del Problema 6 dos de las medianas son de la misma longitud.

24. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(3, 4), (1, -2)$; *c*) $(6, 0), (6, \sqrt{3})$; *e*) $(2, 4), (-2, 4)$;
b) $(-5, 3), (2, -3)$; *d*) $(1, 3), (7, 1)$; *f*) $(3, -2), (3, 5)$.

Sol. *a*) 3, *b*) $-\frac{6}{7}$, *c*) ∞, *d*) $-\frac{1}{3}$, *e*) 0, *f*) ∞.

25. Hallar las inclinaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(4, 6)$ y $(1, 3)$; *c*) $(2, 3)$ y $(1, 4)$; *e*) $(\sqrt{3}, 2)$ y $(0, 1)$;
b) $(2, \sqrt{3})$ y $(1, 0)$; *d*) $(3, -2)$ y $(3, 5)$; *f*) $(2, 4)$ y $(-2, 4)$.

Sol. *a*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 1 = 45°$; *c*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} -1 = 135°$; *e*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 1/\sqrt{3} = 30°$;
b) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3} = 60°$; *d*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \infty = 90°$; *f*) $\theta = \operatorname{tg}^{-1} 0 = 0°$.

26. Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.

a) $(2, 3), (-4, 7)$ y $(5, 8)$; *d*) $(0, 5), (5, 0)$ y $(6, -1)$;
b) $(4, 1), (5, -2)$ y $(6, -5)$; *e*) $(a, 0), (2a, -b)$ y $(-a, 2b)$;
c) $(-1, -4), (2, 5)$ y $(7, -2)$; *f*) $(-2, 1), (3, 2)$ y $(6, 3)$.

Sol. *a*) No, *b*) Sí, *c*) No, *d*) Sí, *e*) Sí, *f*) No.

27. Demostrar que el punto $(1, -2)$ está situado en la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$ y que equidista de ellos.

28. Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.

a) $(6, 5), (1, 3)$ y $(5, -7)$; *c*) $(2, 4), (4, 8)$ y $(6, 2)$;
b) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *d*) $(3, 4), (-2, -1)$ y $(4, 1)$.

29. Hallar los ángulos interiores de los triángulos cuyos vértices son:

a) $(3, 2), (5, -4)$ y $(1, -2)$; *Sol.* $45°, 45°, 90°$.
b) $(4, 2), (0, 1)$ y $(6, -1)$; *Sol.* $109° 39{,}2'$, $32° 28{,}3'$, $37° 52{,}5'$.
c) $(-3, -1), (4, 4)$ y $(-2, 3)$; *Sol.* $113° 29{,}9'$, $40° 25{,}6'$, $26° 4{,}5'$.

30. Demostrar, hallando los ángulos interiores, que los triángulos siguientes son isósceles, y efectuar la comprobación calculando las longitudes de los lados.

a) (2, 4), (5, 1) y (6, 5); *Sol.* 59° 2,2', 61° 55,6', 59° 2,2'.
b) (8, 2), (3, 8) y (—2, 2); *Sol.* 50° 11,7', 79° 36,6', 50° 11,7'.
c) (3, 2), (5, —4) y (1, —2); *Sol.* 45°, 45°, 90°.
d) (1, 5), (5, —1) y (9, 6); *Sol.* 63° 26', 63° 26', 53° 8'.

31. La pendiente de una recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ es igual a 3/4. Situar dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de A.
Sol. (7, 5), (—1, —1).

32. El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos (—4, 5) y (3, y) con la que pasa por (—2, 4) y (9, 1) es de 135°. Hallar el valor de y. *Sol.* $y = 9$.

33. La recta L_2 forma un ángulo de 60° con la recta L_1. Si la pendiente de L_1 es 1, hallar la pendiente de L_2.
Sol. $-(2 + \sqrt{3})$.

34. Hallar la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la recta que pasa por los puntos de coordenadas (2, —1) y (5, 3). *Sol.* $m_2 = -7$.

35. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 5) y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $x - 3y + 6 = 0$. *Sol.* $2x - y + 1 = 0$.

36. Hallar las áreas de los triángulos cuyas coordenadas de los vértices son:

a) (2, —3), (4, 2) y (—5, —2) *Sol.* 18,5 unidades de superficie.
b) (—3, 4), (6, 2) y (4, —3) *Sol.* 24,5.
c) (—8, —2), (—4, —6) y (—1, 5) *Sol.* 28.
d) (0, 4), (—8, 0) y (—1, —4) *Sol.* 30.
e) ($\sqrt{2}$, 2), (—4, 6) y (4, $-2\sqrt{2}$) *Sol.* $7\sqrt{2} - 2 = 7{,}899$.
f) (—7, 5), (1, 1) y (—3, 3) *Sol.* 0. Razonar la respuesta.
g) (a, $b + c$), (b, $c + a$) y (c, $a + b$) *Sol.* 0.

37. Hallar las áreas de los polígonos cuyas coordenadas de los vértices son:

a) (2, 5), (7, 1), (3, —4) y (—2, 3) *Sol.* 39,5 unidades de superficie.
b) (0, 4), (1, —6), (—2, —3) y (—4, 2) *Sol.* 25,5.
c) (1, 5), (—2, 4), (—3, —1), (2, —3) y (5, 1) *Sol.* 40.

38. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados de los triángulos del Problema 36 dividen a cada uno de ellos en cuatro triángulos de áreas iguales.