CAPITULO 3

La línea recta

UNA LINEA RECTA, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular), etc.

FORMAS DE LA ECUACION DE LA RECTA:

a) PUNTO-PENDIENTE. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

b) PENDIENTE-ORDENADA EN EL ORIGEN. La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto $(0, b)$ —siendo b la ordenada en el origen— es

$$y = mx + b.$$

c) CARTESIANA. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

d) REDUCIDA O ABSCISA Y ORDENADA EN EL ORIGEN. La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados x e y en los puntos $(a, 0)$ —siendo a la abscisa en el origen— y $(0, b)$ —siendo b la ordenada en el origen—, respectivamente, es

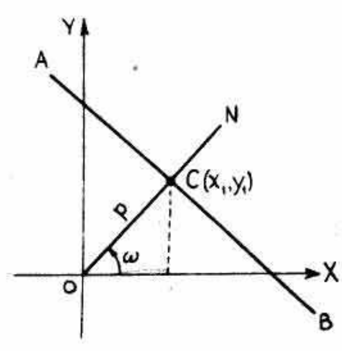
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

e) GENERAL. Una ecuación lineal o de primer grado en las variables x e y es de la forma $Ax + By + C = 0$, en donde A, B y C son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es $m = -\dfrac{A}{B}$ y su ordenada en el origen $b = -\dfrac{C}{B}$.

f) NORMAL. Una recta también queda determinada si se conocen la longitud de la perpendicular a ella trazada desde el origen $(0, 0)$ y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje x.

Sea AB la recta y ON la perpendicular desde el origen O a AB.

La distancia p (parámetro) de O a AB se considera siempre positiva cualquiera que sea la posición de AB, es decir, para todos los valores del ángulo ω que la perpendicular forma con el semieje x positivo desde 0 a 360°.



Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto C.

En estas condiciones, $x_1 = p \cos \omega$, $y_1 = p \operatorname{sen} \omega$, y pendiente de $AB = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \omega} = -\operatorname{cotg} \omega = -\dfrac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}$.

Llamando (x, y) otro punto cualquiera de AB, $y - y_1 = -\operatorname{cotg}\omega\,(x - x_1)$, o bien,

$$y - p\,\operatorname{sen}\omega = -\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}(x - p\cos\omega).$$

Simplificando, $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$, que es la ecuación de la recta en forma normal.

REDUCCION DE LA FORMA GENERAL A NORMAL. Sean $Ax + By + C = 0$ y $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$ las ecuaciones de una misma recta escritas en sus formas general y normal respectivamente; los coeficientes de ambas ecuaciones han de ser iguales o proporcionales. Por tanto,

$$\frac{\cos\omega}{A} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{B} = \frac{-p}{C} = k,$$ siendo k la constante de proporcionalidad.

En estas condiciones, $\cos\omega = kA$, $\operatorname{sen}\omega = kB$, $-p = kC$. Elevando al cuadrado y sumando las dos primeras, $\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = k^2(A^2 + B^2)$, o sea, $1 = k^2(A^2 + B^2)$, de donde $k = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Teniendo en cuenta este valor de k,

$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\quad \operatorname{sen}\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\quad -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

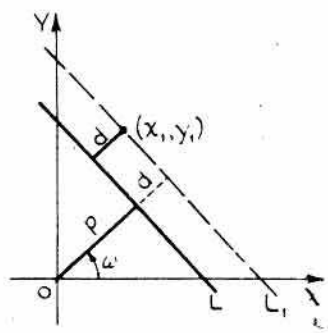
en la que se debe considerar el signo del radical el opuesto al de C. Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA. Para hallar la distancia d de un punto (x_1, y_1) a una recta L, se traza la recta L_1 paralela a L y que pase por (x_1, y_1).

La ecuación de L es $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$, y la ecuación de L_1 es $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - (p + d) = 0$, ya que ambas rectas son paralelas.

Las coordenadas de (x_1, y_1) satisfacen la ecuación de L_1, $x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - (p + d) = 0$. Despejando la distancia d,

$$d = x_1\cos\omega + y_1\operatorname{sen}\omega - p.$$



En el caso de que (x_1, y_1) y el origen estén a distinto lado de la recta L, la distancia d es positiva; si estuvieran al mismo lado de L, d sería negativa.

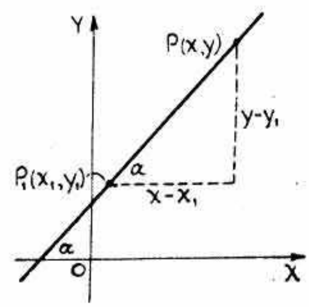
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente, o coeficiente angular, sea m. (Ver figura.)

Sea $P(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta.

La pendiente m de la recta que pasa por los puntos (x, y) y (x_1, y_1) es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \text{ o bien, } y - y_1 = m(x - x_1).$$



2. Deducir la ecuación de la recta de pendiente m que corte al eje y en el punto $(0, b)$.

Sea $P(x, y)$ otro punto cualquiera de la recta.

La pendiente m de la recta que pasa por (x, y) y $(0, b)$ es $m = \dfrac{y - b}{x - 0}$. Por tanto, $y = mx + b$.

3. Hallar la ecuación de la recta (*a*) que pasa por $(-4, 3)$ y tenga de pendiente $\frac{1}{2}$, (*b*) que pasa por $(0, 5)$ y tenga de pendiente -2, (*c*) que pasa por $(2, 0)$ y tenga de pendiente $\frac{3}{4}$.

Sea $P(x, y)$ otro punto genérico cualquiera de cada una de las rectas. Aplicando la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

a) $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$, es decir, $2y - 6 = x + 4$, o bien, $x - 2y + 10 = 0$.

b) $y - 5 = -2(x - 0)$, es decir, $y - 5 = 2x$, o bien, $2x + y - 5 = 0$.

Esta ecuación también se puede obtener aplicando la fórmula $y = mx + b$. En esta forma, $y = -2x + 5$, es decir, $2x + y - 5 = 0$.

c) $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2)$, o sea, $4y = 3x - 6$, o bien, $3x - 4y - 6 = 0$.

4. Deducir la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).
Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).
Pendiente de la recta que une (x, y) y (x_1, y_1) = pendiente de la recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Por tanto, $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -3)$ y $(4, 2)$.

Aplicando $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, resulta $\dfrac{y + 3}{x + 2} = \dfrac{-3 - 2}{-2 - 4}$, o sea, $5x - 6y - 8 = 0$.

6. Deducir la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $(a, 0)$ y $(0, b)$. (a = abscisa en el origen, b = ordenada en el origen.)

Sustituyendo en $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ se tiene $\dfrac{y - 0}{x - a} = \dfrac{0 - b}{a - 0}$, o sea, $bx + ay = ab$.

Dividiendo $bx + ay = ab$ por ab se tiene $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

7. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y -3, respectivamente.

Aplicando $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, se tiene la ecuación $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{-3} = 1$, o bien, $3x - 5y - 15 = 0$.

8. Hallar la pendiente m y la ordenada en el origen b de la recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$, siendo A, B y C constantes arbitrarias.

Despejando y, $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Comparando con $y = mx + b$, $m = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Si $B = 0$ se tiene $Ax + C = 0$, o bien, $x = -\dfrac{C}{A}$, recta paralela al eje y.

Si $A = 0$ se tiene $By + C = 0$, o bien, $y = -\dfrac{C}{B}$, recta paralela al eje x.

9. Hallar la pendiente m y la ordenada en el origen b de la recta $2y + 3x = 7$.

Escribiendo la ecuación en la forma $y = mx + b$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$. Luego su pendiente es $-3/2$ y su ordenada en el origen $7/2$.

Si se escribe en la forma $Ax + By + C = 0$, es decir, $3x + 2y - 7 = 0$, la pendiente $m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$.

10. Demostrar que si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ son paralelas, $A/A' = B/B'$, y que si son perpendiculares, $AA' + BB' = 0$.

Si son paralelas, $m = m'$, es decir, $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$, o bien, $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

Si son perpendiculares, $m = -\frac{1}{m'}$, es decir, $-\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$, o bien, $AA' + BB' = 0$.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que une los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.
Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(2, -3)$.
Pendiente de la recta que pasa por (x, y) y $(2, -3)$ = pendiente de la recta que pasa por $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

Por tanto, $\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{1 - 2}{4 + 2}$. Simplificando, $x + 6y + 16 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$, que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$, es $-\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$, luego la pendiente de la recta pedida es $-\frac{3}{2}$.

Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(-2, 3)$ y tiene de pendiente $-\frac{3}{2}$.

Entonces, $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$. Simplificando, $3x + 2y = 0$.

13. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $(7, 4)$ y $(-1, -2)$.

El punto medio (x_0, y_0) del segmento tiene de coordenadas

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Pendiente del segmento $= \frac{4 + 2}{7 + 1} = \frac{3}{4}$, luego la pendiente de la recta pedida es igual a $-\frac{4}{3}$.

Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por $(3, 1)$ y tiene de pendiente $-\frac{4}{3}$.

Entonces, $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$. Simplificando, $4x + 3y - 15 = 0$.

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2, -3)$ y tenga una inclinación de 60°.

Sea (x, y) un punto genérico de la recta de pendiente $m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

Entonces, $y + 3 = \sqrt{3}(x - 2)$. Simplificando, $\sqrt{3}x - y - 3 - 2\sqrt{3} = 0$.

15. Hallar el valor del parámetro k de forma que:

a) $3kx + 5y + k - 2 = 0$ pase por el punto $(-1, 4)$.
b) $4x - ky - 7 = 0$ tenga de pendiente 3;
c) $kx - y = 3k - 6$ tenga de abscisa en el origen 5.

a) Sustituyendo $x = -1, y = 4$: $3k(-1) + 5(4) + k - 2 = 0$, $2k = 18$, $k = 9$.

b) Aplicando la forma $Ax + By + C = 0$, pendiente $= -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{4}{-k} = 3$, $k = \dfrac{4}{3}$.

O bien, reduciendo $4x - ky - 7 = 0$ a la forma $y = mx + b$, $y = \dfrac{4}{k}x - \dfrac{7}{k}$.

Por tanto, pendiente $= \dfrac{4}{k} = 3$, $3k = 4$, $k = \dfrac{4}{3}$.

c) Para $y = 0$, $x = \dfrac{3k - 6}{k} = 5$. De aquí resulta $3k - 6 = 5k$, $k = -3$.

16. Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente $-3/4$ que formen con los ejes coordenados un triángulo de área 24 unidades de superficie.

Una recta de pendiente $-\dfrac{3}{4}$ y ordenada en el origen b viene dada por $y = -\dfrac{3}{4}x + b$.

Para $x = 0$, $y = b$; para $y = 0$, $x = \dfrac{4}{3}b$.

Area del triángulo $= \frac{1}{2}$(producto de los catetos) $= \frac{1}{2}\left(b \cdot \dfrac{4}{3}b\right) = \dfrac{2}{3}b^2 = 24$.

De aquí se deduce que $2b^2 = 3(24)$, $b^2 = 36$, $b = \pm 6$, y las ecuaciones pedidas son

$$y = -\frac{3}{4}x \pm 6, \text{ es decir, } 3x + 4y - 24 = 0 \text{ y } 3x + 4y + 24 = 0.$$

17. Hallar el lugar geométrico representado por las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 8xy - 9y^2 = 0$;
b) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

a) Como la ecuación se descompone en los factores $(x - y)(x + 9y) = 0$, el lugar que representa son las dos rectas $x - y = 0$, $x + 9y = 0$.

b) Descomponiendo en factores, $(x - 1)(x^2 - 3x - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 4) = 0$.
Por tanto, representa las tres rectas $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 4 = 0$.

18. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) que disten el doble de la recta $x = 5$ que de la recta $y = 8$.

Distancia del punto (x, y) a la recta $x = 5 = \pm 2$[distancia de (x, y) a la recta $y = 8$],
es decir, $x - 5 = \pm 2(y - 8)$.

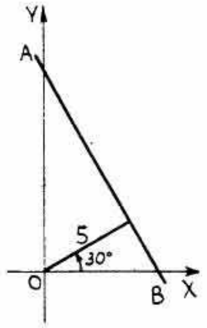
Por consiguiente, el lugar geométrico está constituido por el par de rectas

$$x - 2y + 11 = 0 \text{ y } x + 2y - 21 = 0, \text{ o sea, } (x - 2y + 11)(x + 2y - 21) = 0.$$

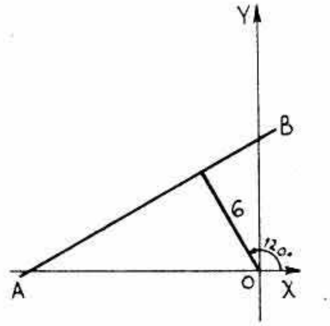
ECUACION NORMAL DE LA RECTA.

19. Trazar las rectas AB para los valores de p y ω que se indican y escribir sus ecuaciones respectivas.

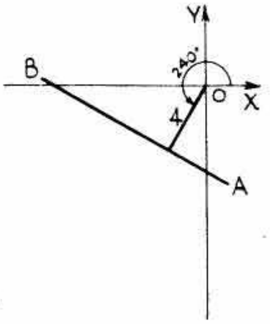
a) $p = 5,\ \omega = \pi/6 = 30^\circ$. *c*) $p = 4,\ \omega = 4\pi/3 = 240^\circ$.
b) $p = 6,\ \omega = 2\pi/3 = 120^\circ$. *d*) $p = 5,\ \omega = 7\pi/4 = 315^\circ$.



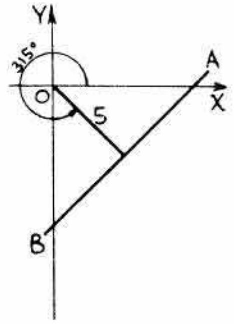
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

a) $x\cos 30^\circ + y \operatorname{sen} 30^\circ - 5 = 0$, es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$, o bien, $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$.

b) $x\cos 120^\circ + y \operatorname{sen} 120^\circ - 6 = 0$, es decir, $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 6 = 0$, o bien, $x - \sqrt{3}y + 12 = 0$

c) $x\cos 240^\circ + y \operatorname{sen} 240^\circ - 4 = 0$, es decir, $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y - 4 = 0$, o bien, $x + \sqrt{3}y + 8 = 0$.

d) $x\cos 315^\circ + y \operatorname{sen} 315^\circ - 5 = 0$, es decir, $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 5 = 0$, o bien, $x - y - 5\sqrt{2} = 0$

20. Reducir a forma normal las ecuaciones siguientes y hallar p y ω.

a) $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$. *c*) $x + y + 8 = 0$. *e*) $4y - 7 = 0$.
b) $3x - 4y - 6 = 0$. *d*) $12x - 5y = 0$. *f*) $x + 5 = 0$.

La forma normal de $Ax + By + C = 0$ es $\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$

a) $A = \sqrt{3},\ B = 1,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Como $C(= -9)$ es negativo, $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo. La ecuación en forma normal es

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{9}{2}, \quad \omega = 30^\circ.$$

Como sen ω y cos ω son ambos positivos, ω está en el primer cuadrante.

b) $A = 3,\ B = -4,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{9+16} = 5$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{sen}\omega = -\frac{4}{5}, \quad p = \frac{6}{5}, \quad \omega = 306^\circ\ 52'.$$

Como cos ω es positivo y sen ω es negativo, ω está en el cuarto cuadrante.

c) $A = 1,\ B = 1,\ \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{2}$. Como $C(= +8)$ es positivo, el radical se toma con signo negativo. La ecuación en forma normal es

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 4\sqrt{2} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = \operatorname{sen}\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 4\sqrt{2}, \quad \omega = 225^\circ.$$

Como $\cos\omega$ y $\operatorname{sen}\omega$ son negativos, ω está en el tercer cuadrante.

d) $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$. Como $C = 0$, el radical se toma con el mismo signo que $B(= -5)$, con lo cual, $\operatorname{sen}\omega$ será positivo y $\omega < 180°$. La ecuación en forma normal es

$$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = -\frac{12}{13},\ \operatorname{sen}\omega = \frac{5}{13},\ p = 0,\quad \omega = 157°23'.$$

Como $\cos\omega$ es negativo y $\operatorname{sen}\omega$ es positivo, ω está en el segundo cuadrante.

e) $A = 0$, $B = 4$, $\sqrt{A^2 + B^2} = 4$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{4}{4}y - \frac{7}{4} = 0, \text{ es decir, } y - \frac{7}{4} = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = 0, \quad \operatorname{sen}\omega = 1, \quad p = \frac{7}{4}, \quad \omega = 90°.$$

f) $A = 1$, $B = 0$, $\sqrt{A^2 + B^2} = 1$. La ecuación en forma normal es

$$\frac{1}{-1}x + \frac{5}{-1} = 0, \text{ es decir, } -x - 5 = 0, \quad \text{y} \quad \cos\omega = -1,\ \operatorname{sen}\omega = 0,\ p = 5,\ \omega = 180°.$$

21. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(4, -2)$ y distan 2 unidades del origen.

La ecuación de las rectas que pasan por el punto $(4, -2)$ es $y + 2 = m(x - 4)$, o bien, $mx - y - (4m + 2) = 0$.

La forma normal de $mx - y - (4m + 2) = 0$ es $\dfrac{mx - y - (4m + 2)}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = 0$.

Luego, $p = \dfrac{4m + 2}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = 2$, o bien, $(4m + 2)^2 = 4(m^2 + 1)$. Resolviendo, $m = 0, -\dfrac{4}{3}$.

Las ecuaciones pedidas son $y + 2 = 0$, e $y + 2 = -\dfrac{4}{3}(x - 4)$, o bien, $4x + 3y - 10 = 0$.

22. Hallar la distancia d desde *a*) la recta $8x + 15y - 24 = 0$ al punto $(-2, -3)$.
b) la recta $6x - 8y + 5 = 0$ al punto $(-1, 7)$.

a) La forma normal de la ecuación es $\dfrac{8x + 15y - 24}{+\sqrt{8^2 + (15)^2}} = 0$, o bien, $\dfrac{8x + 15y - 24}{17} = 0$.

$d = \dfrac{8(-2) + 15(-3) - 24}{17} = \dfrac{-85}{17} = -5$. Como d es negativo, el punto $(-2, -3)$ y el origen están al mismo lado de la recta.

b) La forma normal de la ecuación es $\dfrac{6x - 8y + 5}{-\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = 0$, o bien, $\dfrac{6x - 8y + 5}{-10} = 0$.

$d = \dfrac{6(-1) - 8(7) + 5}{-10} = \dfrac{-57}{-10} = 5{,}7$. Como d es positivo, el punto $(-1, 7)$ y el origen están a distinto lado de la recta.

23. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

(L_1) $3x + 4y + 8 = 0$
y (L_2) $5x + 12y - 15 = 0$.

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico de la bisectriz L_3.

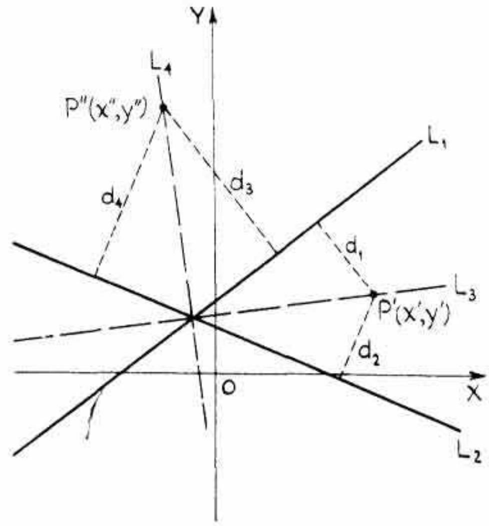
Tendremos,

$$d_1 = \frac{3x' - 4y' + 8}{-5}, \quad d_2 = \frac{5x' + 12y' - 15}{13}.$$

Para todo punto de L_3 se verifica que d_1 y d_2 son iguales en valor absoluto.

Los puntos P' y el origen están al mismo lado de L_1 pero a distinto lado de L_2. Luego d_1 es negativo y d_2 positivo, y $d_1 = -d_2$. Así, pues, el lugar geométrico de P' viene definido

$$\frac{3x' - 4y' + 8}{-5} = -\frac{5x' + 12y' - 15}{13}.$$



Simplificando y suprimiendo las primas, la ecuación de L_3 es $14x - 112y + 179 = 0$.

Análogamente, sea $P''(x'', y'')$ un punto genérico de la bisectriz L_4. Como P'' y el origen están a distinto lado de L_1 y L_2, las distancias d_3 y d_4 son positivas y $d_3 = d_4$.

Por tanto, el lugar de P'' es $\dfrac{3x'' - 4y'' + 8}{-5} = \dfrac{5x'' + 12y'' - 15}{13}$.

Simplificando y suprimiendo las primas, la ecuación de L_4 es $64x + 8y + 29 = 0$.

Obsérvese que L_3 y L_4 son rectas perpendiculares y que la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

24. Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $12x - 5y - 15 = 0$ que disten de ella 4 unidades.

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico cualquiera de la recta pedida. Entonces, $\dfrac{12x' - 5y' - 15}{13} = \pm 4$.

Simplificando y suprimiendo las primas, las ecuaciones pedidas son

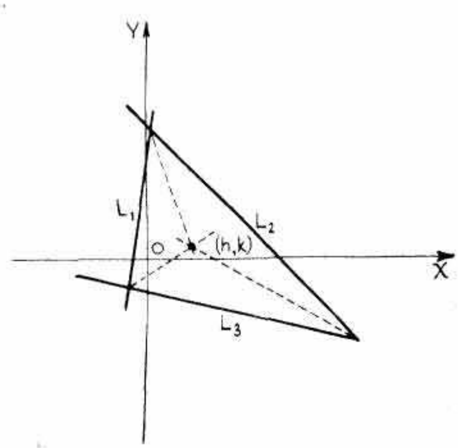
$$12x - 5y - 67 = 0 \quad \text{y} \quad 12x - 5y + 37 = 0.$$

25. Hallar el valor de k para que la distancia d de la recta $8x + 15y + k = 0$ al punto $(2, 3)$ sea igual a 5 unidades.

$$d = \frac{8(2) + 15(3) + k}{\pm 17} = \pm 5. \quad \text{Resolviendo, } k = -146,\ 24.$$

26. Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de lados

$(L_1)\ 7x - y + 11 = 0,$
$(L_2)\ x + y - 15 = 0,$
$(L_3)\ 7x + 17y + 65 = 0.$



El punto de intersección (h, k) es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Por tanto, la distancia

de (h, k) a L_1 es $d_1 = \dfrac{7h - k + 11}{-\sqrt{50}}$,

de (h, k) a L_2 es $d_2 = \dfrac{h + k - 15}{\sqrt{2}}$,

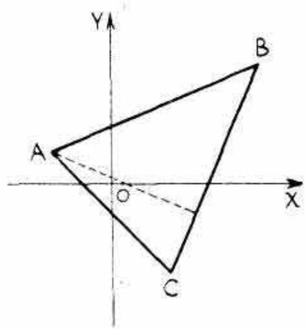
de (h, k) a L_3 es $d_3 = \dfrac{7h + 17k + 65}{-\sqrt{338}}$, Estas distancias son todas negativas ya que el punto y el origen están al mismo lado de cada recta. Luego $d_1 = d_2 = d_3$.

Como $d_1 = d_2$, $\dfrac{7h - k + 11}{-5\sqrt{2}} = \dfrac{h + k - 15}{\sqrt{2}}$. Simplificando, $3h + k = 16$.

Como $d_1 = d_3$, $\dfrac{7h - k + 11}{-5\sqrt{2}} = \dfrac{7h + 17k + 65}{-13\sqrt{2}}$. Simplificando, $4h - 7k = 13$.

Resolviendo el sistema formado por $3h + k = 16$ y $4h - 7k = 13$ se obtiene, $h = 5$, $k = 1$.

27. Dado el triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(2, -3)$, hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del mismo.



Ecuación de BC: $\dfrac{y + 3}{x - 2} = \dfrac{4 + 3}{5 - 2}$, o bien, $7x - 3y - 23 = 0$.

Distancia de BC a $A = \dfrac{7(-2) - 3(1) - 23}{\sqrt{49 + 9}} = \dfrac{-40}{\sqrt{58}}$.

Longitud de $BC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (4 + 3)^2} = \sqrt{58}$.

Area del triángulo $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{58} \cdot \dfrac{40}{\sqrt{58}}\right) = 20$ unidades de superficie.

HAZ DE RECTAS.

28. Hallar la ecuación del haz de rectas

a) de pendiente -4,
b) que pasa por el punto $(4, 1)$,
c) de ordenada en el origen 7,
d) de abscisa en el origen 5,
e) cuya suma de coordenadas en el origen sea 8,
f) cuya ordenada en el origen sea el doble que la abscisa en el origen,
g) que una de las coordenadas en el origen sea el doble de la otra.

Llamemos k, en cada caso, la constante arbitraria o parámetro del haz.

a) Sea k = ordenada en el origen del haz de rectas cuya pendiente es -4.
De la expresión $y = mx + b$ se obtiene la ecuación pedida, $y = -4x + k$, o bien, $4x + y - k = 0$.

b) Sea k = pendiente del haz de rectas que pasa por el punto $(4, 1)$.
Sustituyendo en $y - y_1 = m(x - x_1)$, la ecuación pedida es

$$y - 1 = k(x - 4), \text{ o bien, } kx - y + 1 - 4k = 0.$$

c) Sea k = pendiente del haz de rectas cuya ordenada en el origen es 7.
De $y = mx + b$ se obtiene la ecuación, $y = kx + 7$, o bien, $kx - y + 7 = 0$.

d) Sea k = pendiente del haz de rectas cuya abscisa en el origen es 5.
De $y - y_1 = m(x - x_1)$ se obtiene la ecuación, $y - 0 = k(x - 5)$, o bien, $kx - y - 5k = 0$.

e) Sea k = abscisa en el origen del haz de rectas. Entonces, $(8 - k)$ = ordenada en el origen de dicho haz.

De $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ se obtiene la ecuación, $\dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{8 - k} = 1$, o bien, $(8 - k)x + ky - 8k + k^2 = 0$.

f) Sea k = ordenada en el origen. Entonces, $\frac{1}{2}k$ = abscisa en el origen.

De $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ se obtiene la ecuación, $\dfrac{x}{\frac{1}{2}k} + \dfrac{y}{k} = 1$, o bien, $2x + y - k = 0$.

g) Pendiente de una recta $= -\dfrac{\text{ordenada en el origen}}{\text{abscisa en el origen}}$. Cuando la abscisa en el origen sea igual a ($\pm$) el doble de la ordenada en el origen, la pendiente es $\mp\frac{1}{2}$; cuando la ordenada en el origen sea numéricamente igual al doble de abscisa en el origen, la pendiente de la recta es ∓ 2. Sea k = ordenada en el origen. De $y = mx + b$, las ecuaciones del haz de rectas pedido son $y = \pm\frac{1}{2}x + k$ e $y = \pm 2x + k$.

29. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -4)$ y cuyas coordenadas en el origen suman 3.

La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto $(-2, -4)$ es $y + 4 = m(x + 2)$.

Para $x = 0$, $y = 2m - 4$; para $y = 0$, $x = \dfrac{4 - 2m}{m}$.

La suma de las coordenadas en el origen es 3. Luego, $2m - 4 + \dfrac{4 - 2m}{m} = 3$.

Simplificando, $2m^2 - 9m + 4 = 0$. Resolviendo, $(2m - 1)(m - 4) = 0$, $m = \frac{1}{2}, 4$.

Sustituyendo estos valores de m en $y + 4 = m(x + 2)$, las ecuaciones pedidas son, $y + 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$ e $y + 4 = 4(x + 2)$, o sea, $x - 2y - 6 = 0$ y $4x - y + 4 = 0$.

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 2y + 10 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y por el punto $(2, 1)$.

$3x - 2y + 10 + k(4x + 3y - 7) = 0$ es la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto de intersección de las dos dadas.

Como la recta pedida ha de pasar también por el punto $(2, 1)$, $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 10 + k(4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 7) = 0$.

Despejando k de esta ecuación resulta $k = -7/2$. La recta pedida es

$$3x - 2y + 10 - \frac{7}{2}(4x + 3y - 7) = 0, \text{ o bien, } 22x + 25y - 69 = 0.$$

31. Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $4x + y - 1 = 0$ que pase por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$.

La pendiente de la recta $4x + y - 1 = 0$ es -4. Luego la pendiente de la recta pedida es $\frac{1}{4}$.

La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto de intersección de $2x - 5y + 3 = 0$ y $x - 3y - 7 = 0$ es

$$2x - 5y + 3 + k(x - 3y - 7) = 0, \text{ o bien, } (2 + k)x - (5 + 3k)y + (3 - 7k) = 0. \quad (1)$$

La pendiente de cada una de las rectas del haz es $\dfrac{2 + k}{5 + 3k}$ y la pendiente de la recta pedida es $\frac{1}{4}$.

Por tanto, $\dfrac{2 + k}{5 + 3k} = \dfrac{1}{4}$, de donde, $k = -3$.

Sustituyendo este valor de $k = -3$ en (1) resulta la ecuación pedida, $x - 4y - 24 = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Pasa por $(0, 2)$, $m = 3$. *Sol.* $y - 3x - 2 = 0$.
b) Pasa por $(0, -3)$, $m = -2$. *Sol.* $y + 2x + 3 = 0$.
c) Pasa por $(0, 4)$, $m = 1/3$. *Sol.* $x - 3y + 12 = 0$.
d) Pasa por $(0, -1)$, $m = 0$. *Sol.* $y + 1 = 0$.
e) Pasa por $(0, 3)$, $m = -4/3$. *Sol.* $4x + 3y - 9 = 0$.

2. Hallar la ecuación de las rectas que pasan por los puntos:

a) $(2, -3)$ y $(4, 2)$. *Sol.* $5x - 2y - 16 = 0$.
b) $(-4, 1)$ y $(3, -5)$. *Sol.* $6x + 7y + 17 = 0$.
c) $(7, 0)$ y $(0, 4)$. *Sol.* $4x + 7y - 28 = 0$.
d) $(0, 0)$ y $(5, -3)$. *Sol.* $3x + 5y = 0$.
e) $(5, -3)$ y $(5, 2)$. *Sol.* $x - 5 = 0$.
f) $(-5, 2)$ y $(3, 2)$. *Sol.* $y - 2 = 0$.

3. En el triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ y $C(3, 2)$, hallar,
a) las ecuaciones de sus medianas,
Sol. $7x + 6y - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 6y + 9 = 0$.
b) el punto de intersección de las mismas. *Sol.* $(-1, 4/3)$.

4. *a*) Hallar las ecuaciones de las alturas del triángulo del Problema 3.
Sol. $2x + 3y - 8 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x - 5y + 4 = 0$.
b) Hallar el punto de intersección de dichas alturas. *Sol.* $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

5. *a*) Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo del Problema 3.
Sol. $2x - 5y + 11 = 0$, $2x - y + 6 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$.
b) Hallar el punto de intersección de dichas mediatrices.
Sol. $(-19/8, 5/4)$. Este es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

6. Demostrar que los puntos de intersección de las medianas, de las alturas y de las mediatrices de los lados del triángulo del Problema 3, están en línea recta. *Sol.* $2x - 33y + 46 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y cuya abscisa en el origen es el doble que la ordenada en el origen. *Sol.* $x + 2y - 8 = 0$.

8. Hallar el valor del parametro K en la ecuación $2x + 3y + K = 0$ de forma que dicha recta forme con los ejes coordenados un triángulo de área 27 unidades de superficie. *Sol.* $K = \pm 18$.

9. Hallar el valor del parámetro K para que la recta de ecuación $2x + 3Ky - 13 = 0$ pase por el punto $(-2, 4)$. *Sol.* $K = 17/12$.

10. Hallar el valor de K para que la recta de ecuación $3x - Ky - 8 = 0$ forme un ángulo de $45°$ con la recta $2x + 5y - 17 = 0$. *Sol.* $K = 7 - 9/7$.

11. Hallar un punto de la recta $3x + y + 4 = 0$ que equidista de los puntos $(-5, 6)$ y $(3, 2)$.
Sol. $(-2, 2)$.

12. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(1, -6)$ y cuyo producto de coordenadas en el origen es 1. *Sol.* $9x + y - 3 = 0$, $4x + y + 2 = 0$.

13. Hallar la ecuación de la recta de abscisa en el origen $-3/7$ y que es perpendicular a la recta $3x + 4y - 10 = 0$. *Sol.* $28x - 21y + 12 = 0$.

14. Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $2x + 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con $3x - 2y + 8 = 0$. *Sol.* $7x - 2y + 16 = 0$.

15. Trazar las rectas siguientes para los valores de p y ω que se indican, escribiendo sus ecuaciones.

a) $p = 6$, $\omega = 30°$. *Sol.* $\sqrt{3}x + y - 12 = 0$.
b) $p = \sqrt{2}$, $\omega = \pi/4$. *Sol.* $x + y - 2 = 0$.
c) $p = 3$, $\omega = 2\pi/3$. *Sol.* $x - \sqrt{3}y + 6 = 0$.
d) $p = 4$, $\omega = 7\pi/4$. *Sol.* $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.
e) $p = 3$, $\omega = 0°$. *Sol.* $x - 3 = 0$.
f) $p = 4$, $\omega = 3\pi/2$. *Sol.* $y + 4 = 0$.

16. Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes en forma normal. Hallar p y ω.

a) $x - 3y + 6 = 0$. *Sol.* $-\dfrac{x}{\sqrt{10}} + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y - \dfrac{6}{\sqrt{10}} = 0$, $p = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$, $\omega = 108°26'$.

b) $2x + 3y - 10 = 0$. *Sol.* $\dfrac{2}{\sqrt{13}}x + \dfrac{3}{\sqrt{13}}y - \dfrac{10}{\sqrt{13}} = 0$, $p = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$, $\omega = 56°\ 19'$.

c) $3x + 4y - 5 = 0$. *Sol.* $\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 1 = 0$, $p = 1$, $\omega = 53°\ 8'$.

d) $5x + 12y = 0$. *Sol.* $\dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{13}y = 0$, $p = 0$, $\omega = 67°\ 23'$.

e) $x + y - \sqrt{2} = 0$. *Sol.* $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - 1 = 0$, $p = 1$, $\omega = \pi/4$.

17. Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo formado por las rectas $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$.
Sol. $9x - 13y - 90 = 0$, $2x + 11y - 20 = 0$, $7x + y - 70 = 0$. Punto (10, 0).

18. Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados son las rectas $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$ y $6x - 7y - 16 = 0$.
Sol. $x + 13y + 5 = 0$, $5x - 3y - 3 = 0$, $4x + y - 1 = 0$. Punto (6/17, —7/17).

19. Hallar las ecuaciones y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo cuyos lados son las rectas $y = 0$, $3x - 4y = 0$ y $4x + 3y - 50 = 0$.
Sol. $x - 3y = 0$, $2x + 4y - 25 = 0$, $7x - y - 50 = 0$. Punto (15/2, 5/2).

20. Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de vértices (—1, 3), (3, 6) y (31/5, 0). *Sol.* (17/7, 24/7).

21. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son las rectas $15x - 8y + 25 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$ y $5x + 12y - 30 = 0$.
Sol. (4/7, 1/4). Radio = 13/7.

22. Hallar el valor de K de forma que la distancia de la recta $y + 5 = K(x - 3)$ al origen sea 3.
Sol. $K = -8/15, \infty$.

23. Hallar el lugar geométrico de los puntos que distan de la recta $5x + 12y - 20 = 0$ tres veces más que de la recta $4x - 3y + 12 = 0$. *Sol.* $181x - 57y + 368 = 0$, $131x - 177y + 568 = 0$.

24. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de su distancia al (3, —2) sea igual a su distancia a la recta $5x - 12y - 13 = 0$.
Sol. $13x^2 + 13y^2 - 73x + 40y + 156 = 0$, $13x^2 + 13y^2 - 83x + 64y + 182 = 0$.

25. Hallar dos puntos de la recta $5x - 12y + 15 = 0$ cuya distancia a $3x + 4y - 12 = 0$ sea 3.
Sol. $\left(\dfrac{33}{7}, \dfrac{45}{14}\right)$, $\left(-\dfrac{12}{7}, \dfrac{15}{28}\right)$.

26. Hallar las ecuaciones de las paralelas a la recta $8x - 15y + 34 = 0$ que distan 3 unidades del punto (—2, 3). *Sol.* $8x - 15y + 112 = 0$, $8x - 15y + 10 = 0$.

27. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $3x - 4y - 2 = 0$ y del punto (—1, 2). ***Sol.*** $\mathbf{16x^2 + 24xy + 9y^2 + 62x - 116y + 121 = 0}$.

28. Hallar el área y la longitud de la altura trazada desde A al lado BC de los triángulos cuyos vértices son:

a) $A(-3, 3)$, $B(5, 5)$, $C(2, -4)$. *Sol.* Altura $= \dfrac{11\sqrt{10}}{5}$, área $= 33$ unidades de superficie.

b) $A(5, 6)$, $B(1, -4)$, $C(-4, 0)$. *Sol.* Altura $= \dfrac{66\sqrt{41}}{41}$, área $= 33$ unidades de superficie.

c) $A(-1, 4)$, $B(1, -4)$, $C(5, 4)$. *Sol.* Altura $= \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$, área $= 24$ unidades de superficie.

d) $A(0, 4)$, $B(5, 1)$, $C(1, -3)$. *Sol.* Altura $= 4\sqrt{2}$, área $= 16$ unidades de superficie.

29. Hallar el valor de K en las ecuaciones de las rectas siguientes de forma que se verifique la condición que se indica.

a) $(2 + K)x - (3 - K)y + 4K + 14 = 0$, pase por el punto $(2, 3)$. *Sol.* $K = -1$.
b) $Kx + (3 - K)y + 7 = 0$, la pendiente de la recta sea 7. *Sol.* $K = 7/2$.
c) $5x - 12y + 3 + K = 0$, la distancia de esta recta al punto $(-3, 2)$ sea, en valor absoluto, igual a 4. *Sol.* $K = -16$, $K = 88$.

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 5y + 9 = 0$ y $4x + 7y - 28 = 0$ y cumple la condición siguiente:

a) Pasa por el punto $(-3, -5)$. *Sol.* $13x - 8y - 1 = 0$.
b) Pasa por el punto $(4, 2)$. *Sol.* $38x + 87y - 326 = 0$.
c) Es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$. *Sol.* $82x + 123y - 514 = 0$.
d) Es perpendicular a la recta $4x + 5y - 20 = 0$. *Sol.* $205x - 164y + 95 = 0$.
e) Iguales coordenadas en el origen. *Sol.* $41x + 41y - 197 = 0$, $120x - 77y = 0$.

31. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 1 = 0$ y $2x + 5y - 9 = 0$ y cuya distancia al origen es (*a*) 2, (*b*) $\sqrt{5}$.
Sol. (*a*) $x - 2 = 0$, $3x + 4y - 10 = 0$; (*b*) $2x + y - 5 = 0$.