CAPITULO 4

La circunferencia

UNA CIRCUNFERENCIA, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables. Ahora bien, no toda ecuación de este tipo representa siempre una circunferencia; solo en determinadas condiciones es cierto.

Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA de centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Si el centro es el origen de coordenadas, la ecuación toma la forma $x^2+y^2=r^2$.

Toda circunferencia se puede expresar por medio de una ecuación del tipo

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

Si escribimos esta ecuación en la forma

$$x^2+Dx+y^2+Ey+F=0$$

y sumamos y restamos los términos que se indican para completar cuadrados, se tiene,

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

o bien
$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

El centro es el punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y el radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

Si $D^2+E^2-4F>0$, la circunferencia es real.
Si $D^2+E^2-4F<0$, la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2+E^2-4F=0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. **Hallar** la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y radio 4.

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$, o bien, $x^2+y^2+4x-6y=3$.

2. **Hallar las** coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2+y^2-3x+5y-14=0$ **a)** sumando y restando los términos adecuados para completar cuadrados, *b*) aplicando la fórmula general.

a) $x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}=14+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$, o sea, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{90}{4}$.

Luego el centro es el punto $\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ y el radio $r=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

b) $h=-\frac{D}{2}=\frac{3}{2}$, $k=-\frac{E}{2}=-\frac{5}{2}$, y $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{9+25+56}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

3. Hallar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

Como $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$, resulta $7 = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 - 4k}$. Elevando al cuadrado y resolviendo, $k = -8$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(5, -2)$ y que pase por el punto $(-1, 5)$.

El radio de la circunferencia es $r = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$.

Luego $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 85$, o bien, $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 56$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos $(5, -1)$ y $(-3, 7)$.

Las coordenadas del centro son $h = \dfrac{5-3}{2} = 1$, $k = \dfrac{-1+7}{2} = 3$.

El radio es $r = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

Luego $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$, o bien, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 22$.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto $(0, 0)$, tenga de radio $r = 13$ y la abscisa de su centro sea -12.

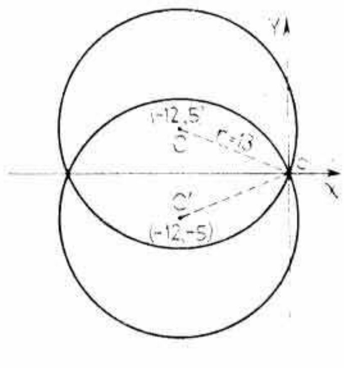
Como la circunferencia pasa por el origen,

$$h^2 + k^2 = r^2, \text{ o } 144 + k^2 = 169$$

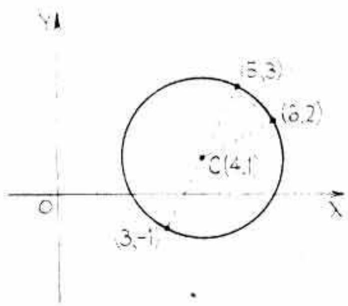
Resolviendo; $k^2 = 169 - 144 = 25$, $k = \pm 5$.

Luego, $(x+12)^2 + (y-5)^2 = 169$
y $(x+12)^2 + (y+5)^2 = 169$.

Desarrollando, $x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0$
y $x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$.



7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(5, 3)$, $(6, 2)$ y $(3, -1)$.



Cada una de las expresiones

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

o bien, $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

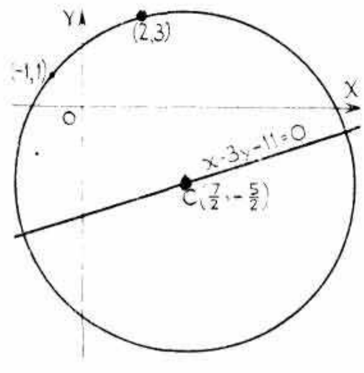
contiene tres constantes indeterminadas con lo que serán necesarias tres condiciones para determinarlas. Como la circunferencia debe pasar por los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas de los puntos en lugar de x e y resolviendo, a continuación, las tres ecuaciones lineales en D, E y F. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} 25 + 9 + 5D + 3E + F &= 0, \\ 36 + 4 + 6D + 2E + F &= 0, \\ 9 + 1 + 3D - E + F &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene, $D = -8$, $E = -2$ y $F = 12$.

Sustituyendo estos valores de D, E y F, resulta la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 1)$ y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.



Sean (h, k) las coordenadas del centro de la circunferencia. Como (h, k) debe equidistar de los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 1)$,

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h+1)^2 + (k-1)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, $6h + 4k = 11$.

Como el centro debe estar sobre la recta $x - 3y - 11 = 0$ se tiene, $h - 3k = 11$.

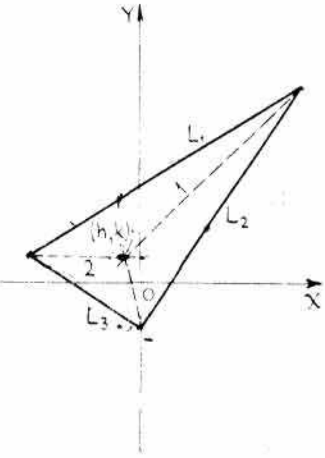
Despejando los valores de h y k de estas ecuaciones se deduce, $h = \frac{7}{2}$, $k = -\frac{5}{2}$.

Por tanto, $r = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{130}$.

La ecuación pedida es $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son las rectas

$$L_1:\ 2x - 3y + 21 = 0,$$
$$L_2:\ 3x - 2y - 6 = 0,$$
$$L_3:\ 2x + 3y + 9 = 0.$$



Como el centro de la circunferencia es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo será necesario hallar, previamente, las ecuaciones de dichas bisectrices. Sean (h, k) las coordenadas del centro. Para determinar la bisectriz (1) (ver Figura):

$$\frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}} = \frac{3h - 2k - 6}{\sqrt{13}}, \text{ o bien, } h - k + 3 = 0.$$

Para la bisectriz (2):

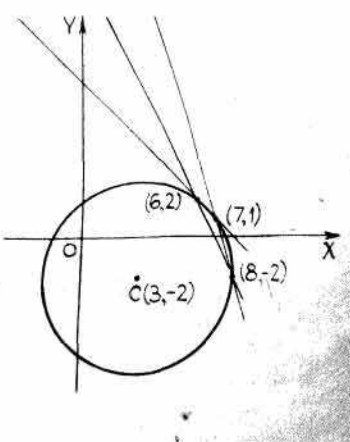
$$\frac{2h + 3k + 9}{-\sqrt{13}} = \frac{2h - 3k + 21}{-\sqrt{13}}, \text{ o bien, } 6k - 12 = 0.$$

Luego, $k = 2$, $h = -1$, y $r = \dfrac{2(-1) + 3(2) + 9}{\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$.

Sustituyendo en $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$, o sea, $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados son las rectas

$$x + y = 8,$$
$$2x + y = 14,$$
$$3x + y = 22.$$



Resolviendo estas ecuaciones tomadas dos a dos, se obtienen las coordenadas de los vértices $(6, 2)$, $(7, 1)$ y $(8, -2)$.

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación general de la circunferencia, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, resulta el sistema siguiente:

$$6D + 2E + F = -40,$$
$$7D + E + F = -50,$$
$$8D - 2E + F = -68.$$

cuya solución proporciona los valores $D = -6$, $E = 4$ y $F = -12$.

Por sustitución se deduce la ecuación pedida, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

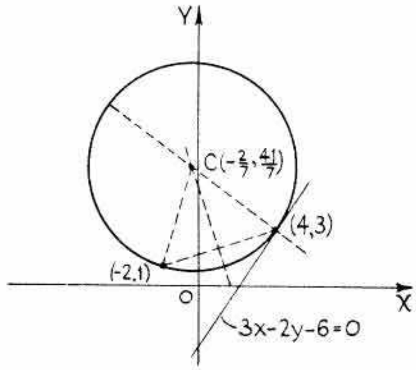
11. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(-4, 2)$ y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.

El radio se puede determinar calculando la distancia del punto $(-4, 2)$ a la recta.

$$r = \left|\frac{3(-4) + 4(2) - 16}{5}\right| = \left|-\frac{20}{5}\right| = \left|-4\right| \text{ o sea } 4.$$

La ecuación pedida es $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$, o $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto $(-2, 1)$ y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$.



Como la circunferencia debe pasar por los dos puntos $(-2, 1)$ y $(4, 3)$, su centro estará situado sobre la mediatriz del segmento que determinan. Por otra parte, también debe pertenecer a la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$.

La ecuación de la mediatriz del segmento es $3x + y - 5 = 0$.

La ecuación de la perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$ es $2x + 3y - 17 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$

se obtiene, $x = -\dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{41}{7}$. Por tanto, $r = \sqrt{\left(4 + \dfrac{2}{7}\right)^2 + \left(3 - \dfrac{41}{7}\right)^2} = \dfrac{10}{7}\sqrt{13}$.

La ecuación pedida es $\left(x + \dfrac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \dfrac{41}{7}\right)^2 = \dfrac{1.300}{49}$, o bien, $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$.

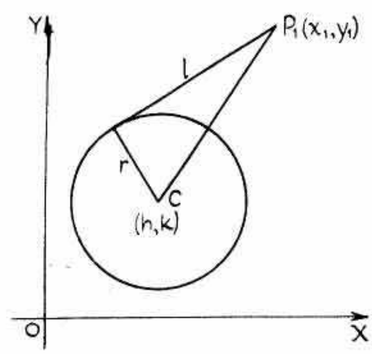
13. Hallar el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuyas hipotenusas son el segmento que determinan los puntos $(0, b)$ y (a, b).

Sea (x, y) el vértice del ángulo recto. Entonces, como los dos catetos son perpendiculares, la pendiente de uno de ellos debe ser el recíproco con signo contrario de la pendiente del otro, es decir,

$$\frac{y - b}{x - 0} = -\frac{1}{\dfrac{y - b}{x - a}} = -\frac{x - a}{y - b}.$$

Simplificando, $(y - b)^2 = -x(x - a)$, o sea, $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$ (una circunferencia).

14. Hallar la longitud de la tangente desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.



$$l^2 = (P_1C)^2 - r^2,$$

o bien $\quad l^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2,$

de donde $\quad l = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$

En consecuencia, la longitud de la tangente trazada desde un punto cualquiera exterior a una circunferencia es igual a la raíz cuadrada del valor que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la misma.

15. *Definición.* Se llama *eje radical* de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos desde los cuales las tangentes a ellas son de igual longitud.

Deducir la ecuación del eje radical de las circunferencias,

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0.$$

Sea $P'(x', y')$ un punto genérico cualquiera del eje radical pedido.

Tendremos $l_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1}$ y $l_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Como $l_1 = l_2$, $\sqrt{x'^2 + y'^2 + d_1x' + e_1y' + f_1} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + d_2x' + e_2y' + f_2}$.

Elevando al cuadrado, simplificando y suprimiendo las primas, $(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$, que es la ecuación de una recta.

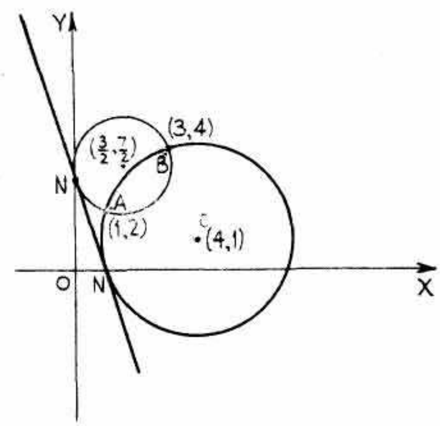
16. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por los puntos de intersección de dos dadas.

Sean $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ y $x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$, dos circunferencias secantes.

La ecuación $x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 + K(x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0$ representa a dicha familia, ya que las coordenadas de los puntos de intersección satisfacen a las ecuaciones de dichas circunferencias.

Para todos los valores de K, excepto para $K = -1$, se obtiene una circunferencia. Para $K = -1$, la ecuación se reduce a una recta, que es la cuerda común de dichas circunferencias.

17. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasen por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y sean tangentes a la recta $3x + y - 3 = 0$.



Para hallar las coordenadas del centro, $C(h, k)$, se tienen en cuenta las igualdades $CA = CB$ y $CA = CN$, es decir,

$$(h-1)^2 + (k-2)^2 = (h-3)^2 + (k-4)^2$$

y

$$(h-1)^2 + (k-2)^2 = \left(\frac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}\right)^2$$

Desarrollando y simplificando se obtiene,

$$h + k = 5$$

y

$$h^2 + 9k^2 - 6hk - 2h - 34k + 41 = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resultan $h = 4$, $k = 1$ y $h = 3/2$, $k = 7/2$.

De $r = \dfrac{3h + k - 3}{\sqrt{10}}$ se deduce $r = \dfrac{12 + 1 - 3}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y $r = \dfrac{9/2 + 7/2 - 3}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Teniendo en cuenta $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, tendremos

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad \text{y} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}.$$

Desarrollando estas ecuaciones, resulta $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto $(4, 1)$.

Sean (h, k) las coordenadas del centro.

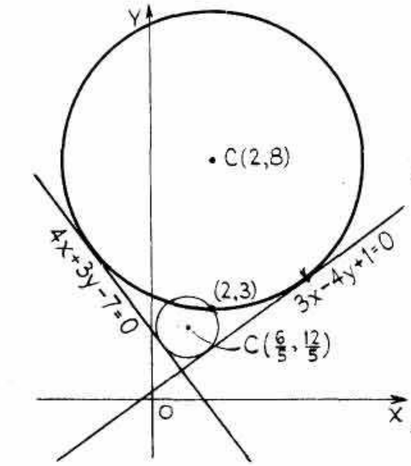
Entonces $\dfrac{3h + 4k - 16}{5} = \pm 5$, o bien, $3h + 4k - 16 = \pm 25$.

Por otra parte, $(h - 4)^2 + (k - 1)^2 = 25$, es decir, $h^2 + k^2 - 8h - 2k = 8$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las dos soluciones (7, 5) y (1, —3).

Las ecuaciones de las dos circunferencias respectivas son $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$, y $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

19. Hallar las ecuaciones de las dos circunferencias tangentes a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 7 = 0$ y que pasan por el punto (2, 3).



Sea (h, k) las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{3h - 4k + 1}{-5} = \frac{4h + 3k - 7}{5} \quad \text{o} \quad 7h - k - 6 = 0. \quad (a)$$

Por otra parte, como $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5}$,

$$(h - 2)^2 + (k - 3)^2 = \left(\frac{3h - 4k + 1}{-5}\right)^2$$

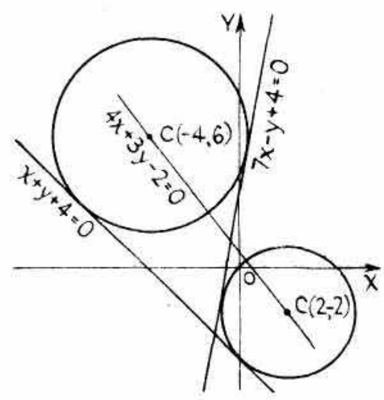
o bien, $16h^2 + 9k^2 - 106h - 142k + 24hk + 324 = 0. \quad (b)$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtienen, para las coordenadas de los dos centros, los puntos (2, 8) y (6/5, 12/5).

Para la circunferencia de centro (2, 8), $r = \dfrac{3h - 4k + 1}{-5} = \dfrac{6 - 32 + 1}{-5} = 5$ y la ecuación de la misma es $(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

Para la de centro $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$, $r = 1$, y la ecuación de la circunferencia es $\left(x - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{12}{5}\right)^2 = 1$.

20. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y que tenga su centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$.



Sean (h, k) las coordenadas del centro. Entonces,

$$\frac{h + k + 4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7h - k + 4}{5\sqrt{2}}$$

o bien, $h - 3k - 8 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$,

que son las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas. Como el centro ha de pertenecer a la recta $4x + 3y - 2 = 0$ se verificará, $4h + 3k - 2 = 0$. De esta ecuación, y de $h - 3k - 8 = 0$, se obtienen $h = 2$ y $k = -2$.

Por tanto, $r = \dfrac{2 - 2 + 4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, con lo que la ecuación de la circunferencia es $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones $4h + 3k - 2 = 0$ y $3h + k + 6 = 0$ resulta, $h = -4$, $k = 6$ y $r = 3\sqrt{2}$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$.

21. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x', y') cuya suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $5x + 12y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 10 = 0$ sea igual a 5.

La distancia del punto (x', y') a la recta $5x + 12y - 4 = 0$ es $\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}$, y a la recta $12x - 5y + 10 = 0$ es $\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}$. Luego, $\left(\dfrac{5x' + 12y' - 4}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12x' - 5y' + 10}{-13}\right)^2 = 5$.

Simplificando y suprimiendo las primas, se obtiene $169x^2 + 169y^2 + 200x - 196y = 729$, una circunferencia.

22. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(-1, -2)$ sea igual a 34.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 34$. Simplificando, se obtiene, $x^2 + y^2 - x - y = 8$, una circunferencia.

23. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya relación de distancias a los puntos fijos $(-1, 3)$ y $(3, -2)$ sea igual a a/b.

$\dfrac{\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}}{\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2}} = \dfrac{a}{b}$. Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene, $(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 - a^2)y^2 + 2(b^2 + 3a^2)x - 2(3b^2 + 2a^2)y = 13a^2 - 10b^2$, una circunferencia.

24. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-5, 2)$ sea igual a su distancia a la recta $5x + 12y - 26 = 0$.

$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = \pm\left(\dfrac{5x + 12y - 26}{13}\right)^2$. Desarrollando y simplificando,

$13x^2 + 13y^2 + 125x - 64y + 403 = 0$ y $13x^2 + 13y^2 + 135x - 40y + 351 = 0$, circunferencias.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

El centro de la circunferencia dada es $(2, -3)$. El radio de la circunferencia pedida es la distancia del punto $(2, -3)$ a la recta $3x - 4y + 7 = 0$, es decir, $r = \dfrac{6 + 12 + 7}{5} = 5$.

Luego la circunferencia pedida tiene de ecuación $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

26. Hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio 15 que sean tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ en el punto $(6, -8)$.

El centro de estas circunferencias debe estar sobre la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(6, -8)$, cuya ecuación es $y = -\dfrac{4}{3}x$.

Llamando (h, k) a las coordenadas del centro, $k = -\dfrac{4}{3}h$ y $(h - 6)^2 + (k + 8)^2 = 225$.

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones se obtienen los valores de h y k $(-3, 4)$ y $(15, -20)$.

Las ecuaciones de las dos circunferencias son $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 225$ y
$(x - 15)^2 + (y + 20)^2 = 225$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia

a) de centro el punto (3, —1) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

b) de centro el punto (0, 5) y radio 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

c) de centro el punto (—4, 2) y diámetro 8. *Sol.* $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$.

d) de centro el punto (4, —1) y que pase por (—1, 3).
Sol. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$.

e) de diámetro el segmento que une los puntos (—3, 5) y (7, —3).
Sol. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$.

f) de centro el punto (—4, 3) y que sea tangente al eje *y*.
Sol. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$.

g) de centro el punto (3, —4) y que pase por el origen.
Sol. $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

h) de centro el origen y que pase por el punto (6, 0).
Sol. $x^2 + y^2 - 36 = 0$.

i) que sea tangente a los dos ejes de coordenadas de radio $r = 8$ y cuyo centro esté en el primer cuadrante. *Sol.* $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$.

j) que pase por el origen, de radio $r = 10$ y cuya abscisa de su centro sea —6.
Sol. $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$, $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$.

2. Hallar el centro y el radio de las circunferencias siguientes. Determinar si cada una de ellas es real, imaginaria o se reduce a un punto. Aplicar la fórmula y comprobarla por suma y resta de los términos adecuados para completar cuadrados.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$. *Sol.* $(4, -5)$, $r = \sqrt{53}$, real.

b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$. *Sol.* $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{-13}$, imaginaria.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$. *Sol.* $\left(4, \frac{7}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{113}$, real.

d) $x^2 + y^2 = 0$. *Sol.* $(0, 0)$, $r = 0$, un punto.

e) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$. *Sol.* $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $r = \frac{1}{4}$, real.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos

a) (4, 5), (3, —2), y (1, —4). *Sol.* $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$.

b) (8, —2), (6, 2), y (3, —7). *Sol.* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

c) (1, 1), (1, 3), y (9, 2). *Sol.* $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$.

d) (—4, —3), (—1, —7), y (0, 0). *Sol.* $x^2 + y^2 + x + 7y = 0$.

e) (1, 2), (3, 1), y (—3, —1). *Sol.* $x^2 + y^2 - x + 3y - 10 = 0$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de lados

a) $x - y + 2 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, y $4x + y - 17 = 0$.
Sol. $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$.

b) $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, y $x - y + 1 = 0$.
Sol. $3x^2 + 3y^2 - 13x - 11y + 20 = 0$.

c) $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, y $x + y - 5 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 - 17x - 7y + 52 = 0$.

d) $2x + y - 8 = 0$, $x - y - 1 = 0$, y $x - 7y - 19 = 0$.
Sol. $3x^2 + 3y^2 - 8x + 8y - 31 = 0$.

e) $2x - y + 7 = 0$, $3x + 5y - 9 = 0$, y $x - 7y - 13 = 0$.
Sol. $169x^2 + 169y^2 - 8x + 498y - 3707 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de lados

a) $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, y $3x + 4y - 5 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0$.

b) $7x + 6y - 11 = 0$, $9x - 2y + 7 = 0$, y $6x - 7y - 16 = 0$.
Sol. $85x^2 + 85y^2 - 60x + 70y - 96 = 0$.

c) $y = 0$, $3x - 4y = 0$, y $4x + 3y - 50 = 0$.
Sol. $4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$.

d) $15x - 8y + 25 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, y $5x + 12y - 30 = 0$.
Sol. $784x^2 + 784y^2 - 896x - 392y - 2399 = 0$.

e) inscrita al triángulo de vértices $(-1, 3)$, $(3, 6)$ y $\left(\frac{31}{5}, 0\right)$.
Sol. $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ que sea tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el origen que sea tangente a la recta $8x - 15y - 12 = 0$. *Sol.* $289x^2 + 289y^2 = 144$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, -3)$ que sea tangente a la recta que une los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 1)$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esté en el eje x y que pase por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 5)$. *Sol.* $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, -4)$ y $(5, 2)$ y que tiene su centro en la recta $x - 2y + 9 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 47 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(4, 1)$ y sea tangente al eje x. *Sol.* $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(3, 6)$ y sea tangente a la recta $2x + y - 2 = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(11, 2)$ y sea tangente a la recta $2x + 3y - 18 = 0$ en el punto $(3, 4)$. *Sol.* $5x^2 + 5y^2 - 98x - 142y + 737 = 0$.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$ en el punto $(7, 2)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 2y + 4 = 0$ y $2x - y - 8 = 0$ y que pase por el punto $(4, -1)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 30x + 6y + 109 = 0$, $x^2 + y^2 - 70x + 46y + 309 = 0$.

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 3y + 9 = 0$ y $3x + y - 3 = 0$ y que tenga su centro en la recta $7x + 12y - 32 = 0$.
Sol. $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 31 = 0$, $961x^2 + 961y^2 + 248x - 5270y + 7201 = 0$.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia definida por el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos $(-4, 1)$ y $(3, 2)$.
Sol. $x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0.$

18. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $4x + 3y - 50 = 0$ y $3x - 4y - 25 = 0$ y cuyo radio sea igual a 5. *Sol.* $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0,$
$x^2 + y^2 - 36x - 2y + 300 = 0,$
$x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0,$
$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0.$

19. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $2x + 3y - 6 = 0$ y $3x - 2y + 8 = 0$ sea igual a 10. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.

Sol. $13x^2 + 13y^2 + 24x - 68y - 30 = 0.$ Centro $\left(-\frac{12}{13}, \frac{34}{13}\right)$, $r = \sqrt{10}.$

20. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a las rectas perpendiculares $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $b_1x - a_1y + c_2 = 0$ es una constante K^2, es una circunferencia.

21. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $(-2, -5)$ y $(3, 4)$ sea igual a 70. Si es una circunferencia, hallar su centro y su radio.
Sol. $x^2 + y^2 - x + y - 8 = 0.$ Centro $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{34}.$

22. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos $(2, -1)$ y $(-3, 4)$ sea igual a $2/3$. Si es una circunferencia, determinar su centro y su radio.
Sol. $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0.$ Centro $(6, -5)$, $r = 6\sqrt{2}.$

23. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos (a, b) y (c, d) es igual a K (constante) es una circunferencia.

24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyo cuadrado de la distancia al punto fijo $(-2, -5)$ sea el triple de la correspondiente a la recta $8x + 15y - 34 = 0.$
Sol. $17x^2 + 17y^2 + 44x + 125y + 595 = 0,$ $17x^2 + 17y^2 + 92x + 215y + 391 = 0.$

25. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 17 = 0$ que sea concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0.$
Sol. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0.$

26. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.
Sol. $x^2 + y^2 - 18x - 24y + 125 = 0,$ $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 75 = 0.$

27. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de un segmento de 30 centímetros de longitud cuyos extremos se apoyan constantemente en los ejes de coordenadas.
Sol. Una circunferencia, $x^2 + y^2 = 225.$

28. Hallar la máxima y mínima distancias del punto $(10, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$ *Sol.* 15 y 5.

29. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(7, 8)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9.$
Sol. $2\sqrt{26}.$

30. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $(6, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0.$ *Sol.* 9.

31. Hallar el valor de K para el cual la longitud de la tangente trazada desde el punto $(5, 4)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2Ky = 0$ sea igual a *a*), 1, *b*), 0. *Sol.* *a*) $K = -5,$ *b*) $K = -5{,}125.$

32. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes, y demostrar que se cortan en un punto.

$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$, y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Sol. $5x - y + 2 = 0$, $3x - 2y - 3 = 0$, $2x + y + 5 = 0$. Punto de intersección $(-1, -3)$. Este punto se denomina centro radical de las circunferencias.

33. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales de las circunferencias siguientes y hallar el centro radical (punto de intersección de los ejes).

$x^2 + y^2 + x = 0$, $x^2 + y^2 + 4y + 7 = 0$, y $2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y + 9 = 0$.

Sol. $x - 4y - 7 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Centro $(-1, -2)$.

34. Hallar las ecuaciones de los tres ejes radicales y el centro radical de las circunferencias siguientes.

$x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$, y $x^2 + y^2 - 4x + 16y + 43 = 0$.

Sol. $x + 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y + 4 = 0$. Centro $(-2, -4)$.

35. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-2, 2)$ y por los de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0.$$

Sol. $5x^2 + 5y^2 - 7y - 26 = 0$.

36. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3, 1)$ y por los de intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0.$$

Sol. $3x^2 + 3y^2 - 13x + 3y + 6 = 0$.

37. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ y cuyo centro esté en la recta $y = x$.

Sol. $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$.