Examen final

4 dic, 2013

Notas:

1. Hay que entregar el examen a más tardar el **lunes 9 diciembre**.

2. Intenta hacer el examen solo, sin ayuda de ningun texto o notas o persona. En caso que no logras, por favor anota en cada problema la ayuda que usaste. Esto no te va afectar la calificación, pero sí me interesa.

3. Todas las representaciones son complejas, de dimensión finita (a menos que se indica otra cosa).

1. Cierto o Falso.

   (En caso de "Cierto"hay que demostrar el inciso; en caso de "Falso" hay que dar un contraejemplo.)

   a) Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito. Entonces cada $T \in G$ es diagonalizable.

   b) Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito abeliano. Entonces existe en V una base que diagonaliza simultaneamente a todos los operadores $T \in G$.

   c) Toda representación V del grupo simétrico S_{10} es autodual, $V \cong V^*$.

   d) Para todo grupo finito, la representación regular izquierda es isomorfa a la representación regular derecha.

   e) Para toda representación V de un grupo finito G, existe en V una forma bilineal compleja no degenerada G-invariante.

   f) Un grupo finito es abeliano si y solo si todas sus representaciones irreducibles son de dimensión 1.

   g) Todo grupo finito G de orden n es isomorfo a un subgrupo de O_n (las matrices ortogonales $n \times n$).

   h) S_n es isomorfo a un subgrupo de SO_n (matrices ortogonales $n \times n$ con det=1).

2. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito. Sea $A \subset \mathrm{End}(V)$ el subespacio vectorial generado por G.
   a) Demuestra que A es un subalgebra de $\mathrm{End}(V)$.
   b) Demuestra que $A = \mathrm{End}(V)$ si y solo si V es irreducible bajo G.
   c) En caso que V no es irreducible bajo G, ¿qué puedes decir acerca de A?

3. Sea V una representación compleja de un grupo finito G.
   a) Demuestra que existe en V un producto hermitiano G-invariante.

b) Demuestra que en caso que V es irreducible, el producto hermitiano del inciso anterior es único, salvo multiplicación por un escalar positivo.
c) En caso que V no es irreducible, ¿qué puedes decir acerca del espacio de los productos hermitianos G-invariantes en V?

4. Descompón $\mathbb{C}^6$ en subespacios invariantes irreducibles bajo permutaciones cíclicas de las coordenadas, $(x_1, \ldots, x_6) \mapsto (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
5. Construye la tabla de caracteres de los grupos A_4, S_4. Verifica que tus tablas satisfacen las relaciones de ortogonalidad de Schur.

   Nota: $A_4 \subset S_4$ es el subgrupo de las permutaciones pares.

   Usa las tablas para
   a) Determinar los duales de las representaciones irreducibles de estos grupos.
   b) Determinar la "tabla de multimplicación"de su anillo de representación (es decir: la descomposición de los productos tensoriales de representaciones irreducibles en irreducibles).
   c) Determinar los mapas de restriccion e inducción entre sus anillos de representación (es decir: la descomposición en representaciones irreducibles de A_4 de representaciones irreducibles de S_4 restringidas a A_4, y la descomposición en irreducibles de S_4 de representaciones irreducibles de A_4 inducidas a S_4). Verfica que estos mapas satisfacen Receprocidad de Frobenius.
6. *a*) Descompón el espacio de las funciones complejas en las aristas de un tetraedro regular en subespacios irreducibles bajo (a) el grupo de isometrias del tetraedron (b) el grupo de rotaciones del tetraedro.

   Nota: el primer grupo tiene 24 elementos y es isomorfo a S_4. El segundo son las isometrias con det=1, y es un subgrupo del primero con indice 2, isomorfo a A_4.

   b) Usa el inciso anterior para resolver el siguiente problema: se marca cada una de las 6 aristas de un tetraedro regular con un número real. Luego, se sustituye cada uno de los números por el promedio de sus 4 vecinos. Al iterar este proceso 100 veces, ¿qué números esperarías encontrar en las artistas del tetraedro?