Notas núm. 1

Los ejercicios estan marcados con flecha $\to$.

Definición. Una representación (lineal) de un grupo G en un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de las transformaciones lineales invertibles $V \to V$. La representación es de dimensión finita (compleja, real, etc.) si V es un espacio vectorial de dimensión finita (compleja, real, etc.).

Las representaciones que vemos en este curso son típicamente complejas y de dimensión finita.

$\to$**1.1.** Toda tranformación lineal invertible $A \in \mathrm{GL}(V)$ define una representación del grupo $G = \mathbb{Z}$ mediante la fórmula $\rho(n) = A^n$.

$\to$**1.2.** Una transformación lineal invertible $A \in \mathrm{GL}(V)$ define un representación de $\mathbb{Z}_n$ mediante la fórmula $\rho([1]) = A$ si y solo si $A^n = I$.

Definición. Dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (sobre el mismo campo) de un grupo G son *equivalentes* (o *isomorfas*), $\rho_1 \sim \rho_2$, si existe un isomorfismo lineal $T : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$ para todo $g \in G$. (Decimos que tal T es G-equivariante).

$\to$**1.3.** En el ejemplo del ejercicio anterior, $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}(V)$ definen representaciones equivalentes de $\mathbb{Z}$ si y solo si A_1, A_2 son elementos conjugados del grupo $\mathrm{GL}(V)$.

$\to$**1.4.** Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones de dimensión finita, sobre el mismo campo, del mismo grupo G. Demuestra que las representaciones son equivalentes si y solo si existen bases B_1, B_2 en V_1, V_2 (resp.) tal que ρ_1, ρ_2 están representadas por las mismas matrices (para todo $g \in G$, $[\rho_1(g)]_{B_1} = [\rho_2(g)]_{B_2}$).

$\to$**1.5.** Sea $G = \mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\omega = e^{2\pi i/n}$ y $\rho_l : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, dada por $\rho_l([k]) = \omega^{kl}$, $0 \leq k, l \leq n-1$. Demuestra que $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ son n representaciones complejas de $\mathbb{Z}_n$ de dimensión 1, no equivalentes entre sí.

$\to$**1.6.** Toda representación lineal compleja de dimensión 1 de $\mathbb{Z}_n$ es equivalente a una de las ρ_l, $0 \leq l < n$.

Muchos de los conceptos básicos de álgebra lineal tienen su análogo en la teoría de representaciones lineales de grupos. Van algunos ejemplos.

Definición. Una *subrepresentación* de una representación (ρ, V) de un grupo G es un subespacio vectorial G-invariante $V_1 \subset V$ ($\rho(g)v \in V_1$ para todo $g \in G$ y $v \in V_1$). Dado tal subespacio invariante, se define en V_1 un representación (ρ_1, V_1) de G por $\rho_1(g)v = \rho(g)v$ para todo $g \in G$, $v \in V_1$.

Definición. Dada una representación (ρ, V) de un grupo G, la representación *dual* (ρ^*, V^*) está dada por $\rho^*(g) := [\rho(g^{-1})]^*$.

$\to$**1.7.** Verifica que la representación dual es una representación, i.e. que $\rho^*(g) \in \mathrm{GL}(V^*)$ para todo $g \in G$ y que $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ es un homomorfismo (esto explica la inversa g^{-1} introducida en la definición de ρ^*).

$\to$**1.8.** Para las representaciones ρ_l de $\mathbb{Z}_n$, $0 \leq l < n$, demuestra que $(\rho_l)^* \sim \rho_{n-l}$.

Definición. La suma directa de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$, dada por $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.

→**1.9.** Dada una $A \in \mathrm{GL}(V)$, A es diagonalizable si y solo si la reprepresntación inducida de $\mathbb{Z}$ en V es la suma directa de subrepresentaciones de dimensión 1.

→**1.10.** Toda representación lineal compleja de dimensión finita de $G = \mathbb{Z}_n$ es equivalente a suma directa de representaciones de dimensión 1. (Sugerencia: ver más adelante el concepto de representación unitaria).

→**1.11.** Definimos una representación de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{C}^3$ por $\rho([1])(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$. Demuestra que esta fórmula define una representación de $\mathbb{Z}_3$ y encuentra una decomposición de esta representación en la suma directa de 3 subreprsentaciones de dimensión 1.

Definición. Una representación (ρ, V) de un grupo G es *irreducible* si los únicos subespacios G-invariantes de V son todo V y el subespacio nulo.

Ejemplo. Toda representación de dimensión uno es irreducible.

→**1.12.** La representación "obvia"de $G = \mathrm{GL}(V)$ en V, $\rho(g) = g$, es irreducible.

→**1.13.** La representación "obvia"de U_n (matricies unitarias) en $\mathbb{C}^n$ es irreducible.

Lema de Schur. Si (ρ, V) es una representación compleja irreducible y $T : V \to V$ es una transformación lineal G-equivariante, i.e. $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$ para todo $g \in G$, entonces T es un múltiplo de la identitad, $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

▷ Sea λ un valor propio de T. Entonces $W := Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ y es G-invariante, así que $W = V$. □

Corolario. Toda representación compleja irreducible de un grupo abeliano es de dimensión 1.

▷ Para todo $g \in G$, $\rho(g)$ es G-equivariante, así que, por Schur, un múltiplo de la identidad. Así que todo subespacio de V es G-invariante, por lo que V debe ser 1 dimensional. □

Definición. El producto tensorial de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$, dada por $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

→**1.14.** Para las representaciones ρ_l de $\mathbb{Z}_n$, $\rho_l \sim \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_1$ (l veces).

→**1.15.** Sean $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ dos representaciones de un grupo G. Se define $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ como el espacio de todas transformaciones lineales $V_1 \to V_2$ con $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ dado por $\rho(g)T = \rho_2(g)T\rho_1(g^{-1})$. Demuestra que $(\rho, \mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ es una representación y que es equivalente a $(\rho_1^* \otimes \rho_2, V_1^* \otimes V_2)$.

→**1.16.** Sean $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ dos representaciones irreducibles complejas y $T : V_1 \to V_2$ una transformación lineal G-equivariante. Si V_1 y V_2 son equivalentes, o sea existe un isomorfismo G-equivariante $T_0 : V_1 \to V_2$, entonces $T = \lambda T_0$, para algun $\lambda \in \mathbb{C}$. Si V_1, V_2 no son equivalentes entonces $T = 0$.

→**1.17.** Cierto o Falso: el producto tensorial de dos representaciones irreducibles es irreducible.

→**1.18.** Encontrar un ejemplo de una representación que no es irreducible pero que no es la suma directa de irreducibles.

→**1.19.** La representación dual a una representación irreducible es irreducible.

→**1.20.** Sea V una representación compleja de un grupo. Demuestra que la representación $V \oplus \cdots \oplus V$ (k veces) es isomorfa a la representación $V \otimes \mathbb{C}^k$, donde $\mathbb{C}^k$ es la repersentación trivial.

→**1.21.** Para una representación V de un grupo G se denota por $\mathrm{End}_G(V)$ el espacio de los endomorfismos G-equivariantes de V. Así que el lema de Schur afirma que para V irreducible, $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}I_V$ (múltiplos complejos del endomorfismo identidad de V). Demuestra la siguiente generalización del lema de Schur: si V es la suma directa de representaciones irreducibles $V_1, \ldots, V_k$, donde V_i aparece con multiplicidad m_i, o sea $V = \bigoplus_i m_i V_i = \bigoplus_i [V_i \otimes \mathbb{C}^{m_i}]$; y donde los V_i's son irreducibles distintos (i.e. no equivalentes entre sí), entonces $\mathrm{End}_G(V) = \bigoplus_i [I_{V_i} \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m_i})]$.

→**1.22.** Se define una representación de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{C}^n$ en donde $[1]$ actua por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n, x_1)$. Demuestra que esta fórmula define una respresentación que se descompone como suma directa de subrepresentaciones $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$, donde cada V_i es equivalente a ρ_i. Encuentra explicitamente los V_i.

→**1.23.** Una aplicación bonita del ejercicio anterior. Se toma un polígono con n vértices y se asigna un número real a cada vértice. Luego se define una nueva asignación de números a los vértices del polígono al sustituir cada número por el promedio de sus dos vecinos. Estudia el comportamiento de este proceso al iterarlo muchas veces.

(Sugerencia: cada asignación determina un vector $v \in \mathbb{C}^n$. Tomar el promedio de los vecinos define una transformación $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, $\mathbb{Z}_n$-equivariante con respecto a la representación definida en el ejercicio anterior. Por Schur, T actua en cada uno de los V_i por un escalar λ_i. Determina los λ_i y observa que si $|\lambda_i| < 1$ entonces $\lim_{k\to\infty} \lambda^k = 0$. Nota tambien que los casos de n par e impar son distintos.)

Definición. Una representación compleja (ρ, V) de un grupo G es *unitaria* si existe en V un producto hermitiano G-invariante. O sea, existe una función $h : V \times V \to \mathbb{C}$, lineal en la primera entrada, anti-lineal en la segunda, simétrica conjugada, positiva definida, y tal que $h(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2) = h(v_1, v_2)$ para todo $g \in G, v_1, v_2 \in V$.

Proposición. Toda representación unitaria de dimensión finita es completamente reducible, i.e. es la suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

▷ Por inducción sobre la dimensión de la representación. Si $W \subset V$ es un subespacio invariante, entonces su complemento ortogonal tambien lo es. □

Teorema. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito es unitaria.

▷ Sea h_0 cualquer producto hermitiano en V. Verifique que $h(v_1, v_2) := \sum_{g\in G} h_0(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2)$ es un producto hermitiano G-invariante. □

Corolario. Toda representación de dimensión finita de un grupo finito es completamente reducible.

Corolario. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito abeliano es la suma directa de representaciones unidimensionales (ver ej. 1.10).

(Actualizado 22 ago, 2013).