ALGEBRA LINEAL - II

1^a **Lista de ejercicios**

1. Sea A la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Calcule el polinomio característico de A y los autovalores de A y los vectores propios de A.

2. Sea A una matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Calcule el polinomio caracteristico de A y los autovalores de A.

3. Calcule los valores propios y encuentre bases de los espacios propios de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Calcule los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

¿Cuándo los autovalores y/o los vectores propios son reales?

5. Muestre que la matriz de una rotación R en $\mathbb{R}^2$ no tiene valores propios reales, salvo cuando $R = \pm I$.

6. Encuentre la dimensión de los espacios propios de los cuatro autovalores de la matriz de unos y la matriz de tablero de ajedrez:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   ¿Cuáles son el rango r y los valores propios de A y T cuando las matrices son $n \times n$? Recuerde que el valor propio $\lambda = 0$ aparece repetido $n - r$ veces.

7. Escoja una tercera fila para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

   de modo que su polinomio característico sea $|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

8. Si la matriz A tiene valores propios 0, 1, 2 con vectores propios v_0, v_1, v_2. Describa el núcleo y la imágen de A. Resuelva la ecuación $Ax = v_1 + v_2$. Muestre que $Ax = v_0$ no tiene solución.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^n \times n$ una matriz $n \times n$. Suponga que el polinomio característico de de A tiene n raices diferentes. Muestre que $\mathbb{R}^n$ tiene una base formada por vectores propios de A.

10. Sea A una matriz cuadrada. Muestre que los valorws propios de su transpuesta A^T son los mismos que los de A, comparado sus polinomios característicos.

11. Sea A una matriz invertible. Si λ es un autovalor de A, muestre que $\lambda \neq 0$ y que λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}. Encuentre los vetores propios de A^{-1}.

12. Sea V el espacio generado sobre $\mathbb{R}$ por las dos funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$. ¿La derivada, vista como transformación lineal de V, tiene algún vector propio no nulo? Si los tiene, ¿cuáles son?

13. Denote por D la derivada vista como transformación lineal del espacio de funciones diferenciables. Sea k un entero $\neq 0$. Muestre que las funciones $\operatorname{sen} kx$ y $\cos kx$ son vectores propios de D^2. Calcule sus valores propios.

14. Sea $A : V \to V$ una transformación lineal de V en símismo. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V formada por vectores propios distintos. Muestre que cualquier vector propio de A es un múltiplo escalar de algún v_i. Muestre que esto ya no es verdad cuando hay un autovalor repetido.

15. Sean A, B dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Muestre que los valores propios de AB son los mismos que los valores propios de BA.