ALGEBRA LINEAL II
2DA. LISTA DE EJERCICIOS

1. Encuentre la matriz de una bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$ que sea negativa definida en el subespacio

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\},$$

pero que tenga índice 2.

2. Encuentre los ejes de la elipse $x^2 - 2xy + 6y^2 = 4$.
3. Dibuje las cónicas $x^2 - 4xy - y^2 = 4$, $2x^2 - 3xy = 5$.
4. Dibuje el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 - 4xy - y^2$.
5. Dada la forma cuadrática

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_2x_3 + x_3^2,$$

encuentre un cambio de coordenadas lineal $\overline{y} = A\,\overline{x}$ tal que $q(\cdot)$ quede de la forma

$$q(y_1,y_2,y_3) = c_1\,y_1^2 + c_2\,y_2^2 + c_3\,y_3^2.$$

Dibuje el nivel $\{\,\overline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid q(\overline{x}) = 3\,\}$.

6. Considere una bilineal Φ en $\mathbb{R}^n$, no necesariamente simétrica, tal que $\Phi(x,x) > 0$ para todo vector $x \neq 0$. Construya una base de $\mathbb{R}^n$ en la que la matriz de Φ tenga la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & k_1 & & & & & & \\ -k_1 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & k_p & & & \\ & & & -k_p & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: Descomponga

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, con

$\Phi_1(x,y) = \frac{1}{2}\,\big[\,\Phi(x,y) + \Phi(y,x)\,\big]$

$\Phi_2(x,y) = \frac{1}{2}\,\big[\,\Phi(x,y) - \Phi(y,x)\,\big]$.

21 de Junio, 2000.

7. Dibuje el conjunto delos pares $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tales que
$$q(x,y,z) = 2\,x^2 + 2a\,xy + y^2 + 2b\,yz + z^2$$
sea definida positiva.
8. Determine la dimensión de los siguientes espacios vectoriales y encuentre una base para cada uno:
   (a) $\mathcal{T}^{(}\mathbb{R}^{)}$, k-tensores en $\mathbb{R}^n$.
   (b) Bilineales antisimétricas $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
   (c) Multilineales $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
   (d) $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, k-tensores alternantes en $\mathbb{R}^n$.
9. Demuestre la *Regla de Cramer*:
   Si $\{ v_1, \dots, v_n \}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\sum_{i=1}^n x_i\, v_i = b$, entonces
$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, b, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)}\,.$$
   Sugerencia: Escriba $b = \sum_j y_j\, v_j$.
10. Si A es una matriz definida positiva, entonces A^{-1} existe y es definida positiva.
11. Sea $E = \{ f(x) = c_0 + c_1\, e^{ix} + c_2\, e^{2ix} + c_3\, e^{3ix} \mid c_i \in \mathbb{R} \}$. Encuentreuna base ortonormal de E.
12. (a) Resuelva $F_4 c = y$ donde $y = (2,0,2,0)$ y F_4 es la matriz de Fourier.
    (b) Resuelva $F_4 c = y$ para $y = (2,0,-2,0)$, conociendo F_4^{-1} y calculando $c = F_4^{-1}$. Verifique que $c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix}$ toma los valores $2, 0, -2, 0$ en los puntos $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
13. Calcule $y = F_8 c$ por los tres pasos de la Transformada Rápida de Fourier si $c = (1,0,1,0,1,0,1,0)$. Repita el cálculo para $c = (0,1,0,1,0,1,0,1)$.