EJERCICIOS DE EXÁMENES PASADOS

1. Prueba que el cero en el sistema
$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
no es estable asintóticamente, ni estable según Liapunov.

2. Considera la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 3xy + \frac{y}{1+y^2}.$$
Prueba:
(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única solución $y = f_n(x)$ definida para $0 \leq x \leq 1$ tal que $f_n(0) = 1/n$.
(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

3. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio del problema
$$\left.\begin{array}{l} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0, \ y'(1) = 0 \end{array}\right\} (*)$$
si éste tiene soluciones no-triviales.
(a) Prueba que cada valor propio de (*) es no-negativo. (Sug.: Si y es una solución no-trivial correspondiente, considera el producto escalar $\langle -y'', y\rangle$ en L^2.
(b) Encuentra todos los valores propios de (*).

4. Considere la ecuación diferencial
$$x'' + x' + x^3 = 0$$
y considere la función $f(x, x') = (x + x')^2 + (x')^2 + x^4$.
   - Demuestre que f decrece a lo largo de las trayectorias que son soluciones de la ecuación diferencial.
   - Demuestre que si $x(t)$ es cualquier solución, entonces $\big(x(t), x'(t)\big)$ tiende a $(0, 0)$ conforme $t \to \infty$.

5. Dada una función $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ proporcione hipótesis para resolver la ecuación diferencial $f'' + kf = g$ (con k constante) empleando transformadas de Fourier. Obtenga una expresión para la solución f y explique cómo integrar en el plano complejo para obtener explícitamente f. Resuelva por este método la ecuación

diferencial definida por $g(x) = e^{-cx^2}$ (y elija c de manera que $\hat{g} = g$).

Jueves 16 de diciembre de 1993.

6. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$x' = 2y + z\,, \qquad y' = y + 3z\,, \qquad z' = z + 4y$$

sujeto a la condición inicial $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Viernes 17 de diciembre de 1993

7. La ecuación diferencial de Bessel de orden cero es

$$u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0$$

- Esta ecuación diferencial tiene una solución en serie de potencias de la forma

$$u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k}$$

Obtener una fórmula explícita para los coeficientes.
- Demuestre que esta serie de potencias converge para toda x
- A partir de la ecuación diferencial, deduzca el comportamiento oscilatorio de la solución general en el intervalo $(0, \infty)$ (Sugerencia: considerar $v = u\sqrt{x}$).
- Si se plantea la ecuación diferencial sobre el campo de los números complejos, discuta cómo encontrar la solución general y cuál es la monodromía.

Miércoles 24 de enero de 1996.

8. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x + \dot{x} \\ x(0) &= 1,\ \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

9. Encuentra una ecuación diferencial de orden 2 que tenga como soluciones a $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + x^2$.

Jueves 25 de enero de 1996

10. Demuestra que la función

$$F(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}$$

decrece a lo largo de las soluciones $(x(t), y(t))$ de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -by - x^3 - x^5, b > 0.$$

Enero 1997

11. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Prueba que
    i.: los puntos críticos del sistema $\dot{x} = \nabla f(x)$ coinciden con los puntos críticos de f;
    ii.: el sistema no tiene órbitas periódicas.

12. Considera la ecuación $x'' = -\sin x$. Describe y justifica lo más detalladamente posible el plano fase.

13. Encuentra dos soluciones de la ecuación $y''' = y$ que satisfagan $y(0) = 2$.

14. Prueba que la solución del problema
15. Prueba que la solución del problema

$$\dot{x} = 1 + 5\cos x, \quad x(0) = 7,$$

está definida en todo $\mathbb{R}$.

16. **i.:** Sean $y_1, y_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2. Si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \quad = \quad 0, \tag{1}$$

en (a,b), donde $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas, prueba que

$$w(x) = Ce^{-\int_a^x p(t)\,dt},$$

donde $w(x)$ es el wronskiano de y_1 y y_2.

ii.: Si y_1 es una solución no trivial de (1), prueba que la otra solución se puede encontrar resolviendo la ecuación

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) = \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int_a^x p(t)\,dt}.$$

17. Resuelve el sistema
$$\frac{dx}{dt} = y \qquad x(0) = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = z \qquad y(0) = 2$$
$$\frac{dz}{dt} = x \qquad z(0) = 3$$
18. Encuentra todas las soluciones $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de
$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$
Comenta este ejercicio a la luz del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias.
19. Discute el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ cuando $t \to \infty$, si
   a.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.
   b.: $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.
   c.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
20. Considera la ecuación diferencial $\dot{X} = \nabla f(X)$, con
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 (x_1 + 1)^2 + x_2^2.$$
Encuentra los puntos críticos y describe la dinámica cerca de ellos.
21. Considera la ecuación
$$y''(x) + \left(\alpha - \int_0^1 (y'(x))^2 \, dx \right) y(x) = 0$$
con $y(0) = y(1) = 0$.
   i.: ¿Para qué valores de α, la ecuación tiene solución distinta de la trivial?
   ii.: Si α es uno de los valores encontrados en i., encuentra la solución (no trivial) de la ecuación diferencial.