EJERCICIOS DE E.D.O.

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua; suponga que $|f(x)| \leq M$. Para cada $n = 1, 2, \ldots,$ sea $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una solución de $x' = f(x)$. Si $x_n(0)$ converge, muestre que la sucesión $\{x_n\}$ converge uniformemente a una solución.

2. Use el problema 1 para mostrar que la continuidad en las condiciones iniciales de las soluciones sigue de la unicidad y la existencia de soluciones.

3. Considere la ecuación diferencial
$$x' = x^{\frac{2}{3}}$$
   (a) Muestre que existen infinitas soluciones con $x(0) = 0$ en cualquier intervalo $[0, \beta]$.
   (b) ¿Para qué valores de α existen infinitas soluciones en $[0, \alpha]$ que satisfacen $x(0) = -1$?

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Muestre que el sistema
$$x' = g(x),$$
$$y' = f(x)\, y;$$
tiene a lo más una solución en cada intervalo para una condición inicial dada.

5. Muestre que las órbitas de una acción de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$ tienen que ser inmersiones inyectivas de un punto, un círculo, una recta, un toro, un cilindro o de un plano.

6. Considere el flujo lineal del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:
$$\varphi_t(x, y) = (x, y) + t\,(1, \lambda) \mod \mathbb{Z}^2.$$
   (a) Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ entonces toda órbita es periódica.
   (b) Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces toda órbita es densa en $\mathbb{T}^2$. (*Sugerencia:* Muestre que todo subgrupo de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es discreto o denso y estudie la interseccion de la órbita de $(0, 0)$ con $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$.
   (c) Suponga que λ es irracional y considere un conjunto $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ que contenga exactamente un punto de cada órbita de φ_t. Muestre que A no es boreliano. (Sugerencia: considere los iterados de A por el tiempo 1 del flujo).

7. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial C^2, deduzca la ecuación diferencial que satisface la (matriz) derivada de su flujo: $D\varphi_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi_t|_x$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Muestre que el $f(x(t))$ es decreciente en soluciones de $x' = -\nabla f(x)$. Muestre que $x' = -\nabla f(x)$ no tiene soluciones periódicas.

9. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{\partial}{\partial y} H \\ y' &= -\tfrac{\partial}{\partial x} H \end{aligned} \tag{1}$$

donde $H(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es C^∞.

(a) Muestre que los conjuntos de nivel $H^{-1}\{a\}$ son invariantes por las soluciones de (1).

(b) Muestre que si los conjuntos de nivel de H son compactos entonces el flujo φ_t de 1 está definido en todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Muestre que la derivada del flujo de (1): $D\varphi_t(x, y) \cdot (h, k) = (h(t), k(t))$, satisface la ecuación de Jacobi:

$$\begin{aligned} h' &= H_{yx}\ h + H_{yy}\ k \\ k' &= -H_{xx}\ h - H_{xy}\ k \end{aligned} \tag{2}$$

(d) Muestre que el flujo de 1 preserva el volumen de $\mathbb{R}^{2n}$.

(e) Escriba $\mathbb{V} := \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Considere un subespacio n-dimensional $E \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ tal que $E \cap \mathbb{V} = \{0\}$. Observe que E puede escribirse como un gráfico de una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$$E = \mathrm{graf}(A) = \{(x, Ax) \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Si $E(t) = D\varphi_t(x) \cdot E$ y $E(t) = \mathrm{graf}(A(t))$, Muestre que A satisface la ecuación de Ricatti:

$$A' + AH_{yy}A + AH_{yx} + H_{xy}A + H_{xx} = 0.$$

(f) Muestre que si H_{yy} es definida positiva, el conjunto de puntos donde $h(t) = 0$ en la ecuación (2) es discreto.

(d) Muestre que la derivada $D\varphi_t$ preserva la forma $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$, i.e. $(D\varphi_t)^*\omega = \omega$. (i.e. si $(h_1(t), k_1(t))$ y $(h_2(t), k_2(t))$ son soluciones de (2) entonces la cantidad $w(t) = \langle h_1(t), k_2(t)\rangle - \langle h_2(t), k_2(t)\rangle$ es constante en t. Muestre que $\omega^n = w \wedge \overset{n}{\ldots} \wedge \omega$ es $\pm n!$ la forma de volumen de $\mathbb{R}^{2n}$. Deduzca que $D\varphi_t$ preserva la forma de volumen de $\mathbb{R}^{2n}$, i.e.las transformaciones $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ \mathbb{R}^n$, i.e. tienen Jacobiano $= 1$.

10. Considere la ecuación lineal $X' = A(t)\,X$ donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz $n \times n$ y $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
    (a) Use la fórmula

$$\tfrac{d}{dt}(\det X) = \operatorname{tr}(\tfrac{d}{dt}X)\cdot \det X \tag{3}$$

    para mostrar que si $X(0)$ es no-singular entonces $X(t)$ es no-singular para todo t.
    (b) Sea $X(t)$ la solución de (3) con $X(0) = I$. Use $X(t)$ para hallar la solución de la ecuación no homogénea $Y' = A(t)\,Y + B(t)$, $Y(0) = Y_0$.

11. Considere la ecuación $x'' = \operatorname{sen} x$. Escríbala como un sistema de orden 1:

$$x' = y$$

$$y' = \operatorname{sen} x$$

Encuentre una función $H(x, y)$ tal que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ sea constante para toda solución $(x(t), y(t))$. Grafique todas órbitas $\{((x(t), y(t)) \,|\, t \in \mathbb{R}\,\}$.

12. Sea $H(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= H_y \\ y' &= -H_x \end{aligned} \tag{4}$$

    (a) Determine cuando el campo vectorial (4) es un campo gradiente.
    (b) Observe que las soluciones constantes de (4) corresponden a los puntos críticos de (4). Muestre que si (x_0, y_0) es un máximo o un mínimo de H entonces no existe una función $V(x, y)$ en una vecindad de (x_0, y_0) tal que el valor de V decrece en las soluciondes de (4). Pero si (x_0, y_0) es un punto silla, tal V local sí existe.

13. Considere la ecuación lineal de 2da orden

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0, \tag{5}$$

    (a) Muestre que (5) puede escribirse de la forma

$$(p(t)\,x')' + (q(t)\,x) = 0. \tag{6}$$

    (b) Considere el producto interno en $\mathcal{L}^2$:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_0^T x(s)\,y(s)\,ds.$$

    Muestre que el operador

$$L[x] = (p(t)\,x')' + q(t)\,x$$

es autoadjunto en $W = \{x \in C^2([0,T],\mathbb{R}) \mid x(0) = x(T)\}$.

(c) Muestre que también el operador Laplaciano

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

es autoadjunto para el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u \cdot v \;\, dx\, dy$$

en $W = \{u \in C^2(\Omega,\mathbb{R}) \mid u|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un domínio de $\mathbb{R}^2$. *Sugerencia:* Demuestre la fórmula de Green:

$$\int_\Omega u \;\, \Delta\, v = \oint_{\partial\Omega} u\, (\nabla v \cdot \vec{n}) - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

14. Queremos hallar soluciones del problema de autovalores

$$L(u) = \lambda\, u \qquad u(0) = u(T) = 0. \tag{7}$$

donde L es el operador de Sturm-Liouville (6). Como el operador es autoadjunto, se trata de probar un teorema espectral.

(a) Muestre que si λ y μ son dos autovalores, entonces las funciones propias son ortogonales respecto al producto interno de $\mathcal{L}^2$.

(b) Muestre que si $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ fuesen los valores propios de L entonces

$$\lambda_0 = \min\{\tfrac{\langle L(u),u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{L}^2}} \mid u(0) = u(T) = 0\}.$$

(c) Si $V = \{x \in C^2([0,T],\mathbb{R}) \mid \; x(0) = x(T) = 0\}$, $V(\lambda_k)$ es el subsepacio propio de λ_k, y W_k es el complemento ortogonal de $V(\lambda_0) \oplus V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_{k-1})$, entonces

(i) W_k es L-invariante, i.e. $L(W_k) \subseteq W_k$.

(ii) $\lambda_k = \min\{\, \frac{\langle L(u),u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{L}^2}} \mid u \in W_k\,\}$.

(d) Ordenemos los autovalores $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ repitiéndolos de acuerdo a su multiplicidad. Considere el correspondiente sistema ortonormal de vectores propios $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Muestre que si $\lim_{N\uparrow+\infty} \lambda_n = +\infty$ entonces $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ es una base ortonormal de V, i.e. si $f \in V$ y $a_k = \langle f, u_k\rangle$, entonces

$$\lim_{N\uparrow+\infty} \big\|f - \sum_{k=0}^{N} a_k\, u_k\big\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Sugerencia: $g := f - \sum_0^N a_k\, u_k \in W_{N+1}$, $\|g\| \le \|f\|$ y

$$\|g\|^2 \le \tfrac{1}{\lambda_{N+1}} \langle L(g), g\rangle = \langle L(f), g\rangle \le \tfrac{1}{\lambda_{N+1}} \|L(f)\|\;\|f\|\,.$$

(e) Concluya que si $\lambda_k \to +\infty$, entonces $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base de $\mathcal{L}^2([0,T])$ pues V es denso en $\mathcal{L}^2([0,T])$. ¿Cuál es esta base cuando $L(x) = \frac{d^2}{dt^2}x$?