EXAMENES GENERALES DE MAESTRIA

ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas

a)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \\ x_1' &= x_1 - x_3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_2 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

c) Resuelva el problema

$$y' = y \ln y$$

con condición inicial $y(1) = 0$. (Sugerencia: la sustitución $z = \ln y$ cambia esta ecuación a una lineal en z.)

2. Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Pruebe que el flujo del sistema,

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

preserva el área.

3. Enuncie el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias y dé un bosquejo de la prueba.

4. Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $V^{-1}(-\infty, c]$ es compacto para toda c y ∇V es distinto de cero, excepto en un número finito de puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

a) Pruebe que la solución $x(t)$ de $x' = \nabla V$ está definida para todo $t \geq 0$.

Date: Enero 1998.

b) Pruebe que $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existe y es igual a uno de los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, para toda solución $x(t)$.

5. Sea x_0 un punto en $\mathbb{R}^n$ que es de equilibrio para la ecuación

$$x' = f(x)$$

siendo f de clase C^3. Suponga que la diferencial de f en el punto de equilibrio satisface la propiedad de que todos sus valores propios tienen parte real negativa. Pruebe que existe una vecindad U de x_0 tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$, para toda solucion tal que $x(0) \in U$.